Math Un 85/6

Matheſis. Syſtemata & methodi
130.

R

Lehrbegrif
der geſamten
Mathematik.

Aufgeſetzt
von

Wencesl. Joh. Guſtav Karſten,
der Phil. Doct. der Mathem. Profeſſor zu Bützow, der Churfl. Bayerſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu München und der Holländiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Harlem Mitglied.

Der Sechſte Theil.

Beſchluß der Hydraulik und die Pneumatik.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röſe. 1771.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Der

unter dem Allergnädigſten Schutz

Ihro Kayſerl. Majeſtät aller Reuſſen

blühenden

Akademie der Wiſſenſchaften

in

St. Petersburg

widmet

dieſen ſechsten Theil

ſeines

Lehrbegrifs der Mathematik

als ein Zeugniß

ſeiner grôſten Verehrung

und

vollkommenſten Hochachtung

der Verfaſſer.

Vorrede.

Als vor dreißig Jahren die erſten ſechs Ausgaben von der ins deutſche überſetzten Waſſerbaukunſt des Herrn **Belidor** durch den Druck bekannt wurden, war man nicht durchgängig damit zufrieden, daß Herr **Belidor** bey ſeinem Leſer ziemlich viele theoretiſche Kenntniſſe vorausſetzte. Im 54 Stück der Hamburger Staats- und Gelehrten Zeitung vom Jahr 1743 findet ſich das nachſtehende Urtheil von dem Belidorſchen Werke: „Es

„behalte zwar ſeine Verdienſte, habe aber auch „denjenigen Fehler, den faſt alle Schriften „von dieſer Gattung hätten, es ſey dunkel ge„ſchrieben, und die algebraiſchen Rechnungen „machten es noch dunkler, es könne kaum von „Gelehrten, geſchweige von Künſtlern und „Werkleuten verſtanden und begriffen wer„den.“ Ich habe nicht geleſen, daß man den neuen Ausgaben, die ſeit einigen Jahren von der deutſchen Ueberſetzung dieſes Buchs erſchienen ſind, eben den Vorwurf gemacht hätte: ſollte man hieraus wohl folgern können, daß es jetzt weit mehr in der Algebra geübte deutſche Gelehrte und Künſtler gäbe, als es vor dreißig Jahren gegeben hat, und daß aus dieſer Urſache jener Vorwurf das Belidorſche Werk nicht mehr treffe? Ob dieſe Frage bejahet werden könne, getraue ich mir nicht mit Gewißheit zu behaupten: ſo viel aber iſt gewiß, daß die Algebra in einen beſſern Ruf gekommen iſt, und daß man jetzt nicht leicht mehr ei-

nem

nem Buch deswegen einen Vorwurf der Dunkelheit macht, weil es algebraiſche Beweiſe und Rechnungen enthält. Ein Buch, wie das Belidorſche, war übrigens auch nicht für blos handwerksmäßige Künſtler und Werkleute geſchrieben, und ſchon um deswillen würde jener ehemalige Tadel der Hamb. Zeitung von ſelbſt wegfallen.

Ueberhaupt ſchickt ſich wohl der eigentliche wiſſenſchaftliche Vortrag gar nicht für bloſſe Handwerker, und in einem Buch, das für ſie beſtimmt ſeyn ſoll, iſt es genug, wenn man ihnen ſagt: ſo und ſo muß die Sache gemacht werden; auch kan gar wohl kurz und gut, wo es nöthig iſt, ein Grund beygefüget werden, der jedoch ſolchen Leuten faßlich bleiben, und nicht aus dem innern der Theorie hergenommen ſeyn muß. Perſonen aber, welche beym Maſchinen-Weſen, Waſſer-Bau, und ähnlichen Unternehmungen die Aufſicht haben, und

die Titel von Bau- und Maſchinen-Directo-
ren, Ingenieurs und dergleichen mehr führen,
ſollten von Rechtswegen nicht blos handwerks-
mäßige Kenntniſſe von dieſen Dingen beſitzen.
Der Zimmermann, Maurer, Eiſenſchmidt,
Rothgieſſer, Tiſchler, u. ſ. f. muß nach der
Vorſchrift des Aufſehers arbeiten; jeder von
dieſen Werkleuten verfertiget nur einen Theil
des ganzen, und dabey iſt es nicht nöthig, daß
er die Anordnung des ganzen überſiehet, und
nach richtigen Gründen zu beurtheilen weiß.
Dies iſt die Sache des Aufſehers, dem muß
es demnach an den theoretiſchen Kenntniſſen
nicht fehlen, er muß im Stande ſeyn, ein
Werk, wie das Belidorſche iſt, ohne ſonderli-
chen Anſtoß zu leſen, und algebraiſche Rech-
nungen nicht ſcheuen. An Männern, die ſo
viele Kenntniſſe der theoretiſchen Mathematik
beſitzen, als hiezu nöthig iſt, ſcheint es nach
meiner Erfahrung immer noch ſo ſehr zu feh-
len, wenn man gleich nicht mehr dergleichen

Kenntniſſe grade zu für entbehrlich erklärt, ja vielmehr, weil es nach gerade Mode geworden iſt, viele Achtung dagegen bezeuget.

Verlangt man aber nicht zu viel, wenn man fordert, daß alle und jede Liebhaber der praktiſchen Mathematik, beſonders ſolche, die ſich durch Erlernung derſelben dazu geſchickt machen wollen, in Cammer- und Amtirungs-Sachen, beym Bau- und Maſchinenweſen, ihrem Fürſten und zugleich ihrem Vaterlande nützliche Dienſte zu leiſten, die theoretiſche Mathematik in ihrem ganzen Umfange lernen, und es darin zu einer ſolchen Stärke bringen ſollen, daß ſie ſelbſt Erfinder abgeben können? Wenn man bedenket, daß dazu viele Zeit und Müſſe von andern zerſtreuenden Beſchäftigungen erfordert werde, ſo wird man mit mir dafür halten, daß eben dadurch viele abgeſchreckt werden. Und muß denn ein tüchtiger Beamter, oder Bau- und Maſchinen-Director nothwendig

wendig in allen Kunſtgriffen der Integralrechnung geübt ſeyn? muß er eben ſo gut den Planeten- Cometen- und Mondslauf berechnen können, als den Effect einer Mühle, einer Waſſerkunſt, oder die nöthige Stärke der Widerlagen eines Gewölbes, eines Brückenpfeilers, u. ſ. f.? Mancher Liebhaber der Mathematik, dem es nicht an natürlicher Fähigkeit und Luſt zu der Wiſſenſchaft fehlt, würde vielleicht einem Euler, von Segner und Käſtner ſehr gern nacheifern, wenn ihm nicht andre ſchlechthin nothwendige Beſchäftigungen den gröſten Theil ſeiner Zeit raubten.

Sollten mich dieſe Betrachtungen wohl rechtfertigen, wenn ich dadurch bin bewogen worden, beym Vortrag der mechaniſchen Wiſſenſchaften im vierten, fünften und dem gegenwärtigen ſechſten Theil meines Lehrbegrifs der Mathematik die nothwendigſten Lehren der höhern Mathematik da, wo ich ſie nöthig hatte,

zu

zu erklären? Mir ſcheint dieſe Abweichung von der ſtrengen Methode noch immer weniger auf ſich zu haben, als wenn man den angehenden Geometra ohne nöthige Vorbereitung vermittelſt andrer Wiſſenſchaften, ſogleich in die Feldmeßkunſt führet; indeſſen dürfte die Welt doch nicht dabey gewinnen, wenn man den Schüler der Feldmeßkunſt zuforderſt durch die ganze höhere Geometrie, die geſamte Charakteriſtik, und alle Theile der Naturlehre hindurch führen wollte, die, wenn alles aufs genaueſte genommen werden ſoll, in der Wiſſenſchaft, die er ausüben will, vorausgeſetzt werden. Schwerer wird es nicht ſeyn, auf dem von mir vorgezeichneten Wege fortzugehen, als wenn man jenen Weg wählen wollte, beſonders wenn man ſich den Inhalt meines zweyten Theils recht geläufig gemacht hat: und für die Ausbreitung und Ausübung der nützlichſten Kenntniſſe iſt es, wie ich glaube, vortheilhafter, eine ſo geringe Abweichung ſich

zu verſtatten, als alle dieſe Lehren bis dahin auszuſetzen, wohin nur wenige gehen können, oder in einem ganzen Buche zu ſagen, daß man hier noch wenig oder gar nichts brauchbares ſagen könne, welches, ſo wahr es auch iſt, den wißbegierigen Leſer doch nicht befriedigen wird.

Ich habe zwar in der Vorrede zum vierten Theil dieſe Art des Vortrags ſchon mit ſolchen Gründen zu entſchuldigen geſucht, die mir nicht unerheblich ſchienen: indeſſen finde ich nöthig, noch etwas dahin gehöriges hier beyzufügen. Meine Meinung iſt nicht dieſe, die ganze Algebra und höhere Geometrie nur ſo zerſtreut durch alle Theile des ganzen Buchs vorzutragen; denn ich glaube nicht mit dem Herrn G. C. Silberſchlag in ſeinen Cloſter-Bergiſchen Verſuchen (36 und 37 S.) „daß die Algebra die Form eines ſyſtematiſchen Vortrags „nicht wohl zulaſſe, ſondern in lauter Aufga-

„ben

„ben und Exempeln beſtehe;“ ich meine auch, daß ich ihr in meiner Matheſi Theoretica die Form eines ſyſtematiſchen Vortrags gegeben habe, welches die Herrn von Segner und Kåſtner faſt zu gleicher Zeit mit mir ebenfalls gethan haben. Andrer hieher gehöriger Schriftſteller, welche gröſſere Werke geſchrieben haben, erwehne ich nicht, und ich wollte nur beyläufig meine Verwunderung zu erkennen geben, daß ein ſonſt geſchickter deutſcher Schriftſteller im Jahr 1768 die Algebra nur für eine Sammlung von Exempeln hält. Wie geſagt: ich bin hierin nicht nur ganz andrer Meinung, ſondern werde auch in etlichen folgenden Theilen dieſes Lehrbegrifs die Algebra und höhere Geometrie in ihrer ganzen Vollſtändigkeit im Zuſammenhange abhandeln. Zuförderſt aber ſollen noch einige Theile von den Optiſchen, Geodätiſchen, Geographiſchen und Aſtronomiſchen Wiſſenſchaften folgen. Dieſe Einrichtung des ganzen Werks giebt mir den

Vor=

Vortheil, daß ich in den gewöhnlichen Lehr-ſtunden die wichtigſten und gemeinnützlichſten Wiſſenſchaften der practiſchen Mathematik vortragen kan, darüber ſonſt auf den meiſten Univerſitäten wohl nur ſehr ſelten Lehrſtunden gehalten werden, weil man glaubt, die Zuhörer müſſen zuforderſt geübte Algebraiſten ſeyn. Ich habe ſchon Erfahrungen davon, daß ſie es auf dem von mir gewählten Wege eben ſo gut, und gewiſſermaſſen noch beſſer werden, als auf dem gewöhnlichen Wege, weil ſie allenthalben die angenehmſten und nützlichſten Anwendungen ſehen. Nur wenige Studirende wagen es, auf Univerſitäten algebraiſche Lehrſtunden zu beſuchen, und noch wenigere haben einen würklichen Nutzen davon: ſelbſt ſolche, die einige Fertigkeit im algebraiſchen Calcul erlangen, verſäumen es oft, weiter zu gehen, und praktiſch-mathematiſche Wiſſenſchaften zu treiben. Ihnen geht es alsdenn ohngefehr ſo, wie es einem angehenden Philoſophen ergehen wür-

de,

de, der nichts als Logik ſtudiren, und die übrigen Philoſophiſchen Wiſſenſchaften verabſäumen wollte. Bey dem von mir gewählten Vortrag haben Studirende, die ſich auf der Univerſität hauptſächlich mit der Mathematik beſchäftigen wollen, den Vortheil, daß ſie Lehrſtunden der Algebra, (die ich, ſo oft ſich Liebhaber finden, nach wie vor, über meine lateiniſche Matheſin Theoreticam zu halten gewohnt bin,) und praktiſch-mathematiſcher Wiſſenſchaften zugleich beſuchen können. Wer ſich meines deutſchen Lehrbegrifs bedienen will, die Mathematik für ſich zu ſtudiren, der kan, wenn er Zeit und Luſt dazu hat, die Algebra umſtändlicher zu lernen, ganz füglich meine Matheſin Theoreticam damit verbinden: und ſo kan es ihm zur angenehmen Abwechſelung dienen, wenn er die theoretiſchen Sätze, welche im deutſchen Buche nur gleichſam als Lehnſätze (lemmata) eingeflochten ſind, in dem lateiniſchen Buch weiter ausgeführt findet.

det,

det. Geſetzt aber, daß mein Vortrag auch ſeine Unbequemlichkeiten hätte, die ich ſehr wohl kenne, ſo werden ſie doch durch den Nutzen weit überwogen, den ich dadurch zu ſtiften ſuche, daß ſolche Studirende, die zwar einigermaſſen Luſt zur Mathematik bezeugen, aber doch ihre Hauptbeſchäftigung nicht daraus machen wollen oder können, zu einer gründlichen Kenntniß der Natur und vieler Werke der Kunſt angeführet werden, ohne ſie durch gar zu langweilige Theorien zu ermüden. Eine geſchickte Mittelſtraſſe hat hier, nach meiner Meynung groſſe Vorzüge. Ich habe Gelegenheit gehabt, einige Studirende kennen zu lernen, welche auf die gewöhnliche Art Lehrſtunden über die reine und angewandte Mathematik, die Algebra und Phyſik beſucht hatten, und doch die bekannteſten Aufgaben vom freyen Falle ſchwerer Körper nicht zu berechnen wuſten. Verabſäumter Fleiß war die Urſache nicht, nur waren ſie an einen allgemeinen und

von

von der Ausübung ſehr entfernten Vortrag gewöhnt. Sie wuſten vieles von dem Streit über das Carteſiſche und Leibnitziſche Kräften-Maaß zu erzehlen, ſie wuſten Beweiſe und Gegenbeweiſe zu führen; mir aber kam es bey dem allen ſo vor, daß ſie keinen rechten Begrif davon hatten, was in der Mechanik eigentlich Kraft heiſſet: wenigſtens wuſten ſie nicht, wie man die Kraft eines Menſchen, eines Thiers, des Waſſers oder des Windes, bey einer Maſchine auf Rechnung bringen muß. Es ging ihnen mit andern Lehren eben ſo, wovon ſie hinlänglich unterrichtet zu ſeyn glaubten, ohne daß ſie im Stande waren, ſie mit der Ausübung in Verbindung zu bringen. Sollte dies wohl nicht eine von den Urſachen ſeyn, weswegen man hie und da eine gründliche Theorie noch für entbehrlich hält. Es giebt unter Männern, die anſehnliche Ehren-Aemter bekleiden, und jungen Gelehrten zu ihrer Beförderung behülflich ſeyn müſſen, oft ſolche, die

eine gute hiſtoriſche Erkenntniß von vielen practiſchen Dingen beſitzen: ſie reden mit dem Candidaten, der ſich für einen Algebraiſten ausgiebt, von Dingen, die mancher Maurer- und Zimmermeiſter weiß; dem gelehrten Algebraiſten ſind es unbekannte Dinge, und was ſchlieſt ſein Beförderer daraus? daß alle ſo ſehr gerühmte Theorie auf Pedanterey hinaus laufe.

Bey Ausarbeitung dieſes Lehrbuchs habe ich mir gleich anfangs die Abſicht vorgeſetzt, ſo viel möglich, allen Arten von Liebhabern der Mathematik nützlich zu ſeyn: ſie mögen nun die Wiſſenſchaft in ihrer ganzen Vollkommenheit lernen, oder auch mit einigen beſondern Kenntniſſen zufrieden ſeyn wollen. Für die Liebhaber der letzten Claſſe ſchien mir bisher am wenigſten geſorgt zu ſeyn, und ich ſchmeichle mir damit, daß ich meiner Abſicht nicht ganz verfehlt habe, ihnen die Wiſſenſchaft practiſch

nützlich

nützlich vorzutragen, und zugleich die Mühe der Erlernung möglichſt zu erleichtern. Es iſt genug, wenn dieſe nur nachrechnen können, was man ihnen vorrechnet, damit ſie ſich von der Richtigkeit der Reſultate überzeugen. Mit dem gegenwärtigen ſechſten Theil beſchlieſſe ich vor der Hand die mechaniſchen Wiſſenſchaften, und man wird hier eine Menge von Unterſuchungen über allerley practiſch nützliche Gegenſtände antreffen, deren die gewöhnlichen Handbücher oft kaum im Vorbeygehen erwehnen. Zu einer etwas umſtändlichen Unterſuchung über die Waſſerſchraube hat mich die von der Königlichen Academie der Wiſſenſchaften zu Berlin gekrönte Preisſchrift des Herrn **Hennerts** veranlaſſet. Ich habe zwar ſchon einen Aufſatz davon der Churfürſtlich-Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften zugeſchickt, der für ihre deutſchen Abhandlungen beſtimmt iſt: allein ich weiß nicht, was es für einen Eigenſinn des Buchhandels zum

Grunde hat, daß jene Abhandlungen in unſern Gegenden ſo wenig bekannt werden; und deswegen glaubte ich, wenn jener Aufſatz auch dort gedruckt werden ſollte, daß dennoch hier ein vollſtändiger Auszug daraus eine Stelle verdiene. Es iſt ſolches auch mit Vorwiſſen und Bewilligung der Churfürſtl. Academie geſchehen. Die letzten Ausführungen der Theorie von den Stampf- und Holz-Säge-Mühlen können als Muſter dienen, wie man ſich zu verhalten hat, wenn man auch über die Anordnung andrer Arten von Maſchinen Unterſuchungen anſtellen will. Von den Stampf-Mühlen bemerke ich noch, daß die Unterſuchung über die vortheilhafteſte Krümmung der Hebe-Daumen, ſo wie andre ähnliche, z. E. über die vortheilhafteſte Geſtalt der Zähne eines Sternrades, hier noch weggelaſſen ſey, weil ich dergleichen Unterſuchungen umſtändlich vorzutragen willens bin, wenn die höhere Geometrie vorangegangen iſt. In Belidors

Waſſerbaukunſt II. Buch III. Cap. 717 §. iſt gewieſen, daß dieſe Krümmung die Evolute eines Kreiſes ſeyn müſſe, zu deren Verzeichnung eben daſelbſt Anleitung gegeben wird. Ich ſehe, da ich dieſes ſchreibe, aus dem 72 Stück der Göttingiſchen Anzeigen von Gelehrten Sachen d. J., daß Herr H. Käſtner am 8 Junii d. J. in der Verſammlung der Königlichen Societät der Wiſſenſchaften einen Aufſatz über dieſen Gegenſtand vorgeleſen hat. Was daſelbſt der Hebearm genannt wird, das nennen ſonſt die practiſchen Schriftſteller den Daumen oder Däumling, und die Welle, worin er ſteckt, heiſt davon die Daumen-Welle: der horizontale Anſatz an dem Stempel heiſt ſonſt die Hebelatte. Calvör hat den Redegebrauch umgekehrt in der Nachricht und Beſchreibung des Maſchinenweſens und

der Hülfsmittel beym Berg=Bau auf dem Oberharze, II. Theil 80 S. und ich führe dies nur an, weil ich bey der Beſchreibung einer Stampfmühle den gewöhnlichen Redegebrauch beybehalten habe.

Weil es ſchon gewöhnlich iſt, daß man Hydroſtatik und Hydraulik, oder Hydromechanik, von einander unterſcheidet; ſo habe ich geglaubt, daß es nicht ganz unſchicklich ſey, Aeroſtatik und Aeromechanik, oder Pneumatik, zu unterſcheiden, weil man in den gewöhnlichen Handbüchern unter dem Namen der Aerometrie nur die Wiſſenſchaft vom Gleichgewichtszuſtande der Luft abzuhandeln pflegt. Die Theorie von den Bewegungs=Geſetzen elaſtiſcher flüßiger Maſſen, dergleichen die Luft iſt, welche ich hier unter dem Namen der Pneumatik vorgetragen habe, wollte ich nicht

nicht gern nach dem Beyſpiel der meiſten Verfaſſer mathematiſcher Handbücher ganz weglaſſen, ob ich gleich ſehr wohl weiß, und es auch bey der Ausführung ſelbſt mehrmals erinnert habe, daß wir in Anſehung des Phyſicaliſchen, worauf die Rechnungen gebauet werden müſſen, noch weit zurück ſind. Der wißbegierige Liebhaber der Mathematik will zweifelsohne gern in allen Theilen dieſer Wiſſenſchaft lernen, wie weit man gekommen iſt, um dereinſt ſeine Kräfte zu verſuchen, ob er es nicht weiter bringen könne. Ich habe die Theorie von der Bewegung der Luft in Gefäſſen und Röhren auf eine allgemeine Formul zu bringen geſucht, die der Euleriſchen allgemeinen Hydrauliſchen Formul ähnlich iſt; noch umſtändlichere Unterſuchungen darüber habe ich in einem für die Abhandlungen der Churfürſtl.

fürſtl. Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften beſtimmten Aufſatz angeſtellet: und wenn gleich der Verſuch, welchen ich gemacht habe, die Anwendung davon auf die Luftpumpen zu machen, nur noch ſehr unvollkommen gerathen ſeyn ſollte; ſo wird man dies um ſo eher entſchuldigen, weil ich bisher darin noch gar keine Vorgänger gehabt habe. Der Aufſatz von den Windbüchſen und der damit verwandten Lehre von der Gewalt des entzündeten Pulvers, wird denjenigen eine ſehr gute Vorbereitung ſeyn können, die etwa aus der vom Hrn. Euler Erläuterten Robinſchen Artillerie, und andern nach der Zeit bekannt gewordenen hieher gehörigen Schriften eines d'Arcy, Papacini d'Antoni und Lambert dieſe Theorie ſich umſtändlicher bekannt machen wollen. Die bisher noch nicht zur überzeugenden Richtigkeit

tigkeit gebrachte Theorie vom Windſtoß hätte mich wohl abſchrecken ſollen, vieles von Windmühlen-Flügeln zu ſagen: indeſſen ſchien mir doch des Hn. Schobers Aufſatz im 9ten Bande des Hamb. Magazins alle Aufmerkſamkeit zu verdienen, weil er faſt der einzige iſt, den ich in deutſcher Sprache über dieſe Materie etwas umſtändlich gefunden habe. Ihm fehlte, nach meiner Einſicht, die nöthige Deutlichkeit, und ich habe die darin enthaltenen richtigen Vorſchriften mehr aufzuklären geſucht. Uebrigens iſt es bekannt, daß Herr Euler in verſchiedenen beſondern Aufſätzen dieſe Materie unterſucht hat, ich habe ſie alle angeführt und gewieſen, in wie weit die Reſultate meiner Rechnungen mit den Euleriſchen überein kommen. Daß ich nicht blos abgeſchrieben habe, wird man bey Vergleichung jener Auf-

ſätze mit meiner Ausführung bald wahrnehmen: ich habe auch hier, wie bey mehreren andern Gelegenheiten, Hrn. Eulers Vortrag zu verkürzen, und bequemere Formuln für die Ausübung anzugeben geſucht.

Bützow im Heumonath des Jahrs 1771.

Wencesl. Joh. Guſtav Karſten.

Verbeſſe-

Verbeſſerungen und Druckfehler im VI. Theil.

Auf der

22 Seite letzte Zeile $d\mu$ leſe man $d\beta$.

34 S. ſechſte Z. von unten, auf eine Art, l. auf eine andre Art.

82 S. 12 Z. 0,637939 l. 0,635954, und 4 Zeile von unten 1,975296 l. 2,22529575. Die erſte Zahl iſt unrecht abgeſchrieben, und die zweyte Zahl ein Rechnungsfehler, weswegen in dem dortigen Exempel noch verſchiedne andre Zahlen geändert werden müſſen, wie man beym nachrechnen leicht finden wird. Am Ende auf der 84 S. in der letzten Zeile giebt ſich alsdenn die Zahl 175° 15′ ſtatt 175° 27′.

108 Seite 9 Z. von unten löſche man das Wort: nicht weg.

112 S. 13 Z. Integralrechnung l. Integralgleichung.

149 S. 18 Z. II. IV. Cap. l. II. Buch IV. Cap.

160 S. 7 Z. haben l. heben.

179 S. 12 Z. 539 §. l. 549 §.

206 S. 12 Z. kommen l. kennen.

Verbeſſerungen und Druckfehler.

Auf der

214 S. 1 Z. Amlterd. l. Amſterd.

216 S. 1 Z. daran l. davon.

217 S. 10 Z. von unten: heben l. haben.

226 S. 16 Zeile löſche man das S aus dem Bruch $\frac{(\mu VY - VG)S}{VG + \mu VX}$ S einmahl weg.

249 S. 5 Z. von unten: Lage l. Länge.

274 S. 2 Z. $\frac{r}{h}$ l. $\frac{\rho}{p}$.

275 S. 12 Z. 588 §. l. 599 §.

277 S. 13 Z. 578 §. l. 599 §.
und 14 Z. $\frac{3}{16}$ l. $\frac{1}{4}$.

278 S. 7 Z. von unten: 587 §. l. 598 §.

279 S. letzte Z. 589 §. l. 600 §.

286 S. 14 Z. groſſen l. gewiſſen.

298 S. 5 Z. 105 §. l. 195 §.

317 S. 2 Z. von unten, e^{nw} l. e^{-nw}.

321 S. 10 Z. ſehr hoch l. nicht ſehr hoch.

324 S. 9 Z. nach dem Wort: mittlere, ſetze man hinzu: Dichtigkeit der

336 S. 5 Z. Kf l. kf.

337 S. letzte Z. 1 − l. 1 +

351 S. 3 Z. 850 × 15 l. 850 × 14

359 S. 14 Z. nach dem Wort: wächſt, ſetze man hinzu: wenn r um dr wächſt.

366 S. 6 Z. $\int \frac{Z}{z} dr$ l. $\int \frac{X}{z} dr$.

370 S. 10 Z. $\xi + \lambda - \lambda$ l. $\xi + \lambda - s$.

Verbeſſerungen und Druckfehler.

Auf der

372 S. 12 Z. und 373 S. 2 Z. $\lambda + w$ l. $\lambda + 2w$.

378 S. letzte Z. df l. δf.

389 S. 19 Z. löſche man: wenn weg.

393 S. 2 Z. k l. K.

und 14 Z. vor k ſetze man das Zeichen $\surd$

403 S. 8 Z. $c^2 b$ l. $c^2 b^2$.

418 S. 6 Z. nach: der Stempel D, ſetze man hinzu: niedergedruckt wird: wenn aber das Ende I und mit demſelben der Stempel D.

468 S. 5 Z. $l\Lambda = 6{,}6 \ldots$ l. $l\Lambda = 6{,}2 \ldots$

470 S. 7 Z. von unten löſche man: nicht weg.

486 S. letzte Z. Lage l. Länge.

514 S. 5 Z. von unten nach der Parentheſe ſetze man hinzu GBk.

547 S. 6 Z. $\frac{60}{100}$ l. $\frac{95}{100}$.

566 S. 7 Z. von unten, Schacht l. Schaft.

und in der letzten Z. um den l. nun der

601 S. 4 Z. von unten: in den l. in den Raum.

611 S. 5 Z. 5,80785 l. 5,80985

629 S. 6 Z. von unten MN und l. MN auf.

676 S. letzte Z. ~~der Fläche l.~~ den Flügel.

698 S. 6 Z. $c = \frac{1}{y}$, l. $c = \frac{1}{y}$ C.

700 S. 2 Z. $71\frac{4}{5}^\circ$ l. $72\frac{4}{5}^\circ$,

und 5 Z. vor $\frac{7}{4 \cdot 151}$ ſetze man das Zeichen $=$

708 S. 15 Z. die l. der.

709 S. 18 Zeile γz l. γx.

716 S. 6 Z. von unten 223 §. l. 209 §.

Auf der

725 S. 9 Z. $\frac{2\pi b}{\tan g \eta}$ l. $\frac{2\pi b}{t}$, und $2\pi bt$ l. $2\pi b$.

754 S. 2 Z. $\cos\zeta \sin\vartheta$ l. $c.\cos\zeta \sin\vartheta$.

759 S. 7 Z. von unten $\sqrt{\frac{1}{2}}$ l. $\sqrt{2}$.

und 2 Z. von unten $35\frac{1}{4}°$ l. $54\frac{3}{4}°$.

768 S. 4 Z. $\frac{c.\cos\zeta}{\mu}$ l. $\frac{\cos\zeta}{\mu}$.

769 S. 12 Z. $\tan g\vartheta < \frac{1}{2}$ l. $\tan g\vartheta < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

771 S. 5 Z. von unten $\vartheta = \sqrt{3}$ l. $\tan g\vartheta = \sqrt{3}$.

777 S. 2 Z. von unten $\mu - - 6$ l. $\mu = -6$.

781 S. 10 Z. $\mu^4\lambda$ l. $\mu^4\gamma$,

und 2 Z. von unten $\mu - 1$ l. $(\mu - 1)^2$.

782 S. 8 Z. 219 §. l. 217 §.

784 S. 17 Z. $\frac{1}{2}c^2 \sin^2$ l. $\frac{1}{2}c^2 \sin\zeta^2$.

Inhalt

Inhalt
des ſechſten Theils.

Fortſetzung der Hydraulik.

Der XXXIII. Abſchnitt. Von der Zurückwürkung des Waſſers auf die Gefäſſe.
Der XXXIV. Abſchnitt. Anwendung dieſer Theorie auf die Maſchinenlehre.
Der XXXV. Abſchnitt. Vom Segneriſchen Waſſerrade nach den verbeſſerten Vorſchlägen des H. Euler.
Der XXXVI. Abſchnitt. Theorie der Archimediſchen Waſſerſchraube.
Der XXXVII. Abſchnitt. Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit des durch die Waſſerſchraube flieſſenden Waſſers.
Der XXXVIII. Abſchnitt. Von Schöpfwerken, Kaſtenkünſten, und andern zur Hebung des Waſſers dienlichen Einrichtungen.
Der XXXIX. Abſchnitt. Von Roſenkranz-Mühlen und Schaufelwerken.
Der XL. Abſchnitt. Allgemeine Eintheilung der üblichſten Maſchinen in ihre verſchiedene Claſſen.
Der XLI. Abſchnitt. Theorie der Stampfmühlen.
Der XLII. Abſchnitt. Theorie der Holz-Sägemühlen.

Die

Die Pneumatik,

oder

die Theorie von der Bewegung elaſtiſcher flüßiger Maſſen.

Der I. Abſchnitt. Die erſten Gründe theoretiſcher Unterſuchungen über die Bewegungsgeſetze elaſtiſcher flüßiger Maſſen.

Der II. Abſchnitt. Die Bewegung der Luft durch kleine Oefnungen.

Der III. Abſchnitt. Die Bewegung der Luft in Röhren von unbeſtimmter Länge.

Der IV. Abſchnitt. Verſuch einer Theorie der Luftpumpen.

Der V. Abſchnitt. Beſchreibung der hauptſächlichſten Arten von Luftpumpen, die ſeit der erſten Erfindung bekannt geworden ſind.

Der VI. Abſchnitt. Nähere Anleitung zur Berechnung des Effects und der mechaniſchen Anordnung einer Luftpumpe.

Der VII. Abſchnitt. Berechnung des Drucks der Luft auf die Gefäſſe, und der nöthigen Feſtigkeit der letztern.

Der VIII. Abſchnitt. Theorie der Windbüchſen mit einigen Anwendungen auf das Pulvergeſchütz.

Der IX. Abſchnitt. Vom Stoß des Windes an feſte Körper.

Der X. Abſchnitt. Theorie der Windflügel bey Mühlen und andern Maſchinen.

Der XI. Abſchnitt. Von krumm gebogenen Windflügeln und dem Anemometer.

Der XII. Abſchnitt. Von Windflügeln, deren Umlaufsaxe mit der Richtung des Windes nicht parallel liegt.

Die

Hydraulik.

Der XXXIII. Abſchnitt.

Von der Zurückwürkung des Waſſers auf die Gefäſſe.

455 §.

Es iſt noch eine merkwürdige Würkung des aus Gefäſſen ausſtrömenden Waſſers übrig, die um deswillen eine eigene Unterſuchung verdient, weil ſie verſchiedene practiſch nützliche Vorſchläge veranlaſſet hat. So lange nemlich das Waſſer in einem Gefäß ruhig ſteht, und man ihm durch keine Oefnung irgendwo den Ausgang verſtattet; ſo lange halten die Preſſungen des Waſſers gegen die Seitenwände des Gefäſſes einander im Gleichgewicht. Das Gefäß leidet nur vertical unterwärts

einen Druck, der dem Gewicht des in demſelben enthaltenen Waſſers gleich iſt, ohne daß es nach horizontaler Richtung etwa gegen die eine Seite mehr, als gegen die gegen über ſtehende gepreſt würde. Wenn man aber dem Waſſer durch eine ſeitswärts angebrachte Oefnung den Ausgang verſtattet, ſo hört das Gleichgewicht der horizontalen Preſſungen auf, und das Gefäß leidet auch nach horizontaler Richtung einen Druck, der es nach dieſer Richtung würklich bewegt, dafern nicht die Friction des Bodens, worauf das Gefäß ſtehet, oder andere Urſachen es hindern. Man hatte nicht ſobald angefangen, die Geſetze der Bewegung flüßiger Körper etwas genau und vollſtändig zu entwickeln, als man auch bemühet war, die Stärke der Zurückwürkung des Waſſers zu finden. In Hermanni Phoronomia finde ich hierüber noch keine Unterſuchungen, und es ſcheint, daß die Herrn Johann und Daniel Bernoulli, die erſten geweſen ſind, welche ſich Mühe gegeben haben, die Stärke dieſer Zurückwürkung des Waſſers zu berechnen. Jedoch bringen ſie nicht beyde einerley Reſultate heraus, und ihr Vortrag iſt noch Zweifeln unterworfen. Hr. Leonh. Euler aber hat auch dieſe Theorie, ſoviel ich bisher einſehe, zur überzeugenden Richtigkeit gebracht.

456 §.

Wenn das in einem Gefäß befindliche Waſſer blos träge, und nicht ſchwer wäre; ſo würde es weder den Boden noch die Seiten des Gefäſſes, drücken. Und wenn man gleich im Gefäß eine Oefnung machte; ſo würde dennoch alles Waſſer im Gefäß ruhig bleiben. Es würde kein Tropfen herauslaufen,

ſen, alſo auch der Fall einer Zurückwürkung des Waſſers in das Gefäß nicht ſtatt haben. Man muß demnach beydes, die Bewegung des Waſſers ſowohl als auch ſeine Zürückwürkung, als einen Effect der Schwere aller einzelnen Waſſertheilchen anſehen. Und dafern ſonſt noch andere Kräfte vorhanden wären, die das Waſſer beſchleunigten, ſo würden dieſe ebenfals nicht allein an der Bewegung des Waſſers, ſondern auch an deſſen Zurückwürkung Antheil haben. Wenn man nun bis auf die im 159 §. angeſtellten Unterſuchungen zurückgehet; ſo ergiebt ſich, daß die Kräfte, welche erfordert werden, alle Waſſertheilchen in dem Zuſtande ihrer Bewegung zu unterhalten, vermittelſt der allgemeinen Grundſätze der Mechanik gefunden werden können. Wenn dieſe Kräfte in Abſicht ihrer Gröſſe und Richtung völlig mit denjenigen Kräften einerley wären, welche die Waſſertheilchen würklich beſchleunigen; ſo würde gar keine Zurückwürkung auf das Gefäß ſtatt haben. Ein Fall von dieſer Art wäre der, wenn das Gefäß ein vertical ſtehender Cylinder, und die im Boden befindliche Oefnung der Grundfläche des Cylinders gleich wäre. In andern Fällen aber, wo die Geſtalt des Gefäſſes es hindert, daß nicht grade diejenige Bewegung der Waſſertheilchen erfolgen kann, welche die darauf drückenden Kräfte ihrer Stärke und Richtung gemäß hervorbringen würden, muß ein Theil dieſer Kräfte gegen das Gefäß drücken; da dann der übrige Theil derjenige iſt, welcher die würkliche Bewegung der Waſſertheilchen eigentlich verurſachet. Jener Theil der Kräfte für alle Waſſertheilchen zuſammen genommen ſey $=R$, und die Summe aller Kräfte,

welche die würkliche Bewegung der Waſſertheilchen zu unterhalten, erfordert werden, ſey $= Q$; die Summe aller auf die geſammten Waſſertheilchen würklich drückenden Kräfte ſey $= P$; ſo ergiebt dieſe Betrachtung, daß $P = Q + R$ ſeyn müſſe, wenn die Richtungen aller dieſer Kräfte einander parallel ſind. Vermöge obiger Schlüſſe iſt R mit der Stärke der Zurückwürkung des Waſſers, in eben der Richtung genommen, einerley und man erhält $R = P - Q$. Weil nun in jedem Fall P gegeben iſt, ſo hat man R, wenn Q bekannt iſt, und wenn man die im 159 und 191 §. vorgetragenen Lehren zu Hülfe nimmt, ſo hat es auch weiter keine Schwierigkeit, Q zu finden. Will man aber dieſe Unterſuchung anſtellen, ſo muß man noch folgende Differentiations- und Integrations-Regeln wiſſen.

457 §.

I) Wenn φ ein Kreisbogen iſt, und y ſeinen Sinus bedeutet; ſo iſt $d.\text{A}\sin y = \frac{dy}{\surd(1-yy)}$ (332 §. Mech.) $= d\varphi$. Weil nun $y = \sin\varphi$, ſo iſt $\surd(1-yy) = \cos\varphi$, und man erhält $d\varphi = \frac{d.\sin\varphi}{\cos\varphi}$, folglich $d.\sin\varphi = d\varphi\cos\varphi$.

II) Iſt nun $z = \cos\varphi$, ſo hat man $\surd(1-zz) = \sin\varphi$, und $\varphi = \text{A}\cos z$. Weil nun $d.\text{A}\cos z = \frac{-dz}{\surd(1-zz)}$ (332 §. Mech.) $= \frac{-d.\cos\varphi}{\sin\varphi}$, ſo erhält man $d.\cos\varphi = -d\varphi\sin\varphi$.

III) Weil $\text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, ſo iſt $d.\text{tang}\,\varphi$

=

$= \frac{coſ\varphi\, d.ſin\varphi - ſin\varphi\, d.coſ\varphi}{coſ\varphi^2}$ (104 §. Mech.) $=$
$\frac{d\varphi coſ\varphi^2 + d\varphi ſin\varphi^2}{coſ\varphi^2}$, alſo $d.\text{tang}\varphi = \frac{d\varphi}{coſ\varphi^2}$.

IV) Weil ferner $\cot\varphi = \frac{coſ\varphi}{ſin\varphi}$, ſo iſt $d.\cot\varphi$ $= \frac{-d\varphi ſin\varphi^2 - d\varphi coſ\varphi^2}{ſin\varphi^2}$, oder $d.\cot\varphi =$ $- \frac{d\varphi}{ſin\varphi^2}$.

V) Aus der bekannten Gleichung $ſec\varphi = \frac{1}{coſ\varphi}$ folgt $d.ſec\varphi = \frac{d\varphi ſin\varphi}{coſ\varphi^2} = d\varphi\,\text{tang}\varphi$ $ſec\varphi$, und

VI) aus der Gleichung $coſec\varphi = \frac{1}{ſin\varphi}$ wird $d.coſec\varphi = - \frac{d\varphi coſ\varphi}{ſin\varphi^2} = - d\varphi \cot\varphi\, coſec\varphi$ geſunden.

VII) Weil endlich $ſinv\varphi = 1 - coſ\varphi$ iſt, ſo erhält man $d.ſinv\varphi = d\varphi\, ſin\varphi$.

Aus dieſen ſieben Gleichungen flieſſen umgekehrt folgende Integrations-Regeln.

$\int d\varphi\, coſ\varphi = C + ſin\varphi$

$\int -d\varphi ſin\varphi = C + coſ\varphi$

$\int \frac{d\varphi}{coſ\varphi^2} = C + \text{tang}\varphi$

$\int - \frac{d\varphi}{ſin\varphi^2} = C + \cot\varphi$

$\int d\varphi\, \text{tang}\varphi\, ſec\varphi = C + ſec\varphi$

$$\int -d\phi \cot\phi \operatorname{coſec}\phi = C + \operatorname{coſec}\phi$$
$$\int d\phi \sin\phi = C + \int v . \phi.$$

458 §.

F. 1. Das Waſſer ſtrömt durch die Oefnung PQ des Gefäſſes $ACHMKP$, wie das im 159 §. betrachtete iſt: man ſucht, mit welcher Gewalt es auf das Gefäß nach horizontaler Richtung zurück würkt.

Aufl. Man behalte alle Bezeichnungen wie im 159 §. bey, und es ſey $\sqrt{v}$ die Geſchwindigkeit des durch den Querſchnitt HI $= m$ laufenden Waſſers: ſo iſt $\frac{m\sqrt{v}}{z}$ die Geſchwindigkeit des Waſſers, welches durch den Querſchnitt MN $= z$ nach der Richtung Ss läuft. Zerlegt man dieſe Geſchwindigkeit nach den Richtungen SR und SL, wovon jener vertical, und dieſe horizontal iſt, und ſetzt den Winkel RST $= \phi$, ſo iſt die horizontale Geſchwindigkeit $= \frac{m \sin\phi \sqrt{v}}{z}$, und die zugehörige Höhe $= \frac{m^2 v \sin\phi^2}{zz}$. Weil nun hier angenommen wird, daß die centriſche Linie in einer Ebene liege, ſo ſchneide SL die verticale Linie Fg in X, und es ſey FX $= x$, XS $= y$; die Beſchleunigung der in dem Querſchnitt MN laufenden Waſſertheilchen nach der Richtung SL ſey $=$ V, ſo iſt $d . \frac{m^2 v \sin\phi^2}{z^2} = \mathrm{V}dy$.

Setzt man nun $v \sin\phi^2 = u$, ſo wird $d . \frac{u}{z^2} = \frac{z^2 du - 2uzdz}{z^4}$ (104 §. Mech.), ferner $du =$

$vd . \sin\phi^2$

$vd.\sin\varphi^2 + \sin\varphi^2 dv$, und $d.\sin\varphi^2 = 2\sin\varphi \times d.\sin\varphi = 2d\varphi \sin\varphi \cos\varphi$ (457 §.) $= d\varphi \sin 2\varphi$. Dies giebt $du = vd\varphi \sin 2\varphi + \sin\varphi^2 dv$, folglich $d.\frac{u}{z^2}$
$= (z^2 vd\varphi \sin 2\varphi + z^2 \sin\varphi^2 dv - 2v\sin\varphi^2 zdz) : z^4$
oder

$$d.\frac{u}{z^2} = \frac{vd\varphi \sin 2\varphi}{z^2} + \frac{dv \sin\varphi^2}{z^2} - \frac{2vdz \sin\varphi^2}{z^3},$$

und daraus folgt

$$\frac{m^2 dv \sin\varphi^2}{z^2} + \frac{m^2 vd\varphi \sin 2\varphi}{z^2} - \frac{2m^2 vdz \sin\varphi^2}{z^3}$$

$= Vdy$. Nun iſt ferner $dy = ds \sin\varphi$, und dies ſtatt dy geſetzt, und durch $\sin\varphi$ dividirt giebt

$$\frac{m^2 dv \sin\varphi}{z^2} + \frac{2m^2 vd\varphi \cos\varphi}{z^2} + \frac{2m^2 vdz \sin\varphi}{z^3}$$

$= Vds$. Nun ſey der Theil aller horizontalen Preſſungen, den das Element MmnN leidet $= d\Pi$, und die Maſſe deſſelben $= d$M, ſo iſt $V = \frac{d\Pi}{dM}$. Man kann aber Π ſowohl als M durch eine Menge Waſſer ausdrücken, deren Gewicht mit Π oder M einerley iſt, die eigene Schwere des Waſſers = 1 geſetzt: und in dieſer Vorausſetzung wird $dM = zds$, alſo $V = \frac{d\Pi}{zds}$. Dies ſtatt V geſetzt giebt

$$d\Pi = \frac{m^2 dv \sin\varphi}{z} + \frac{2m^2 vd\varphi \cos\varphi}{z} - \frac{2m^2 vdz \sin\varphi}{z^2}.$$

Weil es völlig gleichviel iſt, was für einen Querſchnitt des Gefäſſes man durch m verſtehen will, ſo kann auch die Oefnung PQ, durch welche das Waſ-

ſer ausſtrömt, verſtanden werden. Wenn nun dieſe $= n$ iſt, und man n ſtatt m ſchreibt, ſo iſt $\surd v$ die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers, und $dt\surd v$ iſt das Element des Weges, den daſſelbe in der Zeit dt zurück legt. Dies giebt $zds = ndt\surd v$, und man erhält $\frac{n^2 dv \sin\phi}{z} = \frac{n^2 dv . ds \sin\phi}{zds}$

$$= \frac{ndv . ds \sin\phi}{dt\surd v} = \frac{ndv}{dt\surd v} . dy.$$ Alſo iſt

$$d\Pi = \frac{ndv}{dt\surd v} . dy + \frac{2n^2 vd\phi \cos\phi}{z}$$

$$- \frac{2n^2 vdz \sin\phi}{z^2}.$$ Weil nun

$$\int \left(\frac{d\phi \cos\phi}{z} - \frac{dz \sin\phi}{z^2} \right) = \frac{\sin\phi}{z},$$

ſo giebt die Integration

$$\Pi = \frac{ndv}{dt\surd v} . y + \frac{2n^2 v \sin\phi}{z} + C,$$ weil t und v bey dieſer Integration als beſtändige Gröſſen zu betrachten ſind. Iſt nun der höchſte Querſchnitt der Röhre AB $= m$, ſo muß $\Pi = 0$ ſeyn, wenn $y = 0$, und $z = m$ iſt. Wird überdem in eben dieſem Fall $\phi = \varepsilon$, ſo wird $C = - \frac{2n^2 v \sin\varepsilon}{m}$,

und dies giebt

$$\Pi = \frac{ndv}{dt\surd v} . y + 2n^2 v \left(\frac{\sin\phi}{z} - \frac{\sin\varepsilon}{m} \right).$$

Um nun dieſen Druck für die ganze Röhre zu haben, ſey

ſey EF $= h$, und am Ende der centriſchen Linie bey G ſey $\varphi = \zeta$, ſo muß man h ſtatt y, n ſtatt z, und ζ ſtatt φ ſetzen, um dies Integral für das ganze Gefäß zu haben. Dies giebt

$$\Pi = \frac{hndv}{dt\sqrt{v}} + 2n^2v\left(\frac{\sin\zeta}{n} - \frac{\sin\varepsilon}{m}\right).$$

Aus dieſer Gleichung ergiebt ſich nun unmittelbar die Zurückwürkung des Waſſers nach horizontaler Richtung. Es iſt nemlich Π die Summe aller Kräfte, welche erfordert werden, das Waſſer nach der Richtung SL zu beſchleunigen. Drückte nun auf alle Waſſertheilchen die Summe der Kräfte P nach eben dieſer Richtung, ſo wäre $P = \Pi + R$, alſo $R = P - \Pi$. Aber im gegenwärtigen Fall iſt $P = 0$, weil alle Kräfte P vertical unterwärts drücken. Demnach wird die Zurückwürkung $R = -\Pi$,

oder $R = 2n^2v\left(\frac{\sin\varepsilon}{m} - \frac{\sin\zeta}{n}\right) - \frac{hndv}{dt\sqrt{v}}$.

459 §.

Um alſo R zu finden, muß für jede Zeit t eine Gleichung zwiſchen t und v bekannt ſeyn, welche vermittelſt der im XI und XII Abſchnitt vorgetragenen Regeln gefunden werden kan. Dafern übrigens das oberſte Stück der centriſchen Linie vertical, alſo $\varepsilon = 0$ iſt, ſo wird $R =$

$-\left(2nv\sin\zeta + \frac{hndv}{dt\sqrt{v}}\right)$. Und wenn überdem das Waſſer nach horizontaler Richtung ausſtrömt, ſo iſt $\zeta = 90°$, alſo in dieſem Fall

$$R = -\left(2nv + \frac{hndv}{dt\sqrt{v}}\right).$$

Dafern das Gefäß beſtändig voll bleibt, ſo weiß man, daß die Bewegung des Waſſers ſehr bald bey nahe völlig gleichförmig wird, da dann $dv=0$, alſo $R=-2nv$ iſt. Das Zeichen (—) deutet an, daß der Druck derjenigen Richtung, nach welcher das Waſſer ausſtrömt, entgegen geſetzt ſey, und die Gleichung ſelbſt ergiebt, daß dieſe Zurückwürkung dem Gewicht einer Waſſer-Säule gleich ſey, wovon die Grundfläche der Oefnung gleich iſt, wodurch das Waſſer ausſtrömt, die Höhe aber doppelt ſo groß, als die der Geſchwindigkeit des Waſſers zugehörige Höhe.

In dieſem beſondern Fall alſo iſt die Regel richtig, die H. Daniel Bernoulli in der Hydrodynamica Sect. XIII. §. 4. p. 280. findet. Aber ſeinen Schlüſſen, die ihn auf dieſe Gleichung leiten, fehlt noch das völlig überzeugende. Dies ſcheint der berühmte Verfaſſer ſelbſt zu merken, und er giebt es dadurch zu erkennen, daß er eben die Gleichung noch durch andere indirecte Gründe zu beſtätigen ſucht. Die hier gebrauchte Art zu ſchlieſſen iſt aus Herrn Leonh. Eulers Abhandlungen hievon genommen, welche im 158 §. ſchon angeführt ſind. Auch gehört hieher ein Aufſatz des Herrn Albert Euler ſur les diverſes manieres de faire avancer les vaiſſeaux ſans employer la force du vent. Seconde Partie: des forces, qui naiſſent de la reaction de l'eau, in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin Année 1764. p. 263. ſqq Daniel Bernoulli war darauf verfallen, ob es nicht thunlich ſeyn möchte, ſtatt der ſonſt gewöhnlichen Ruder, ſich dieſer Kraft der Zurückwürkung des Waſſers zu bedienen, um dadurch

die

die Galeeren fortzutreiben. Seine Vorſchläge ſtehen in der angeführten Hydrodynamica Sect. XIII. §. 20. ſqq. p. 293. ſqq. Der jüngere Herr Euler prüft a. a. O. dieſe Art, Galeeren zu bewegen, und zeigt, daß daher eben kein ſonderlicher Vortheil zu hoffen ſey.

Johann Bernoulli hat am Ende ſeiner oft angeführten Hydraulica, Oper. T. IV. pag. 484 ſqq. die Theorie von der Zurückwürkung des Waſſers nur ganz kurz berührt. Nach ſeiner Rechnung würde in dem zuletzt betrachteten Fall die Zurückwürkung nur halb ſo groß ſeyn, als ſie hier gefunden, und von Daniel Bernoulli angegeben iſt. Ja, ſie würde, wie er ſelbſt ganz zuletzt behauptet, in beſtändig vollen Gefäſſen gar nicht von der Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers abhängen, und gleich im erſten Augenblick, da die Bewegung anfängt, eben ſo groß ſeyn, als im Beharrungsſtande. Allein daß dies ein Irthum ſey, ergiebt die bisherige Ausführung. Bernoulli nimmt an, die Kraft der Zurückwürkung ſey ſo groß, als der Druck einer Waſſer-Säule gegen die untere Oefnung des Gefäſſes, die mit der Summe aller verticalen Kräfte im Gleichgewicht ſteht: oder nach ſeinem im 195 §. vorgetragenen Sprachgebrauch: es ſey die Summe aller verticalen Kräfte dV auf die untere Oefnung reducirt. Man ſiehet aber leicht, daß dieſer Weg, die Zurückwürkung zu ſuchen, ganz und gar nicht der richtige ſey.

Der XXXIV. Abſchnitt.

Anwendung dieſer Theorie auf die Maſchinen-Lehre.

460 §.

Es iſt ſchon im 455 § angemerkt worden, daß die Kraft der Zurückwürkung des aus einem Gefäß hervorſtrömenden Waſſers dies Gefäß wirklich in Bewegung ſetze, und dieſe Bewegung wie andere Kräfte beſchleunige, wenn keine Hinderniſſe dieſe Bewegung hemmen. Die hier nothwendige Kürze verſtattet es nicht, die bisherigen Lehren auf die Betrachtung ſolcher Bewegungen, ausführlich anzuwenden. Nur ein einziger Fall verdienet deswegen hier eine genauere Erwegung, weil derſelbe mit der Maſchinen-Lehre in Verbindung ſtehet, und dieſe Zurückwürkung des Waſſers mit in die Claſſe derjenigen Kräfte gehört, welche Maſchinen mit Vor-
2 Fig. theil zu bewegen dienen können. Wenn man ſich nemlich die Vorſtellung macht, daß eine ſolche Röhre, wie EGF, vermittelſt einiger Arme, wie CF, DG, AE, mit einer vertical ſtehenden Welle AC verbunden ſey; ſo wird das Waſſer, indem es bey F ausſtrömt, die Röhre vermöge ſeiner Zurückwürkung in Bewegung ſetzen, und um die Axe AC herumtreiben. Um die erſte Unterſuchung über dieſe Sache zu erleichtern, iſt im 458 §. noch angenommen worden, daß die centriſche Linie nur eine einfache Krümmung habe, ſo daß alle ihre Punkte in einer und eben derſelben Ebene liegen. Um aber der gegen-

gegenwärtigen Unterſuchung die gehörige Allgemeinheit zu geben, nehme man an, die Geſtalt der centriſchen Linie ſey, welche ſie wolle, ſo läſt ſich die Lage eines jeden ihrer Punkte M folgendergeſtalt beſtimmen. Durch die Mitte der Oefnung F, als den unterſten Endpunkt der centriſchen Linie, ſey eine horizontale Ebene gelegt, welche die Umdrehungs-Axe AC in C ſchneidet, ſo daß AC auf ihr ſenkrecht iſt. Auf dieſe Ebene ſey MQ ſenkrecht, alſo vertical, und von Q ſey auf CF die Linie QP ſenkrecht gezogen: ſo iſt die Lage eines jeden Punkts M bekannt, wenn CP, PQ und QM bekannt ſind. Wenn nun die Röhre ſich um die Axe AC drehet, ſo wird die ganze darin befindliche Maſſe Waſſer mit herum geführet. Deswegen muß man die Geſchwindigkeit des Waſſers, womit es in der Röhre ſelbſt gegen die Oefnung F zu läuft, von derjenigen unterſcheiden, womit es um die Axe AC geführt wird, da dann dieſe letztere Geſchwindigkeit für jedes Element Mm mit der Geſchwindigkeit derjenigen Stelle der Röhre, die es einnimt, einerley iſt. Jene iſt alſo eigentlich die relative Geſchwindigkeit des Waſſers in Anſehung der Röhre. 3 Fig.

461 §.

Es ſey der Oefnung F wahre Geſchwindigkeit $= \sqrt{u}$, und $CF = b$, der Abſtand des Elements Mm von der Axe $MN = CQ = q$; ſo iſt die Winkel-Geſchwindigkeit der Röhre $= \frac{\sqrt{u}}{b}$, und die wahre Geſchwindigkeit des Elements Mm der Röhre $= \frac{q\sqrt{u}}{b}$. Die Richtung $M\mu$ dieſer Geſchwindigkeit

liegt

liegt in einer durch M horizontal gelegten Ebene, und iſt auf MN ſenkrecht. Ferner ſey die Oefnung F = ff, der Querſchnitt durch M = zz, und die relative Geſchwindigkeit des durch F ſtrömenden Waſſers = $\sqrt{v}$; ſo iſt die relative Geſchwindigkeit des in eben dieſem Augenblick durch M laufenden Waſſers = $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, und zwar nach der Richtung Mm. Wenn nun beyde Richtungen den Winkel mM$\mu = \vartheta$ einſchlieſſen, ſo iſt die wahre Geſchwindigkeit des Waſſers $= \sqrt{\left(\frac{f^4 v}{z^4} + \frac{2ffq\sqrt{vu}}{bzz}\cos\vartheta + \frac{qqu}{bb}\right)}$, und ihre Richtung iſt gegen Mm unter einem Winkel geneigt, deſſen Tangente $= \frac{q\sqrt{u}}{b}\sin\vartheta : \left(\frac{f^2\sqrt{v}}{z^2} + \frac{q\sqrt{u}}{b}\cos\vartheta\right)$ (14 §. Mech.)

Wenn man die relative Geſchwindigkeit des Waſſer-Elements Mm nach zwoen Richtungen zerlegt, davon die eine Mn mit der Richtung Mμ der Umdrehungsbewegung des Elements M zuſammen fällt, die andre aber darauf ſenkrecht iſt, ſo wird die Geſchwindigkeit nach der Richtung M$n = \frac{f^2\sqrt{v}}{z^2}\cos\vartheta$. Alſo iſt die wahre Geſchwindigkeit dieſes Elements nach der Richtung M$\mu = \frac{f^2\sqrt{v}}{z^2}\cos\vartheta + \frac{q\sqrt{u}}{b}$, da dann $\cos\vartheta$ negativ wird, wenn $\vartheta > 90°$ iſt.

462 §.

Beyde Geſchwindigkeiten des durch die

Röhre *EMF* flieſſenden Waſſers, ſowohl die relative nach der Richtung der Röhre, als auch die Umdrehungsgeſchwindigkeit deſſelben ſind für jede Zeit *t* gegeben: man ſucht das Moment der Zurückwürkung des Waſſers, womit ſelbige die Umdrehungsbewegung zu beſchleunigen ſtrebt.

Aufl. Man ſuche die Kräfte, welche erfordert werden, das Waſſer in der angenommenen Bewegung zu erhalten, ſondre diejenigen von den übrigen ab, aus welchen ein Moment in Anſehung der Axe AC entſteht, und bringe alle dieſe Momente in eine Summe: ſo läſt ſich hiernächſt das Moment der Zurückwürkung dem 456 §. gemäß finden. Es ſey alſo in der Zeit *t* die Linie CF aus der Lage CB in CF gekommen, und man ſetze die Winkel BCF $= \phi$, FCQ $= \omega$, ſo wird BCQ $= \phi + \omega$, und die Ebene dieſes Winkels iſt horizontal. Es ſey, wie vorhin, MQ vertical, und QX auf CB ſenkrecht. Wenn alsdenn auch CD auf CB ſenkrecht iſt; ſo ſind CB, CD, CA drey auf einander ſenkrechte Axen, und die Lage eines jeden Waſſer-Elements M gegen die drey Ebenen BCD, BCA, ACD, wird durch die drey Coordinaten CX $=$ X, XQ $=$ Y, QM $=$ Z beſtimmt. Die Kräfte, welche das Element M beſchleunigen, mögen ſeyn, welche ſie wollen, ſo kann man ſie nach den Richtungen dieſer dreyen Axen zerlegen, und nach eben dieſen Richtungen zerlege man die Geſchwindigkeit dieſes Elements. Man ſetze, daß nach den Richtungen CB, CD, CA die drey Kräfte dP, dQ, dR, entſtehen, und daß die Geſchwindigkeiten des Elements nach eben dieſen Richtun-

3 Fig.

tungen α, β, γ, ſind; ſo hat man $\alpha = \frac{dX}{dt}$, $\beta = \frac{dY}{dt}$, $\gamma = \frac{dZ}{dt}$, und überdem wird $dP = \frac{2dM}{dt}d\alpha$, $dQ = \frac{2dM}{dt}d\beta$, $dR = \frac{2dM}{dt}d\gamma$. (117 §. Mech.) Von dieſen dreyen Kräften ſtreben nur die beyden erſten die Röhre um die Axe AC zu drehen, und man kann eine jede derſelben wieder in zwo andre zerlegen nach Richtungen, davon die eine mit MN, die andre mit $M\mu$ zuſammenfält. Es ſey in ſolcher Abſicht Cx auf CB, und Cd auf CQ ſenkrecht, ſo iſt $xCd = BCQ = \varphi + \omega$, und aus dQ entſteht nach $Cd \# M\mu$ die Kraft $dQ\cos(\varphi + \omega)$, nach $CQ \# MN$ die Kraft $dQ\sin(\varphi+\omega)$. Aus dP aber entſteht nach $Cd \# M\mu$ die Kraft $-dP\sin(\varphi+\omega)$ und nach $CQ \# MN$ die Kraft $dP\cos(\varphi + \omega)$. Alſo leidet das Element M nach der Richtung MS den Druck $dP\cos(\varphi+\omega) + dQ\sin(\varphi+\omega)$, nach der Richtung $M\mu$ aber den Druck $dQ\cos(\varphi+\omega) - dP\sin(\varphi+\omega)$ Aus jenem Druck nach MS entſteht ebenfalls kein Moment in Anſehung der Axe AC, alſo drücke man nur die Kraft nach $M\mu$ durch $\sqrt{v}$ und $\sqrt{u}$ aus, als die beyden Geſchwindigkeiten des Waſſers (461 §.) Wenn man dieſe Kraft $= d\Pi$ ſetzt, ſo hat man

$$d\Pi = \frac{2dM}{dt}(d\beta\cos(\varphi+\omega) - d\alpha\sin(\varphi+\omega)).$$

Es iſt aber $X = q\cos(\varphi+\omega)$, $Y = q\sin(\varphi+\omega)$, und daraus folgt

$$dX = \cos(\varphi+\omega)dq - q(d\varphi + d\omega)\sin(\varphi+\omega)$$
$$dY = \sin(\varphi+\omega)dq + q(d\varphi + d\omega)\cos(\varphi+\omega);$$

alſo

alſo wird

$$dY\cos(\varphi+\omega) - dX\sin(\varphi+\omega) = q(d\varphi+d\omega),$$ und

$$dY(d\varphi+d\omega)\sin(\varphi+\omega) + dX(d\varphi+d\omega)\cos(\varphi+\omega) = dq(d\varphi+d\omega).$$

Man dividire mit dt, und ſchreibe α und β ſtatt $\frac{dX}{dt}$ und $\frac{dY}{dt}$, ſo wird

$$\beta\cos(\varphi+\omega) - \alpha\sin(\varphi+\omega) = \frac{q(d\varphi+d\omega)}{dt},$$ und

$$\beta(d\varphi+d\omega)\sin(\varphi+\omega) + \alpha(d\varphi+d\omega)\cos(\varphi+\omega) = dq.\frac{d\varphi+d\omega)}{dt}.$$

Die fernere Differentiation der erſten Gleichung giebt

$$d\beta\cos(\varphi+\omega) - \beta(d\varphi+d\omega)\sin(\varphi+\omega) - d\alpha\sin(\varphi+\omega) - \alpha(d\varphi+d\omega)\cos(\varphi+\omega) = d.\frac{q(d\varphi+d\omega)}{dt},$$ alſo

$$d\beta\cos(\varphi+\omega) - d\alpha\sin(\varphi+\omega) = d.\frac{q(d\varphi+d\omega)}{dt} + dq.\frac{d\varphi+d\omega}{dt} = q.d\frac{d\varphi+d\omega}{dt} + 2dq.\frac{d\varphi+d\omega}{dt}.$$

Dieſer Werth in den Ausdruck für $d\Pi$ geſetzt, giebt

$$d\Pi = \frac{2dM}{dt}\left(q.d\frac{d\varphi+d\omega}{dt} + 2dq.\frac{d\varphi+d\omega}{dt}\right),$$

und das Moment dieſer Kraft in Anſehung der Axe AC iſt

$$qd\Pi = \frac{2dM}{dt}\left(qq.d\frac{d\varphi+d\omega}{dt} + 2qdq.\frac{d\varphi+d\omega}{dt}\right).$$

Um von dieſer Formel die fernere Anwendung zu

machen, bemerke man, daß $\frac{d\varphi + d\omega}{dt}$ die Winkelgeſchwindigkeit und $\frac{q(d\varphi + d\omega)}{dt}$ die wahre Geſchwindigkeit des Elements M nach der Richtung Mμ ſey. Eben dieſe Geſchwindigkeit iſt auch = $\frac{f^2\sqrt{v}}{z^2}\cos\vartheta + \frac{q\sqrt{u}}{b}$ (461 §.). Demnach hat man

$$\frac{d\varphi + d\omega}{dt} = \frac{f^2\sqrt{v}}{qz^2}\cos\vartheta + \frac{\sqrt{u}}{b}, \text{ alſo wird}$$

$$d.\frac{d\varphi + d\omega}{dt} = \frac{f^2 dv\cos\vartheta}{2qz^2\sqrt{v}} + f^2\sqrt{v}.d\frac{\cos\vartheta}{zz} + \frac{du}{2b\sqrt{u}},$$

$$\text{und } d\frac{\cos\vartheta}{zz} = \frac{1}{q}d\frac{\cos\vartheta}{zz} - \frac{dq\cos\vartheta}{qqzz};$$

folglich erhält man

$$qq.d\frac{d\varphi + d\omega}{dt} = \frac{qf^2 dv\cos\vartheta}{2z^2\sqrt{v}} + qf^2\sqrt{v}.d\frac{\cos\vartheta}{zz} - \frac{f^2 dq\cos\vartheta\sqrt{v}}{zz} + \frac{qqdu}{2b\sqrt{u}}$$

$$2qdq.\frac{d\varphi + d\omega}{dt} = \frac{2qdq\sqrt{u}}{b} + \frac{2f^2 dq\cos\vartheta\sqrt{v}}{zz}$$

Man addire beyde Werthe zuſammen, und ſetze ſie in die für $qd\Pi$ gefundene Gleichung, ſo wird $qd\Pi =$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{qf^2 dv\cos\vartheta}{z^2\sqrt{v}} + 2qf^2\sqrt{v}.d\frac{\cos\vartheta}{zz} + \frac{2f^2 dq\cos\vartheta\sqrt{v}}{zz} + \frac{qqdu}{b\sqrt{u}} + \frac{4qdq\sqrt{u}}{b}\right).$$

Wenn man nun das Element der centriſchen Linie

Mm

$Mm = ds$ ſetzt, ſo iſt $dM = zzds$, und dies ſtatt dM geſetzt, giebt

$$qd\Pi = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} . ffqds\cos\vartheta + \frac{du}{dt\sqrt{u}} . \frac{qqzzds}{b}$$

$$+ \frac{dq}{dt} . 2ffds\cos\vartheta\sqrt{v} + \frac{2qf^2\sqrt{v}.zzds}{dt} .$$

$$d.\frac{\cos\vartheta}{zz} + \frac{4qzzdsdq\sqrt{u}}{bdt}.$$ Ueberdem hat man noch $ds = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$ (107 §. Mech.) alſo $zzds = ffdt\sqrt{v}$, und wenn man dieſe Werthe ſtatt ds und $zzds$ in den dreyen letzten Gliedern der gefundenen Gleichung ſubſtituirt, ſo erhält man

$$qd\Pi = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} . ffqds\cos\vartheta + \frac{du}{dt\sqrt{u}} . \frac{qqzzds}{b}$$

$$+ 2vf^4\left(\frac{dq\cos\vartheta}{zz} + q . d\frac{\cos\vartheta}{zz}\right) + \frac{4ffqdq}{b}\sqrt{vu}.$$

Dieſen Ausdruck muß man ſo integriren, daß t, v, u als beſtändige Gröſſen, die übrigen aber, welche von der Geſtalt der Röhre abhängen, als veränderlich betrachtet werden; da dann vorläufig zu bemerken iſt, daß $\int\left(\frac{dq\cos\vartheta}{zz} + q . d\frac{\cos\vartheta}{zz}\right) = \frac{q\cos\vartheta}{zz}$ ſey. Die Integration giebt

$$\int qd\Pi = \frac{dv}{dt\sqrt{v}}\int ffqds\cos\vartheta + \frac{du}{dt\sqrt{u}}\int\frac{qqzzds}{b}$$

$$+ 2v.\frac{f^4q\cos\vartheta}{zz} + \frac{2ffqq}{b}\sqrt{vu} + C.$$

Um die beſtändige Gröſſe C zu beſtimmen, ſetze man

man, die Röhre ſey im gegenwärtigen Augenblick bis an E angefüllt, der oberſte Querſchnitt ſey $=ee$, ſein Abſtand von der Umdrehungs-Axe $=c$, und es ſey an dieſem Punkt E der Winkel $\vartheta = \varepsilon$. Man rechne überdem die Integrale $\int \frac{qqzzds}{b}$, und $\int ffqds \cos\vartheta$ von dem Punkt E an, ſo müſſen dieſe Integrale $=0$ ſeyn, wenn $q=c$, $zz=ee$ und $\vartheta = \varepsilon$ iſt. Zugleich aber iſt alsdenn $\int qd\Pi = 0$. Dies giebt

$$C = -2v \frac{f^4 c . \cos\varepsilon}{ee} - \frac{2ffcc}{b} \surd vu.$$

Um nun dies Integral für die ganze Röhre zu haben, muß man $q=b$, $zz=ff$, und $\vartheta = \zeta$ ſetzen, wenn ζ der Winkel iſt, den die unterſte Richtung der Röhre mit dem Bogen FB einſchließt. In eben dieſer Vorausſetzung ſey $\int \frac{qqzzds}{b} = M$, $\int ffqds \cos\vartheta = N$; ſo wird

$$\frac{Mdu}{dt\surd u} + \frac{Ndv}{dt\surd v} + 2ff\left(b\cos\zeta - \frac{cff}{ee}\cos\varepsilon\right) v$$
$$+ \frac{2ff}{b}(bb - cc)\surd vu.$$

Es erhellet aber, wie im 458 §, daß das Moment der Zurückwürkung des Waſſers dieſem gefundenen Moment entgegen geſetzt ſey.

Hat die Röhre beſtändig Zufluß, ſo kann die Bewegung des durchlaufenden Waſſers einmahl gleichförmig werden, und wenn alsdenn auch die Umdrehungs-Bewegung gleichförmig iſt, ſo hat man $dv = 0 = du$, folglich wird das Moment der Zurückwürkung

$$=2ff\left(\frac{cff}{ee}\cos\varepsilon - b\cos\zeta\right)v + 2ff\left(\frac{cc}{b} - b\right)\sqrt{vu}.$$

Dafern die oberſte Richtung vertical und die unterſte horizontal, alſo $\varepsilon = 90°$, und $\zeta = 180°$ iſt, ſo wird in dem Fall, wenn beyde Bewegungen gleichförmig ſind, das Moment der Zurückwürkung

$$=2bffv + 2ff\left(\frac{cc}{b} - b\right)\sqrt{vu},$$

weil $\cos\varepsilon = 0$, und $\cos\zeta = -1$ iſt.

463 §.

Um dieſe Unterſuchung vollſtändig zu machen, wird noch erfordert, die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers ſelbſt zu ſuchen, weil das Moment der Zurückwürkung allemahl davon abhängt: und in ſolcher Abſicht kan man ſich einer Methode zu ſchlieſſen bedienen, die derjenigen ganz ähnlich iſt, welche im 159 §. gebraucht ward, die Geſchwindigkeit des Waſſers zu ſuchen, wenn die Röhre ruhet. Es wird nemlich angenommen, daß das Waſſer mit der relativen Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ durch die untere Oefnung laufe, alſo mit der Geſchwindigkeit $\frac{ff\sqrt{v}}{zz} = \frac{ds}{dt}$ durch jeden unbeſtimten Querſchnitt derſelben nach der Richtung Mm: überdem wird vorausgeſetzt, daß jedes Element des Waſſers, deſſen Abſtand von der Axe $= q$ iſt, mit der Winkel-Geſchwindigkeit $\frac{\sqrt{u}}{b} = \frac{d\varphi}{dt}$ um die Axe AC laufe, alſo nach der Richtung der Umdrehungs-Bewegung mit der Geſchwindigkeit $\frac{q\sqrt{u}}{b} = \frac{qd\varphi}{dt}$.

Wenn man nun die Kräfte ſucht, welche das Waſſer beſchleunigen müſſen, dafern die Geſchwindigkeiten beyder Bewegungen ſich nach dem angenommenen Geſetz ändern ſollen, und ſie hiernächſt nach Richtungen zerlegt, die mit Mm zuſammen fallen, und auf Mm ſenkrecht ſind; ſo können die letztern zur Beſchleunigung nach der Richtung Mm nichts beytragen. Man bringt alſo nur jene in eine Summe, und ſetzt ſie der Summe derjenigen Kräfte gleich, die das Waſſer würklich nach der Richtung Mm beſchleunigen; ſo erhält man eine Gleichung, woraus v für jede gegebene Zeit gefunden werden kan, wenn u ſonſt bekannt iſt.

464 §.

Die Winkelgeſchwindigkeit der Röhre, nebſt der relativen Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre, ſind als Functionen der bereits vom Anfang der Bewegung verfloſſenen Zeit t bekannt: man ſucht die Beſchleunigung der relativen Bewegung des Elements M nach der Richtung Mm.

Aufl. Wenn $\surd v$ und $\surd u$ die beyden gegebenen Geſchwindigkeiten des durch F flieſſenden Waſſers ſind, wie im 461 §, ſo weiß man, daß jedes Element M von dreyen Kräften nach den Richtungen MS, Mμ und MQ beſchleuniget werde, die im 462 §. ſchon ſo weit gefunden ſind, als ſie bey der dortigen Aufgabe gebraucht wurden. Die Kraft nach MS war $= d\text{P} \operatorname{coſ}(\varphi+\omega) + d\text{Q} \operatorname{ſin}(\varphi+\omega)$, und wenn man dieſe Kraft $= d\text{K}$ ſetzt, und die dortigen Werthe von dP und dQ braucht, ſo wird

$$d\text{K} = \frac{2d\text{M}}{dt}\left(d\alpha \operatorname{coſ}(\varphi+\omega) + d\mu \operatorname{ſin}(\varphi+\omega)\right).$$

Wenn

Wenn man nun ferner eben ſo, wie im 462 §, aus den dortigen Formeln für dX und dY ſchlieſt, ſo wird $\alpha \operatorname{coſ}(\varphi+\omega)+\beta \sin(\varphi+\omega)=\frac{dq}{dt}$, und

$$\beta(d\varphi+d\omega)\operatorname{coſ}(\varphi+\omega)-\alpha(d\varphi+d\omega)\sin(\varphi+\omega)$$
$$=\frac{q(d\varphi+d\omega)^2}{dt}.$$

Die erſte Gleichung ferner differentiirt, giebt

$$d\alpha \operatorname{coſ}(\varphi+\omega)-\alpha(d\varphi+d\omega)\sin(\varphi+\omega)+d\beta\sin(\varphi+\omega)$$
$$+\beta(d\varphi+d\omega)\operatorname{coſ}(\varphi+\omega)=d.\frac{dq}{dt};$$ alſo wird

$$d\alpha \operatorname{coſ}(\varphi+\omega)+d\beta\sin(\varphi+\omega)=d.\frac{dq}{dt}$$
$$-q\frac{(d\varphi+d\omega)^2}{dt},$$ und

$$dK=\frac{2dM}{dt}\left(d.\frac{dq}{dt}-q\frac{(d\varphi+d\omega)^2}{dt}\right).$$

Ueberdem war im 462 §

$$d\Pi=\frac{2dM}{dt}\left(q.d\frac{d\varphi+d\omega}{dt}+2dq.\frac{d\varphi+d\omega}{dt}\right),$$

und $dR=\frac{2dM}{dt}d\gamma.$

Man ſetze $\frac{dq}{dt}=w$, $\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon$, $\frac{d\omega}{dt}=\zeta$, ſo hat man

$$dK=2dM\left(\frac{dw}{dt}-q(\varepsilon+\zeta)^2\right)$$

$$d\Pi=2dM\left(\frac{qd(\varepsilon+\zeta)}{dt}+\frac{2dq(\varepsilon+\zeta)}{dt}\right).$$

 Nun

Nun zerlege man jede dieſer drey Kräfte nach Richtungen, die mit Mm zuſammen fallen, und darauf ſenkrecht ſind, ſo entſteht aus dK nach Mm die Kraft $= d\mathrm{K} \cos \mathrm{SM}m$, aus $d\Pi$ die Kraft $d\Pi \cos \vartheta$, (Man ſ. den 461 §.) und aus dR die Kraft $d\mathrm{R} \cos m\mathrm{M}\varrho$. Es iſt aber $\frac{q d\omega}{dt} = \frac{f^2 \sqrt{v}}{z^2} \cos \vartheta$ (461 §.) $= \frac{ds}{dt} \cos \vartheta$, alſo $\cos \vartheta = \frac{q d\omega}{ds}$. Ferner ſey auch mq wie MQ vertical, und Mr horizontal, ſo wird $\mathrm{QM}r = 90° = r\mathrm{M}\varrho$, alſo $\cos m\mathrm{M}\varrho = \sin m\mathrm{M}r = \frac{d\mathrm{Z}}{ds}$. Ueberdem ſchlieſſen die drey Winkel SMm, SMr und rMm an der Spitze M ein körperliches Dreyeck ein, das an Mr rechtwinklicht iſt; folglich hat man $\cos \mathrm{SM}m = \cos \mathrm{SM}r \cos r\mathrm{M}m$ (532 § G.). Ferner iſt $\mathrm{MN}r = d\omega$, und wenn Mμ mit Nr in t zuſammen ſtößt, ſo iſt $rt = dq$, alſo $\sin r\mathrm{M}t = \frac{dq}{\mathrm{M}r} = \cos \mathrm{SM}r$, und $\cos r\mathrm{M}m = \frac{\mathrm{M}r}{ds}$, folglich $\cos \mathrm{SM}m = \frac{dq}{\mathrm{M}r} \cdot \frac{\mathrm{M}r}{ds} = \frac{dq}{ds}$. Subſtituirt man dieſe Werthe, und addirt alle drey Kräfte nach der Richtung Mm zuſammen, ſo iſt die geſamte Kraft nach $\mathrm{M}m = \frac{d\mathrm{K} dq}{ds} + \frac{d\Pi \cdot q d\omega}{ds} + \frac{d\mathrm{R} \cdot d\mathrm{Z}}{ds}$. Es wird aber

$$\frac{d\mathrm{K} dq}{ds} = \frac{2 d\mathrm{M}}{ds} \left(\frac{dq dw}{dt} - - q dq (\varepsilon + \zeta)^2 \right)$$

$$\frac{d\Pi . qd\omega}{ds} = \frac{2dM}{ds}\left(\frac{qqd\omega d(\varepsilon+\zeta)}{dt} + \frac{2qdqd\omega(\varepsilon+\zeta)}{dt}\right)$$

$\frac{dRdZ}{ds} = \frac{2dM}{ds} . \frac{d\gamma dZ}{dt} = \frac{2dM}{ds} . \gamma d\gamma$; und man hat überdem $ds^2 = dZ^2 + Mr^2 = dZ^2 + q^2 d\omega^2 + dq^2$, alſo $\frac{dZ^2}{dt^2} = \frac{ds^2 - q^2 d\omega^2 - dq^2}{dt^2}$.

Man ſetze noch $\frac{ds}{dt} = \eta$, ſo iſt $\gamma^2 = \eta^2 - q^2\zeta^2 - w^2$, alſo $\gamma d\gamma = \eta d\eta - \zeta^2 qdq - q^2\zeta d\zeta - wdw$. Dies in die letzte Gleichung geſetzt, giebt

$$\frac{dRdZ}{ds} = \frac{2dM}{ds} (\eta d\eta - \zeta^2 qdq - q^2\zeta d\zeta - wdw).$$

Hiezu addire man

$$\frac{dKdq}{ds} = \frac{2dM}{ds} (wdw - qdq\varepsilon^2 - 2qdq\varepsilon\zeta - qdq\zeta^2)$$

und

$$\frac{d\Pi . qd\omega}{ds} = \frac{2dM}{ds} (q^2\zeta d\zeta + q^2\zeta d\varepsilon + 2qdq\varepsilon\zeta + 2qdq\zeta^2);$$

ſo wird die Summe

$$= \frac{2dM}{ds} (\eta d\eta + q^2\zeta d\varepsilon - qdq\varepsilon^2) =$$

$$2dM\left(\frac{1}{dt} d . \frac{ds}{dt} + \frac{qqd\omega}{dsdt} d . \frac{d\phi}{dt} - \frac{qdqd\phi^2}{dsdt^2}\right).$$

Man ſubſtituire $\cos\vartheta$ ſtatt $\frac{qd\omega}{ds}$, und dividire mit dem Element dM der Maſſe, ſo wird die Be-

ſchleunigung dieſes Elements $= \frac{2}{dt} d . \frac{ds}{dt} + \frac{2q\cos\vartheta}{dt} d . \frac{d\varphi}{dt} - \frac{2qdqd\varphi^2}{dsdt^2}$.

Weil nun $\frac{ds}{dt} = \frac{f^2 \surd v}{z^2}$ und $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\surd u}{b}$, (461 §.) ſo hat man $\frac{2}{dt} d . \frac{ds}{dt} = \frac{2}{ds} . \frac{ds}{dt}$

$d . \frac{ds}{dt} = \frac{1}{ds} d . \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{ds} \left(\frac{f^4}{z^4} dv + vd . \frac{f^4}{z^4} \right) = \frac{dv}{dt \surd v} . \frac{ff}{zz} + \frac{v}{ds} d . \frac{f^4}{z^4}$;

ferner $d . \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{2b\surd u}$, und $\frac{2qdqd\varphi^2}{dsdt^2} = u . \frac{2qdq}{bbds}$.

Alſo iſt die geſuchte Beſchleunigung $= \frac{du}{dt\surd u} . \frac{q\cos\vartheta}{b} + \frac{dv}{dt\surd v} . \frac{ff}{zz} - u . \frac{2qdq}{bbds} + \frac{v}{ds} d . \frac{f^4}{z^4}$.

Eben die Formul findet Hr. Euler Hiſtoire de l'Academie de Berlin Année 1754 p. 262. Comment. Nov. Petrop. T. VI. p. 323.

465 §.

Wenn beydes ſowohl die relative Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre, als auch die

die Umlaufsgeſchwindigkeit der Röhre ſelbſt, für eine gegebene Zeit t bekannt ſind; den Druk zu finden, den jede Stelle der Röhre in eben dem Augenblick leidet.

Wenn man eben ſo wie im 159 §. ſchlieſt, und annimmt, es ſey für den Querſchnitt M der Druck $= zzp$, alſo für den nächſtfolgenden $zz(p+dp)$ dem vorigen entgegengeſetzt, ſo leidet das Element Mm den Druck $zzdp$ der Richtung der Bewegung entgegen. Das Gewicht dieſes Elements iſt $= zzds$ und dies drückt nach der verticalen Richtung unterwärts mit einer Gewalt $= zzdZ$. Weil aber Z abnimmt, wenn $s =$ EM wächſt, ſo wird dieſer Druck $= zz \times -dZ$, und der geſammte Druck iſt $= - zz(dp+dZ)$. Dieſer durch die Maſſe $zzds$ des Elements Mm dividirt giebt die Beſchleunigung $= - \frac{dp+dZ}{ds}$ nach der Richtung Mm. Wenn dieſe dem am Ende des vor. §. gefundenen Ausdruck gleich geſetzt wird, ſo erhält man

$$dp = - dZ - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cdot \frac{qds\, coſ\, \vartheta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ffds}{zz} + u \cdot \frac{2qdq}{bb} - vd \cdot \frac{f^4}{r^4}.$$

Dieſer Ausdruck ſo integrirt, daß t, u, v als beſtändige Gröſſen betrachtet werden, giebt

$$p = C - Z - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \int \frac{qds\, coſ\, \vartheta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ffds}{zz} + \frac{uqq}{bb} - v \cdot \frac{f^4}{r^4}.$$

Für die höchſte Fläche bey E ſey $q = c$, $zz = ee$, und $Z = a$; ſo muß

muß bey dieſer Vorausſetzungen $p = k$ ſeyn, wenn k die dem Druck der Atmoſphäre zugehörige Höhe iſt. Nimmt man nun die Integrale $\int \frac{qds\, coſ\vartheta}{b}$ und $\int \frac{ffds}{zz}$ ſo, daß ſie für $s = 0$ verſchwinden; ſo wird $C = k + a - \frac{ucc}{bb} + v \cdot \frac{f^4}{e^4}$, und $p = k + a - Z$ $+ u \cdot \frac{qq - cc}{bb} - v\left(\frac{f^4}{z^4} - \frac{f^4}{e^4}\right) - \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ $\int \frac{qds\, coſ\vartheta}{b} - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ffds}{zz}$.

466 §.

Wenn für eine gegebene Zeit t die Umlaufsgeſchwindigkeit der Röhre bekannt iſt, die relative Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden, womit es durch die Oefnung F ausläuft.

Aufl. In dem unterſten Querſchnitt der Röhre F leidet das Waſſer ebenfalls den Druck der Atmoſphäre, ſo daß daſelbſt $p = k$ iſt. Zugleich wird $q = b$, $zz = ff$, $Z = 0$, und man muß ſtatt s die ganze Länge der Röhre ſetzen. Wenn nun in eben dieſen Fall $\int ffqds\, coſ\vartheta = N$, und $\int \frac{ds}{zz} = L$ wird, ſo hat man $\int \frac{qds\, coſ\vartheta}{b} = \frac{N}{bff}$, und $0 =$ $a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) - \frac{N}{bff}$ $\cdot \frac{du}{dt\sqrt{u}} - Lff \cdot \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$. Aus dieſer Gleichung

chung läſt ſich v durch die Integration finden, wenn u durch eine Function von t gegeben iſt.

Man muß aber dabey vor allen Dingen unterſcheiden, ob die Röhre nach und nach ausläuft, oder ob ſie durch neuen Zufluß beſtändig voll erhalten wird. Im erſten Fall iſt nicht allein die Höhe a und der höchſte Querſchnitt zz veränderlich, ſondern auch die Integrale N und L, ſo daß die völlige Auflöſung der Gleichung in dieſem Fall groſſe Schwierigkeiten hat. Im zweyten Fall ſind die erwehnten Gröſſen insgeſammt unveränderlich, und die völlige Auflöſung der Gleichung hat weniger Schwierigkeit. Es können in eben dieſem Fall beyde Bewegungen einmahl gleichförmig werden, ſo daß $dv = 0 = du$ wird. Alsdenn erhält man $0 = a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right)$, alſo $v = \frac{a + u(1-(cc:bb))}{1-(f^4:e^4)}$. Und wenn ff in Vergleichung mit ee ſehr klein iſt, ſo hat man beynahe $v = a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)$.

467 §.

Wenn man annimt, daß die Welle AC vermittelſt eines daran befindlichen Rades, oder Getriebes, eine damit verbundene Maſchine in Bewegung ſetzt, ſo wird die Umdrehungsbewegung ſich bald der Gleichförmigkeit nähern. Geſetzt alſo, es wäre alsdann, wenn die Umdrehungsbewegung anfängt gleichförmig zu werden, die Bewegung des durch die Oeffnung F ausſtrömenden Waſſers noch nicht gleichförmig; ſo kan man ſuchen, nach welchem Geſetz ſie ſich

von dieſem Augenblick an ferner ändern werde. In ſolcher Abſicht ſetze man, es ſey nach verfloſſener Zeit ϑ die Geſchwindigkeit $\sqrt{u}$ unveränderlich geweſen, daß alſo von nun an $du = 0$ iſt, und in dem Augenblick, da dies erfolgt, ſey $v = k$, ſo hat man für die fernere Bewegung die Gleichung

$$0 = a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) - v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right)$$

$- Lff.\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$. Kürze halber ſetze man $a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) = h$, und $1 - \frac{f^4}{e^4} = n$, ſo hat man $h - nv = Lff.\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$, alſo $dt = \frac{Lff.dv}{(h-nv)\sqrt{v}}$. Man ſetze ferner $\sqrt{v} = z$, ſo iſt $\frac{dv}{\sqrt{v}} = 2dz$, alſo $dt = \frac{2Lffdz}{h - nzz}$. Nun ſey

1.) $f^2 = e^2$, alſo $n = 0$, folglich $dt = \frac{2Lffdz}{h}$;

ſo wird $t = C + \frac{2Lffz}{h} = C + \frac{2Lff}{h}\sqrt{v}$. Dies giebt $\sqrt{v} = \frac{ht - hC}{2Lff}$, da dann $C = \vartheta - \frac{2Lff\sqrt{k}}{h}$ iſt, weil $v = k$ wird, für $t = \vartheta$. Alſo iſt $\sqrt{v} = \frac{h(t-\vartheta)}{2Lff} + \sqrt{k}$. In dieſem Fall alſo wird die Bewegung nie gleichförmig, weil $\sqrt{v}$ mit t ohne Aufhören wächſt. Es ſey

2)

2.) $f^2 > e^2$, ſo iſt n negativ, und man hat $dt = \frac{2Lffdz}{h + nzz} = \frac{2Lff}{h} \cdot \frac{dz}{1 + nzz : h} = \frac{2Lff}{h} \cdot \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(\sqrt{n} : \sqrt{h})dz}{1 + (n : h)zz}$, folglich $t = C + \frac{2Lff}{\sqrt{nh}} \text{A tang} \frac{z\sqrt{n}}{\sqrt{h}}$. Für $t = \vartheta$ iſt $z = \sqrt{k}$, alſo $C = \vartheta - \frac{2Lff}{\sqrt{nh}} \text{A tang} \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{h}}$, und $t = \vartheta + \frac{2Lff}{\sqrt{nh}} \left(\text{A tang} \frac{z\sqrt{n}}{\sqrt{h}} - \text{A tang} \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{h}}\right)$. Dies giebt $\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lff} = \text{A tang} \frac{z\sqrt{n}}{\sqrt{h}} - \text{A tang} \frac{\sqrt{n.k}}{\sqrt{h}}$. Man ſetze $\text{A tang} \frac{z\sqrt{n}}{\sqrt{h}} = \varphi$, und $\text{A tang} \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{h}} = \alpha$, ſo hat man $\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lff} = \varphi - \alpha$. Iſt nun dieſer Bogen $= \psi$, ſo iſt $\text{tang}\,\psi = \frac{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\varphi\ \text{tang}\,\alpha}$. Es wird aber $\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\alpha = \frac{z\sqrt{n} - \sqrt{nk}}{\sqrt{h}}$, und $1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\alpha = \frac{h + nz\sqrt{k}}{h}$, folglich $\text{tang}\,\psi = \frac{(z\sqrt{n} - \sqrt{nk})\sqrt{h}}{h + nz\sqrt{k}}$, oder

$$\text{tang}\,\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lff} = \frac{(z\sqrt{n}-\sqrt{nk})\sqrt{h}}{h+nz\sqrt{k}}.$$

Dies giebt

$$h\,\text{tang}\,\frac{(1-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lff} + nz\sqrt{k}\,.\,\text{tang}\,\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lff}$$

$= z\sqrt{nh} - \sqrt{nhk}$, folglich

$$z = \left(\sqrt{nhk} - h\,\text{tang}\,\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lft}\right) :$$

$$\left(n\sqrt{k}\,.\,\text{tang}\,\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2Lff} - \sqrt{nh}\right).$$

Dieſer Ausdruck giebt für z negative Werthe, ſo lange als die Zeit t nicht beträchtlich gröſſer iſt, als ϑ; welches ein Beweis iſt, daß dieſer Fall in der Ausübung gar nicht ſtatt haben könne, denn $z = \sqrt{v}$ kan nicht negativ ſeyn. Wenn nun

3.) $f^2 < e^2$, alſo n poſitiv iſt, ſo hat man $dt =$

$$\frac{2Lffdz}{h-nzz} = \frac{2Lff}{\sqrt{nh}}\,.\,\frac{(\sqrt{n}:\sqrt{h})dz}{1-(n:h)zz},$$

folglich wird

$$t = C + \frac{Lff}{\sqrt{nh}}\, l\, \frac{1+(\sqrt{n}:\sqrt{h})z}{1-(\sqrt{n}:\sqrt{h})z} \text{ (319 §. Mech.)}$$

$$= C + \frac{Lff}{\sqrt{nh}}\,.\,l\,\frac{\sqrt{h}+z\sqrt{n}}{\sqrt{h}-z\sqrt{n}}.$$ Für $t = \vartheta$

hat man $z = \sqrt{k}$, alſo

$$C = \vartheta - \frac{Lff}{\sqrt{nh}}\, l\, \frac{\sqrt{h}+\sqrt{nk}}{\sqrt{h}-\sqrt{nk}},$$ folglich

$$t = \vartheta + \frac{Lff}{\sqrt{nh}}\, l\, \frac{(\sqrt{h}+z\sqrt{n})(\sqrt{h}-\sqrt{nk})}{(\sqrt{h}-z\sqrt{n})(\sqrt{h}+\sqrt{nk})}.$$

Daraus folgt

$$\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{2\,\mathrm{L}ff} = l\,\frac{(\sqrt{h}+z\sqrt{n})(\sqrt{h}-\sqrt{nk})}{(\sqrt{h}-z\sqrt{n})(\sqrt{h}+\sqrt{nk})}.$$

Es ſey $\frac{(t-\vartheta)\sqrt{nh}}{\mathrm{L}ff} = \mathrm{T}$, ſo erhält man ferner

$$\alpha^{\mathrm{T}} = \frac{h-\sqrt{nhk}+(\sqrt{nh}-n\sqrt{k})z}{h+\sqrt{nhk}-(\sqrt{nh}+n\sqrt{k})z},$$ wenn

α die baſis der natürlichen Logarithmen iſt. Dieſer Ausdruck ergiebt, daß z wachſen müſſe, wenn t wächſt, daß aber z nur bis auf eine gewiſſe Grenze wachſe, wenn gleich t über alle Grenzen wächſt. Wenn nemlich $t=\infty$ iſt, ſo iſt auch $\alpha^{\mathrm{T}}=\infty$, und es muß $(\sqrt{nh}+n\sqrt{k})z = h+\sqrt{nhk}$ ſeyn, folglich $z = \frac{h+\sqrt{nhk}}{\sqrt{nh}+n\sqrt{k}}$. Es iſt aber $h+\sqrt{nhk} = (\sqrt{nh}+n\sqrt{k}) \times \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{n}}$, alſo wird $z=\sqrt{\frac{h}{n}}=\sqrt{v}$, wie dem 466 §. gemäß iſt. Im völlig ſcharfen Verſtande wird alſo auch in dieſem Fall die Bewegung des durch die Oefnung F auslaufenden Waſſers nie gleichförmig, welches mit demjenigen ſehr wohl übereinkömt, was im 183 §. von der Bewegung des Waſſers aus ruhig ſtehenden Gefäſſen bewieſen iſt. Indeſſen nähert ſich doch $\sqrt{v}$ der Grenze $\sqrt{\frac{h}{n}}$ ſo ſchnell, daß dieſe Geſchwindigkeit nach Verflieſſung weniger Secunden als unveränderlich angeſehen werden kan: es wird nemlich α^{T} ſchon eine ſehr groſſe Zahl, wenn $t-\vartheta$ nur wenige Secunden groß iſt.

468 §.

Wenn die Röhre durchaus einerley Weite hat, und dieſe $= ee$ iſt, ſo hat man $L = \int \frac{ds}{ee} = \frac{s}{ee}$, da dann ſtatt s die ganze Länge der Röhre zu ſetzen iſt. Dieſe ſey $= l$, ſo hat man $L = \frac{l}{ee}$. Weil nun $ee > ff$ ſeyn muß, ſo ſey $ee = \lambda ff$ alſo $\lambda > 1$, und man hat $L = \frac{l}{\lambda ff}$, folglich $Lff = \frac{l}{\lambda}$, und $T = \frac{(t-\vartheta)\lambda\sqrt{nh}}{l}$, oder $T = \frac{(t-\vartheta)\sqrt{(\lambda\lambda-1)h}}{l}$, weil $n = 1 - \frac{1}{\lambda\lambda}$ iſt. Je gröſſer alſo λ iſt, deſto gröſſer iſt auch n, und deſto ſchneller wird ſich die Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ ihrer Grenze $\sqrt{\frac{h}{n}} = \sqrt{\frac{a+u(1-cc:bb)}{1-(1:\lambda^2)}}$ nähern. Um einigermaſſen eine Probe zu haben, wie ſchnell dieſe Näherung erfolge, nehme man an, die Oefnung F werde, indem die Maſchine in vollem Umlauf iſt, auf einige Augenblicke verſtopft, ſo daß dem Waſſer ſeine relative Bewegung entzogen wird: oder es werde auch der Maſchine auf eine Art die Umlaufsgeſchwindigkeit $\frac{\sqrt{u}}{b}$ mitgetheilt, womit ſie nachher gleichförmig fortläuft. Wird nun dem Waſſer der Ausgang durch die Oefnung F verſtatet, und man will wiſſen, wie für die folgende Zeit t, nun $\sqrt{v}$ von t abhängt, ſo findet die herausgebrachte Gleichung

ihre Anwendung, wenn man $\vartheta = 0$ und $k = 0$ ſetzt. Dies giebt $T = \frac{t\surd nh}{Lff} = \frac{t\surd(\lambda^2 - 1)h}{l}$, und

$$\alpha^T = \frac{h + z\surd nh}{h - z\surd nh} = \left(\frac{\surd h}{\surd n} + z\right) : \left(\frac{\surd h}{\surd n} - z\right).$$

Man ſuche, wie viele Zeit verflieſſen muß, bevor $z = \left(1 - \frac{1}{100}\right)\surd\frac{h}{n}$ wird, und ſetze in ſolcher Abſicht $z = \frac{99}{100}\surd\frac{h}{n}$, ſo wird $\alpha^T = \frac{1 + \frac{99}{100}}{1 - \frac{99}{100}}$, oder $\alpha^T = 199$. Braucht man nun die Briggiſchen Logarithmen, ſo erhält man $\frac{t\surd(\lambda^2 - 1)h}{l} = \frac{log. 199}{log. \alpha}$, und $t = \frac{l}{\surd(\lambda^2 - 1)h} \cdot \frac{log. 199}{log. \alpha}$, da dann $2t\surd g$ ſtatt t geſchrieben werden muß, wenn man die Zeit in Secunden verlangt (177 §. Mech.). Iſt nun die Röhre grade und vertical, jedoch unten ſo gebogen, daß das Waſſer nicht vertical herab fallen kan, ſo hat man $b = c$, alſo $l = a = h$, und $t = \frac{log. 199}{log. \alpha} \cdot \frac{\surd a}{2\surd(\lambda^2 - 1)g}$. Es iſt aber $l\, 199 = 2{,}2988531$ und $log. \alpha = 0{,}4342944$ (163 §. A. R.) alſo $t = 5{,}29331 \times \frac{\surd a}{2\surd(\lambda^2 - 1)g}$. Wäre nun $a = g$ alſo etwa $a = 15\frac{1}{2}$ Fuß, und $\lambda = 3$, ſo wäre $t = 5{,}29331 : 2\surd 8$, folglich nicht eine volle Secunde. Es iſt aber für λ nur eine ziemlich kleine Zahl angenommen, und man würde t noch kleiner gefunden haben, wenn λ gröſſer angenommen wäre.

Der XXXV. Abſchnitt.

Vom Segneriſchen Waſſerrade nach den verbeſſerten Vorſchlägen des Hrn. Euler.

469 §.

3 Fig. Die bisherige Rechnung über die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer aus dem um die Axe AC umlaufenden Gefäß EF ausläuft, und über die daher entſtehende Zurückwürkung des Waſſers, ſetzt voraus, daß die Röhre EF durch beſtändigen Zufluß des Waſſers allemahl voll erhalten werde. Eben dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß die höchſte Fläche E des Waſſers nicht allein mit der Geſchwindigkeit $\frac{ff\sqrt{v}}{ee}$ nach der Richtung der Röhre, ſondern auch zugleich mit der Geſchwindigkeit $\frac{c\sqrt{u}}{b}$ um die Axe AC umlaufe, alſo mit der wahren Geſchwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{f^4v}{e^4}+\frac{ccu}{bb}\right)}$, wenn dir oberſte Richtung der Röhre vertical, alſo $\vartheta = 90°$ iſt, (417 §.) wie von nun an vorausgeſetzt werden ſoll. In eben dieſem Fall iſt die Richtung dieſer Geſchwindigkeit gegen die Verticallinie unter einem Winkel geneigt, deſſen Tangente $= \frac{c\sqrt{u}}{b} : \frac{f^2\sqrt{v}}{e^2}$

=

$= \frac{cee\sqrt{u}}{bff\sqrt{v}}$, alſo gegen die Horizontallinie unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}}$. Soll demnach das Waſſer der Röhre EF aus einem oberhalb derſelben befindlichen Behälter zugeführet werden, ſo muß die Oberfläche des Waſſers in dieſem Behälter über die Fläche E um eine Höhe $= \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{b}$ erhaben ſeyn, und in die Röhre EF nach einer Richtung geleitet werden, die gegen die Fläche E, welche horizontal angenommen wird, unter einem Winkel geneigt iſt, deſſen Tangente $= \frac{bff\sqrt{v}}{cee\sqrt{u}}$.

470 §.

Man ſiehet aber wohl, daß ſich die Einrichtung mit einer einzigen Röhre, wie EF iſt, ſo nicht werde machen laſſen, wie dieſe Bedingungen vorausſetzen. Der Waſſerbehälter, aus welchem das Waſſer der Röhre EF zuflieſt, muß ruhig ſtehen, alſo kann die beſtändig umlaufende Röhre nicht alles Waſſer auffangen, was man ihr etwa vermittelſt einer Röhre oder Rinne zuführen würde. Dieſer Schwierigkeit kan man dadurch abhelfen, daß man eine beträchtliche Anzahl ſolcher Röhren um eben die Axe AC anordnet, und ihre obern Mündungen E ſo mit einander vereinbaret, daß ſie nur eine einzige ringförmige Hölung ausmachen. Was bisher von einer ſolchen Röhre iſt berechnet worden, läſt ſich leicht auf mehrere anwenden, die auf ſolche Art mit einander ver-

bunden werden, fals ſie alle einander gleich und ähnlich, auch alle auf einerley Art mit der Axe AC verbunden ſind. Man darf alsdenn nur durch *ff* die Summe aller untern, und durch *ee* die Summe aller obern Oefnungen verſtehen. Weil mehrere dergleichen Röhren beym etwas ſchnellen Umlauf einen beträchttichen Widerſtand der Luft würden überwinden müſſen, ſo iſt es rathſam alle dieſe Röhren etwa ſo wie es die beygefügte 4 Fig. vorſtellt, in ein Behältniß einzuſchlieſſen, das ohngefehr die Geſtalt einer Klocke, oder einer ſo genannten Trommel hat, und mit einer glatten wohl verbundenen Fläche umgeben iſt, ſo daß alle horizontale Querſchnitte davon Kreiſe ſind. Man kan auch den Röhren EF, *ef*, *ef*, im Gefäß die Einrichtung geben, daß ſie ſich oben insgeſammt in eine einzige ringförmige Oefnung E*ee*G vereinbahren. Dieſe Einrichtung wird nun ſtatt eines ſonſt gewöhnlichen horizontalen Waſſer-Rades dienen, wenn ſie mit der Welle AC vermittelſt einiger Querhölzer verbunden wird. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß das Waſſer durch die untern Oefnungen F nach horizontaler Richtung ausſtrömen muß, die zugleich auf den Halbmeſſer CF des Kreiſes ſenkrecht iſt, worin die untere Oefnung umläuft, damit dieſe Richtung allemahl der Richtung der Umlaufsbewegung grade entgegen geſetzt ſey.

471 §.

Um nun das Waſſer gehörig in dieſe Trommel zu leiten, muß oberhalb derſelben ein unbeweglicher Behälter angebracht werden, der ohngefehr eben die Ge-
5 Fig. ſtalt hat. Ihn müſſen zwo cylindriſche Flächen BD und KL einſchlieſſen, damit eine innere Hölung übrig

bleibe, durch welche die Welle AC ſo hindurch geführet werden kan, daß ſie mit dieſer obern Trommel in keiner weitern Verbindung ſtehet. Die untere ringförmige Oefnung des obern Behälters muß über der obern ringförmigen Oefnung der beweglichen Trommel ſo ſtehen, daß das aus der obern herabfallende Waſſer in die bewegliche Trommel ſich ergieſt, und ſie beſtändig voll erhält. Es muß aber das Waſſer aus der obern Trommel in die untere nicht vertical herabfallen, ſondern unter dem vorhin ſchon beſtimmten Winkel. Damit man dies zuwege bringe, muß die untere Oefnung vermittelſt dünner Platten wie HI, *hi* rund um in Fächer vertheilt ſeyn, die gleichſam ſoviele beſondre kleine Canäle abgeben, damit das Waſſer zwiſchen denſelben durchſtröme: da dann dieſe Platten unter dem erforderlichen Winkel gegen den Horizont eingeſetzt werden können. In die obere Trommel IKL wird übrigens das Waſſer auf die gewöhnliche Art vermittelſt einer Rinne geleitet.

472 §.

Dies iſt das weſentliche von der Einrichtung eines Waſſer-Rades, das durch die Kraft der Zurückwürkung des Waſſers getrieben wird. Hr. v. Segner iſt der erſte geweſen, der eine Maſchine von einer ſolchen Einrichtung angegeben hat, welche durch die Zurückwürkung des Waſſers getrieben werden ſollte. Die von ihm anfangs angegebene Einrichtung aber iſt von der hier beſchriebenen noch in einigen Stücken verſchieden. Es ſoll nach ſeiner Vorſchrift nur ein cylindriſches um ſeine Axe bewegliches Gefäß ſeitwärts und nahe am Boden mit einer gewiſſen

wiſſen Anzahl grader und horizontaler Röhren verbunden werden, in welche das Waſſer aus dem Gefäß hineintreten kan. Dieſe Röhren ſoll man an ihrem äuſſern Ende verſchlieſſen: ſeitwärts aber nahe am äuſſern Ende mit einer Oefnung verſehen, und in dieſelbe eine kleine Röhre ſtecken, durch welche das Waſſer nach horizontaler Richtung ausſtrömen kan; und zwar ſo, daß dieſe Richtung zugleich auf der Verticalfläche ſenkrecht iſt, welche durch die Axe der groſſen Röhre gehet. Dies ausſtrömende Waſſer wird alsdenn auf die Röhren zurückwürken, und ſie mit dem cylindriſchen Gefäß zum Umlauf bringen. Ueber dieſe Einrichtung hat Hr. **Euler** anfangs in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin Année 1750. p. 311. genauere Unrerſuchungen angeſtellt. Dieſe Unterſuchungen wiederholt er in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin An. 1754. p. 227. u. f. in gröſſerer Allgemeinheit, und giebt daſelbſt die eben beſchriebene verbeſſerte Einrichtung an. Eben dieſe Einrichtung iſt es auch, welche Hr. Albert **Euler** in der Göttingiſchen Preisſchrift: Enodatio quæſtionis, quomodo vis aquæ cum maximo lucro ad molas circumagendas aliave opera perficienda impendi poſſit? Goett. 1754. weiter auf die Ausübung anzuwenden ſucht. Das folgende wird davon einen nähern Unterricht geben.

473 §.

Alle Abmeſſungen der bisher beſchriebenen Maſchine ſind gegeben, nebſt der Menge Waſſer, welche in jeder Secunde zufließt: man ſoll den Effect finden, den die Maſchine leiſten kan.

Aufl. Wenn durch ff die Summe des Quadrat-Inhalts aller Oefnungen F, durch ee aber der Quadrat-Inhalt des Ringes KBDL verſtanden wird; jede der Oefnungen F aber mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{u}$ umläuft, und die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers der Höhe v zugehört; ſo hat man v aus der Gleichung $v =$

$$\left(a - u\left(\frac{cc}{bb} - 1\right) : \left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right)\right. \text{(466 §.)}$$

und die eigentliche Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers iſt $= 2\sqrt{gv}$ (32 §. Mech.) Es ſey A die Menge Waſſer, welche in jeder Secunde durch die Oefnungen F, f, f, läuft; ſo hat man $A = 2ff\sqrt{gv}$. Es iſt aber das Moment der Zurückwürkung des Waſſers $= 2bffv + 2bff\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)\sqrt{vu}$ gefunden (462 §.); und dies iſt eben ſoviel, als wenn gegen jede Oefnung F das Gewicht einer Waſſerſäule druckte, deren Grundfläche ff, und deren Höhe $=$

$$2\left(v + \left(\frac{cc}{bb} - 1\right)\sqrt{vu}\right)$$ wäre. Man kan demnach die Mitte dieſer Oefnung als den angegriffenen Punct der Maſchine betrachten, ſo wird das Bewegungs-Moment der angebrachten Kraft $=$

$$2ff\left(v + \left(\frac{cc}{bb} - 1\right)\sqrt{vu}\right) \times 2\sqrt{gv} =$$

$$2 . 2ff\sqrt{gv} . \sqrt{vu} + 2 . 2ff\sqrt{gv} . \left(\frac{cc}{bb} - 1\right) . u$$

$$= 2A\left(\sqrt{uv} + \left(\frac{cc}{bb} - 1\right)u\right),$$ und dies Bewegungs

wegungs-Moment iſt dem geſuchten Effect der Maſchine gleich (372 §. Mech.)

In den obigen Formuln iſt a die Höhe der beweglichen Trommel, oder $a = \mathrm{AC}$. Es ſey die Höhe der Waſſerfläche KBDL des obern unbeweglichen Gefäſſes über die obere Fläche EG des Waſſers im untern beweglichen Gefäß $= k$, alſo $\mathrm{AO} = k$; ſo iſt das ganze lebendige Gefälle des Waſſers $\mathrm{OC} = a + k$, wenn man die Einrichtung ſo macht, daß das obere unbewegliche Gefäß das Waſſer unmittelbar aus der Zuleitungs-Rinne auffängt. Damit aber das untere Gefäß in der gehörigen Bewegung erhalten werde, muß $k = \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}$ ſeyn, damit das Waſſer aus dem obern Gefäß in das untere mit der Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gk}$ trete, und dies unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{bff\sqrt{v}}{ee\sqrt{u}}$ (469 §.).

Wenn die Summe aller Oefnungen der kleinen ſchief liegenden Canäle, durch welche das Waſſer aus der obern Trommel in die untere herab fällt, $= ii$ geſetzt wird, ſo fällt in einer Secunde eine Menge $= 2ii\sqrt{gk}$ durch. Weil nun hiedurch der Abgang des Waſſers in der beweglichen Trommel beſtändig erſetzt werden ſoll, ſo muß $2ii\sqrt{gk} = 2ff\sqrt{gv} = \mathrm{A}$ ſeyn, alſo $ii = \frac{\mathrm{A}}{2\sqrt{gk}}$.

474 §.

Die Einrichtung dieſer Maſchine ſo zu machen, daß ihr Effect der möglichſt gröſte ſey.

Aufl.

Aufl. Aus der Gleichung $k = \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb}$ folgt $\frac{f^4 v}{e^4} = k - \frac{ccu}{bb}$. Dieſen Werth ſetze man in die Gleichung

$$v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) = a + \left(1 - \frac{cc}{bb}\right)u;$$

ſo wird $v - k + \frac{ccu}{bb} = a + u - \frac{ccu}{bb}$, oder $v - (a+k) = u - \frac{2ccu}{bb}$. Dies giebt $dv = \left(1 - \frac{2cc}{bb}\right)du$. Nun iſt der Effect der Maſchine $= 2A\left(\sqrt{uv} - \left(1 - \frac{cc}{bb}\right)u\right)$, und dieſer wird am gröſten, wenn

$$d.\sqrt{uv} - d.\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)u = 0$$ iſt (343 §. Mechan.). In ſolcher Abſicht muß

$$d.\sqrt{uv} = d.\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)u$$ ſeyn, alſo $$\frac{dv\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} + \frac{du\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} = \frac{udv + vdu}{2\sqrt{uv}} = \left(1 - \frac{cc}{bb}\right)du.$$

Man ſubſtituire den gefundenen Werth von dv, ſo wird

$$\left(1 - \frac{2cc}{bb}\right).\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 2\left(1 - \frac{cc}{bb}\right),$$

alſo

alſo

$$\left(1-\frac{2cc}{bb}\right)u+v=2\left(1-\frac{cc}{bb}\right)\surd uv,$$

oder

$$v-2\left(1-\frac{cc}{bb}\right)\surd uv+\left(1-\frac{2cc}{bb}\right)u=0.$$

Man addire auf beyden Seiten $\frac{c^4}{b^4}u$, ſo erhält man

$$v-2\left(1-\frac{cc}{bb}\right)\surd uv+\left(1-\frac{cc}{bb}\right)^2u=$$

$\frac{c^4}{b^4}u$, und dies giebt

$$\surd v-\left(1-\frac{cc}{bb}\right)\surd u=\frac{cc}{bb}\surd u,$$ folglich

$\surd v-\surd u=0$, oder $v=u$.

Damit alſo der Effect am gröſten ſey, wird erfordert, daß das Waſſer mit eben der Geſchwindigkeit aus der Oefnung F hervorſpringe, womit dieſe Oefnung nach entgegen geſetzter Richtung um die Axe AC umläuft. Wenn man nun das lebendige Gefälle $a+k=h$ ſetzt, ſo erhält man $u=\frac{bbh}{2cc}=v$; und der Effect der Maſchine wird

$$=2A.\frac{cc}{bb}.\frac{bbh}{2cc}=A.h.$$

Aus der Gleichung $A=2ff\surd gv$ erhält man ferner $A=2ff\surd g.\frac{b\surd h}{c\surd 2}=\frac{bff\surd 2gh}{c}$, alſo wird $ff=\frac{A.c}{b\surd 2gh}$. Dies giebt ferner $f^4v=$

$$\frac{A^2 c^2}{2bbgk} \cdot \frac{bbh}{2cc} = \frac{A^2}{4g}, \text{ alſo } \frac{f^4 v}{e^4} = \frac{A^2}{4ge^4}.$$ Ueberdem iſt

$$\frac{f^4 v}{e^4} = k - \frac{cc}{bb} \cdot u = k - \tfrac{1}{2}h, \text{ folglich}$$

$$k - \tfrac{1}{2}h = \frac{A^2}{4ge^4}, \text{ und } ee = \frac{A}{2\sqrt{g(k-\frac{1}{2}h)}}.$$

Damit dieſer Ausdruck möglich bleibe, muß $k > \frac{1}{2}h$ ſeyn.

Es ſey endlich der Winkel, unter welchem die Canäle hi gegen den Horizont geneigt ſeyn müſſen, $= \eta$, ſo hat man $\tang \eta = \frac{bff}{cee}$. Es iſt aber $\frac{bff}{c}$ $= \frac{A}{\sqrt{2gh}}$, und $ee = \frac{A}{2\sqrt{g(k-\frac{1}{2}h)}}$,

alſo wird $\tang \eta = \frac{\sqrt{(2k-h)}}{\sqrt{h}}$, folglich

$$\sec \eta = \sqrt{\left(1 + \frac{2k-h}{h}\right)} = \sqrt{\frac{2k}{h}}, \text{ und}$$

$$\cos \eta = \sqrt{\frac{h}{2k}}, \ \sin \eta = \sqrt{\left(1 - \frac{h}{2k}\right)} = \sqrt{\frac{2k-h}{2k}}.$$

475 §.

Wenn man bey eben dem Waſſer-Aufwand, und eben dem Gefälle h ein unterſchlächtiges Waſſerrad brauchte; ſo würde der Effect nicht leicht gröſſer, als $\frac{2}{9}A.h$ ſeyn können, und das höchſte wäre

$\frac{8}{27}A.h$

$\frac{8}{27}$ A.h (113 §.). Brauchte man ein oberſchlächtiges Rad, ſo lieſſe ſich wohl, wenn alles gehörig eingerichtet iſt, der Effect $\frac{4}{5}$A.h zuwege bringen. (145 §.) Da nun bey gegenwärtiger Einrichtung der Effect = A.h erhalten werden kan, ſo erhellet, daß unter allen Arten, wie eine Maſchine vermittelſt des Waſſers getrieben werden kan, die gegenwärtige, wenigſtens in der Theorie, die vollkommenſte ſey. Damit aber dieſer völlige Effect erhalten werde, muß die Maſchine eine ſolche Einrichtung haben, daß im Beharrungsſtande die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer aus den untern Oefnungen F hervorſtrömt, grade ſo groß ſey, als die Geſchwindigkeit, womit dieſe Oefnungen in ihrem Kreiſe herum laufen. Weil nun die Richtung dieſer letztern der Richtung jener Geſchwindigkeit grade entgegen geſetzt iſt; ſo muß die wahre Geſchwindigkeit des aus den Oefnungen F hervorſtrömenden Waſſers, nach der horizontalen Richtung genommen, = o ſeyn. Daher wird das Waſſer aus dieſen Oefnungen lothrecht herunter fallen, und es iſt nicht zu beſorgen, daß es an die nachfolgende Röhre anſtoſſen, und dadurch der Umdrehungsbewegung hinderlich fallen werde, wenn die ganze Einrichtung ſo gemacht wird, wie es den im vor. §. gefundenen Gleichungen gemäß iſt.

476 §.

Es waren aber dieſe Gleichungen folgende:

I.) $ff = \frac{Ac}{b\sqrt{2gh}}$,

II.) $ee = \frac{A}{2\sqrt{g(k-\frac{1}{2}h)}}$,

III)

III.) $\cos\eta = \sqrt{\frac{h}{2k}}$,

IV.) $u = v = \frac{bbh}{2cc}$,

V.) $a + k = h$, oder $a = h - k$,

VI.) $ii = \frac{A}{2\sqrt{gk}}$ (473 §.)

und die Vergleichung ergiebt, daß die beyden Gröſſen $\frac{b}{c}$ und k unbeſtimt bleiben, alſo in jedem Fall willkührlich angenommen werden können. Nur muß $k > \frac{1}{2}h$ ſeyn, alſo $a < \frac{1}{2}h$. Man muß aber auch k nicht zu groß nehmen, damit ee nicht zu klein ausfalle, weil ee etliche mahl gröſſer als ff ſeyn muß (467 §.). Man kan ſtatt $\frac{b}{c}$ auch u willkührlich annehmen, welches für die Ausübung bequemer iſt, weil die jedesmalige beſondere Abſicht einer Maſchine bald mehr, bald weniger Geſchwindigkeit erfordert.

Aus der Gleichung $ee = \frac{A}{\sqrt{2g(2k-h)}}$ folgt $\frac{ee\sqrt{(2k-h)}}{\sqrt{2k}} = \frac{A}{2\sqrt{gk}}$. Es iſt aber $\frac{\sqrt{(2k-h)}}{\sqrt{2k}} = \sin\eta$, und $\frac{A}{2\sqrt{gk}} = ii$, alſo wird $ii = ee\sin\eta$. Weil überdem $\cos\eta = \sqrt{\frac{h}{2k}}$,

ſo

ſo wird $ee \tang\eta = \frac{ii}{\cos\eta} = \frac{A}{2\sqrt{gk}} \cdot \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{h}}$,

alſo I.) $ee \tang\eta = \frac{A}{\sqrt{2gh}}$. Setzt man nun

$ee = \lambda ff$, und $ff = \frac{A}{2\sqrt{gu}}$, ſo wird

$2ee\sqrt{gu} = \lambda . A$, und $\sqrt{u} = \frac{\lambda A}{2ee\sqrt{g}} =$

$\frac{\lambda ee \tang\eta \sqrt{2gh}}{2ee\sqrt{g}}$, oder II.) $\sqrt{u} = \frac{1}{2}\lambda \tang\eta \sqrt{2h}$.

Statt deſſen alſo, daß k und u willkührlich angenommen werden, kan man den Winkel η, und das Verhältniß $\frac{ee}{ff} = \lambda$ willkührlich annehmen, dadurch wird u und ee, alſo auch ff, ii und k beſtimt. Hiebey aber iſt zu bemerken, daß η nothwendig kleiner als 45° genommen werden müſſe. Denn es wird $k = \frac{f^4 u}{e^4} + \frac{cc}{bb} u$, und $\frac{ccu}{bb} = \frac{1}{2} h$, (474 §.) $\frac{f^4 u}{e^4} = \frac{u}{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} h \tang\eta^2$, alſo $k = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h \tang\eta^2$. Aber k iſt nothwendig kleiner als h, folglich muß $\tang\eta < 1$, und $\eta < 45°$ ſeyn.

Will man demnach η und λ willkührlich annehmen, ſo hat man für die vollkommenſte Einrichtung der Maſchine folgende Gleichungen:

I.) $ee = \frac{A}{\tang\eta \sqrt{2gh}}$,

II.) $ii = ee \sin\eta$,

III.) $ff = \frac{ee}{\lambda}$,

IV.) $\sqrt{u} = \frac{1}{2}\lambda \tang\eta \sqrt{2h}$,

V.) $a = \frac{1}{2}h(1 - \tang\eta^2)$,

VI.) $\frac{bb}{cc} = \frac{2u}{h} = \lambda\lambda \tang\eta^2$,

da dann noch b oder c willkührlich bleibt. Setzt man demnach $cc = \mu ee = \frac{\mu A}{\tang\eta\sqrt{2gh}}$, ſo wird $bb = \frac{\lambda\lambda\mu A \tang\eta}{\sqrt{2gh}}$.

477 §.

Wenn dieſe Anordnung der Maſchine beobachtet wird, ſo iſt die Höhe, welche der Geſchwindigkeit jeder der Oefnungen E, oder des Ringes EeeG zugehört, $= \frac{ccu}{b} = \frac{1}{2}h$, alſo die Geſchwindigkeit ſelbſt $= 2\sqrt{\frac{1}{2}gh} = \sqrt{2gh}$. Iſt nun ϑ die Umlaufszeit der Maſchine, ſo durchläuft jede Oefnung E mit der erwehnten Geſchwindigkeit in der Zeit ϑ den Weg $2\pi c$, folglich wird $\vartheta = \frac{2\pi c}{\sqrt{2gh}}$, und die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Trommel $= \frac{\sqrt{2gh}}{c}$.

Je kleiner alſo c iſt, deſto ſchneller iſt der Umlauf, und je gröſſer c iſt, deſto langſamer wird der Umlauf. Deswegen läſt ſich die Maſchine jedesmahl ſo anordnen, wie es der Abſicht gemäß iſt, wozu ſie dienen ſoll, indem bald eine gröſſere, bald eine kleinere Umlaufs-

laufs-Geſchwindigkeit nach der jedesmaligen beſondern Abſicht erfordert wird. Wäre demnach ϑ gegeben, ſo müſte man $c = \frac{\vartheta\sqrt{2gh}}{2\pi}$ nehmen, und hiedurch wäre c beſtimmt. Wollte man nun der untern Trommel die Geſtalt eines Cylinders geben, ſo müſte $b = c$ ſeyn. Hieraus würde $\frac{b}{c} = 1 = \lambda \operatorname{tg}\eta$ folgen, und $\operatorname{tang}\eta = \frac{1}{\lambda}$. Wäre nun $\lambda = 3$, ſo wäre $\operatorname{tang}\eta = \frac{1}{3}$, alſo $\eta = 18^\circ 26'$. Es hat aber ſeine Vortheile, wenn der Winkel η noch etwas gröſſer genommen werden kan, weil alsdenn durch die erforderlichen Zwiſchen-Abtheilungen des Ringes KBDL der Raum deſſelben nicht ſo ſehr vermindert wird, und das Waſſer einen freyern Durchgang behält. Um dieſe Abſicht zu erreichen, iſt es beſſer, $\operatorname{tang}\eta = \frac{1}{2}$, zu ſetzen, ſo wird $\eta = 26^\circ 34'$. Bleibt nun $\lambda = 3$, ſo hat man folgende Beſtimmungen:

I.) $ee = \frac{2A}{\sqrt{2gh}}$,

II.) $ii = \frac{ee}{\sqrt{5}}$,

III.) $ff = \frac{1}{3}ee$,

IV.) $\sqrt{u} = \frac{3}{4}\sqrt{2h}$,

V.) $a = \frac{3}{8}h$,

VI.) $b = \frac{1}{2}c$,

und es kan c willkührlich angenommen werden.

478 §.

Bey dieſer willkührlichen Beſtimmung aber iſt man noch an folgenden Umſtand gebunden. Es muß der Ring *ee* nicht zu ſchmal ſeyn, er muß aber auch nicht zu ſtarke Breite haben. Die Breite kan nicht füglich weniger, als einen Zoll betragen; ſie muß aber auch nicht leicht gröſſer als 3 Zoll ſeyn, weil ſonſt der Unterſcheid der Schwungkräfte des Waſſers zu beträchtlich wird, die in obiger Rechnung alle gleich groß angenommen ſind. Es ſey die halbe Breite dieſes Ringes $= \frac{1}{n}c$, ſo iſt der Halbmeſſer des innern Kreiſes $= c - \frac{1}{n}c$, und des äuſſeren $= c + \frac{1}{n}c$, alſo der Inhalt des Ringes $=$

$$\pi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)cc = \frac{4\pi}{n}cc.$$

Demnach muß $\frac{4\pi}{n}cc = ee$ ſeyn, und dies giebt $n = \frac{4\pi cc}{ee}$. Aber bey wenigem Waſſer und hohem Gefälle, giebt die erſte Gleichung *ee* ziemlich klein. Wäre nun überdem *c* von etwas beträchtlicher Gröſſe, ſo würde *n* ſehr groß, folglich die Breite des Ringes ſehr klein heraus kommen. Deswegen iſt man

genöthiget c ſo zu nehmen, daß $\frac{2}{n} c = \frac{ee}{2\pi c}$ zwiſchen den Grenzen von 1 bis 3 Zoll falle. In Fällen, wo dies den Werth von c ſehr klein geben würde, iſt man ſchlechthin genöthiget, den Winkel $\eta < 18° 26'$ zu nehmen.

479 §.

Da übrigens die im 477 §. gefundene Formuln ſehr einfach ſind, ſo läſt ſich die Anwendung davon auf beſondre Fälle, wenn A und h gegeben ſind, ſehr leicht machen. Die Umlaufszeit der Maſchine iſt $= \frac{2\pi c}{\sqrt{2gh}}$. Um alſo die Anwendung auf beſondre Fälle noch mehr zu erleichtern, hat Herr Euler die Coefficienten $\frac{2}{\sqrt{2gh}}$, und $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$ für zwanzig verſchiedene Fälle in Zahlen berechnet. Er hat nemlich die Werthe $h = 1$ Fuß, $h = 2$ Fuß, u. ſ. f. bis $h = 20$ Fuß nach und nach angenommen, und folgende Reſultate gefunden:

Werthe

Werthe von h	Werthe von $\frac{2}{\sqrt{2gh}}$	Werthe von $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$
1	0,35777	1,12397
2	0,25298	0,79477
3	0,20656	0,64892
4	0,17888	0,56198
5	0,16000	0,50265
6	0,14606	0,45886
7	0,13523	0,42482
8	0,12649	0,39738
9	0,11925	0,37465
10	0,11314	0,35543
11	0,10787	0,33889
12	0,10328	0,32446
13	0,09923	0,31173
14	0,09562	0,30040
15	0,09238	0,29021
16	0,08944	0,28098
17	0,08677	0,27260
18	0,08433	0,26492
19	0,08208	0,25787
20	0,08000	0,25132

Es iſt hiebey $g = 15,625$ Rh. Fuß angenommen, deswegen erhält man ee im Rheinländiſchen Maaß, und es muß auch c in eben dem Maaß ausgedrückt werden, wenn man ϑ berechnen, und die hier berechneten Werthe von $\frac{2\pi}{\sqrt{2gh}}$ brauchen will.

480 §.

Dieſe bisherige Ausführung ergiebt, daß man die bewegliche Trommel als ein ſonſt gewöhnliches Waſſerrad betrachten könne, deſſen Halbmeſſer $= c$ iſt, und an deſſen Umfang eine Kraft $= \frac{Ah}{\sqrt{2gh}} = \frac{A\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}$ im Beharrungsſtande der Maſchine würkt, wenn ſie ſo angeordnet iſt, daß ſie den möglichſt größten Effect zuwege bringt. Schreibt man alſo nun r ſtatt c, ſo laſſen ſich die Formuln des 382 §. Mechan. leicht anwenden, um die völlige Einrichtung der Maſchine zu finden, die durch ein ſolches Waſſerrad getrieben werden ſoll. Es ſey nemlich der Widerſtand, den die Maſchine zu überwinden hat, $= Q$, er ſey in der Entfernung $= q$ von der Axe des letzten Rades angebracht, und ν ſey die Anzahl der Umläufe deſſelben in einer Secunde; ſo hat man $\nu = \frac{Ah}{2\pi qQ}$. Wenn überdem μ die Anzahl der Umläufe des Waſſerrades in einer Secunde iſt, ſo muß $\mu = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi r} = \frac{\sqrt{gh}}{\pi r\sqrt{2}}$ ſeyn, denn es iſt hier $\sqrt{2gh}$ das, was im 382 §. Mech. c war. Es gehören alſo zu einem Umlauf des Waſſerrades $\frac{\nu}{\mu}$ Umläufe des Widerſtandes, und es wird $\frac{\nu}{\mu} = \frac{Ahr}{Qq\sqrt{2gh}}$. Es war aber $\vartheta = \frac{2\pi r}{\sqrt{2gh}}$, alſo iſt $\frac{r}{\sqrt{2gh}} = \frac{\vartheta}{2\pi}$, folglich $\frac{\nu}{\mu} = \frac{Ah.\vartheta}{2\pi Qq}$.

Wenn τ die Umlaufszeit des Widerſtandes iſt, ſo hat man $\nu . \tau = \mu \vartheta$, alſo $\vartheta = \frac{\nu}{\mu} \tau = \frac{A h r \tau}{Q q \sqrt{2 g h}}$. Wenn demnach die Umlaufszeit des Widerſtandes gegeben, und überdem r willkührlich angenommen iſt, ſo giebt dieſe Gleichung die Umlaufszeit des Waſſer-Rades.

481 §.

Die Anwendung dieſer Formuln auf beſondre Arten von Maſchinen hat nun weiter nicht die geringſte Schwierigkeit, und man findet in der oben angeführten Euleriſchen Preisſchrift die Berechnungen verſchiedener ſpecieller Fälle in der Anwendung auf die Kornmühlen. Wollte man indeſſen davon einen würklichen Gebrauch in der Ausübnng machen, ſo würde *man* dabey noch folgende Puncte in Erwegung ziehen müſſen. Einmahl hat Hr. Albert Euler nicht auf den Umſtand geſehen, daß die Winkel η nicht zu klein ausfallen müſſen, wie denn gleich in ſeinem erſten Exempel im 93 und 94 §. $\eta = 3^\circ 40'$ herauskomt. Fürs zweyte ſcheint auch der Umſtand nicht in Betracht gezogen zu ſeyn, daß die Summe der untern Oefnungen des obern Gefäſſes kleiner ſeyn muß, als die Summe der obern Oefnungen der untern beweglichen Trommel, da doch vermöge obiger Rechnung $ii = ee \sin \eta$ ſeyn muß. Fürs dritte bringt Hr. Alb. Euler den Widerſtand des Mühlſteins bey einer Kornmühle nur ſehr geringe in Anſchlag. Er nimmt nemlich an, das Moment dieſes Widerſtandes ſey ſo groß, daß das Gewicht eines halben Cubicfuſſes-Waſſer in der Ent-

fernung 1 Fuſſes von der Axe demſelben das Gleichgewicht halte.

Was dieſen letzten Umſtand insbeſondere betrift, ſo wird es nicht undienlich ſeyn, ihn mit der oben vorgetragenen durch die Erfahrung beſtätigten Belidorſchen Theorie zu vergleichen. Es ſey nemlich M das Gewicht des Läufers mit dem daran befindlichen Mühleiſen, und was ſonſt noch daran hängt, und ſein Halbmeſſer ſey ϱ, ſo iſt das Moment des Widerſtandes, ſo die Mühle zu überwinden hat, $= \frac{2}{3}\varrho \cdot \frac{1}{35}M$. Soll nun dies nur dem Gewicht eines halben Cubic-Fuſſes Waſſer gleich ſeyn, ſo hat man $\frac{2}{105}M\varrho = 32$ Pf. Iſt nun $\varrho = 2\frac{1}{2}$ Fuß, welches bey Waſſermühlen gewöhnlich iſt; ſo wird $\frac{5}{105}M = 32$ Pf., alſo $M = 21 \times 32 = 672$ Pf. Dies wäre aber etwa ein Läufer für eine Handmühle, die zwey Perſonen treiben können. Sollte ϱ nur 2 Fuß ſeyn, ſo erhielte man $M = \frac{105}{4} 32$ Pf. $= 840$ Pf., welches ebenfals ſehr wenig iſt. Eine Mühle mit einem unterſchlächtigen Rade kan einen Läufer führen, der mit dem Mühleiſen und Trilling zuſammen 4348 Pf. ſchwer iſt, (421 §. Mech.), wenn er 6 Fuß im Durchmeſſer hält, und das Moment des Widerſtandes iſt alsdenn ſo groß, daß ein Gewicht von 125 Pf. in der Entfernung zweyer Füſſe von der Axe demſelben das Gleichgewicht hielte; alſo auch ein Gewicht von 250 Pf. in der Entfernung eines Fuſſes, und dies wäre das Gewicht von ohngefehr 4 Cubic-Fuß Waſſer, welches achtmahl gröſſer iſt, als es Hr. Euler angenommen hat. Wenn derſelbe alſo im 104 §. aus ſeinen Rechnungen ſchlieſt, daß jede der fünf von ihm berechneten Mühlen zwey Läufer treiben könne; ſo muß ich billig

zwei-

zweifeln, ob die Läufer von gewöhnlicher Gröſſe ſeyn können, ſo wie ſie in Waſſermühlen ſonſt angetroffen werden. Wenn man z. E. bey ein Cubic-Fuß Waſſer-Aufwand und 12 Fuß Gefälle eine Mühle ſo, wie es im 93 und 94 §. a. a. O. vorgeſchrieben iſt, bauen und derſelben zwey Läufer, jeden zu 4348 Pf. zu führen geben wollte, ſo dürften ſie ſchwerlich in einer Secunde zweymahl umlaufen; wie denn auch in der That eine ſo groſſe Geſchwindigkeit mehr ſchädlich als nützlich ſeyn würde. Bey halb ſo groſſer Geſchwindigkeit könnten die Läufer an 1200 Pf. ſchwer ſeyn, wenn ſie 5 Fuß im Durchmeſſer hätten. Weil man aber mit einem doppelt ſo ſchweren Läufer eben das ausrichten könnte; ſo würde es doch immer beſſer ſeyn, nur einen ohngefehr 2400 Pf. ſchweren Läufer zu brauchen.

482 §.

Dieſe Einrichtung könnte nemlich ſtatt des im VI Abſchnitt beſchriebenen horizontalen Waſſerrades gebraucht werden, und in der Vorausſetzung, daß $A = 1$ Cub. F., und $h = 12$ F. ſey, laſſen ſich die Abmeſſungen der Mühle ſo berechnen.

Man ſuche zuforderſt den Werth von $ee =$

$$A \times \frac{2}{\sqrt{2gh}} = 0{,}10328$$ Quadr. Fuß, oder $ee =$ 14,87232 Qu. Zoll, und verſuche nun die Vorausſetzung $c = 1$ Fuß $= 12$ Zoll. Dieſe giebt $2\pi c =$

$$6{,}28 \times 12 = 75$$ Zoll, alſo wird $\frac{ee}{2\pi c}$ ſehr viel kleiner als 1 Zoll, und die Vorausſetzung kan nicht beſtehen. Weil nun ohngefehr $2\pi c = 15$ werden

muß, ſo ſiehet man wohl, daß c nicht viel über 2 Z. groß ſeyn könnte, welches ganz und gar nicht thunlich iſt. Dies wäre alſo der Fall des 478 §., wo man ſchlechthin genöthiget iſt, tang $\eta < \frac{1}{2}$ zu nehmen. Man ſuche demnach, wie groß tang η ſeyn muß, wenn $c = 1$ Fuß iſt. Dieſe Vorausſetzung giebt $ee = \frac{4\pi cc}{n}$ $= \frac{4\pi}{n}$, und $n = 24$, wenn der Ring EG einen Zoll breit ſeyn ſoll. Alſo wird $ee = \frac{12,56}{24} =$ 0,523333 Qu. F. $= 75\frac{1}{5}$ Qu. Zoll, und man erhält tang $\eta = \frac{A}{ee\sqrt{2gh}} = \frac{1}{0,523333}$ $\times 0,05164 = \frac{51640}{523333}$ beynahe $= \frac{1}{10}$, und $\eta = 5° 42'$. Es kan alſo $c = 1$ Fuß ſeyn, wenn $\eta = 5° 42'$ iſt, und daraus folgt $ii = 0,052333$ Qu. F., $= 7\frac{1}{2}$ Qu. Zoll, weil auch beynahe ſin η $= \frac{1}{10}$ iſt. Man hat ferner $\frac{bb}{cc} = \lambda\lambda \text{tang}\,\eta^2$, und man muß nicht $b < c$ nehmen. Demnach ſey $b = c$, ſo wird $\lambda = 10$, alſo $ff = ii = 7\frac{1}{2}$ Q. Zoll, und $a = \frac{99}{100} 6 = 5$ Fuß $11\frac{1}{4}$ Zoll, $k = 6$ Fuß $\frac{3}{4}$ Z. Ueberdem wird $\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{2gh}} = 0,32446''$ beynahe $\frac{1}{3}$ Secunde, aber für den Läufer einer Kornmühle iſt dieſer Umlauf zu ſchnell. Deswegen kan man ihn nicht mit dem Waſſerrade an einerley Axe anbringen. Die Umlaufszeit des Läufers muß nicht

kleiner

kleiner als eine Secunde ſeyn. Setzt man alſo $\tau = 1$ Sec., ſo wird

$$\frac{v}{\mu} = \frac{1}{3} = \frac{Ah}{Qq} \times \frac{1}{\sqrt{2gh}} = \frac{Ah}{Qq} \times 0{,}05164,$$

folglich $Qq = 12 \times 0{,}15492 = 1{,}85904$. Nun ſey M das Gewicht des Läufers nebſt dem Mühleiſen und daran befindlichen Trilling, und ſein Halbmeſſer ſey $2\frac{1}{2}$ Fuß, ſo wird $\frac{1}{33}$ M. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = 1{,}85904 \times 64$ Pf. oder $\frac{1}{21}$ M $= 119$ Pf., alſo M $= 119 \times 21 = 2499$ Pf. Rechnet man demnach für das Gewicht des Mühleiſens und deſſen Zubehör, auch wegen der Friction, die hier Kürze halber nicht mit in Betrachtung gezogen iſt, etwa 300 Pf. ab, ſo bleiben für das Gewicht des Läufers, den die Mühle führen kan, 2200 Pf. übrig. Weil nun der Läufer mit ſeiner Welle hier langſamer, als das Waſſerrad mit ſeiner Welle laufen muß, ſo kan man an der Axe des letztern einen Trilling etwa oben bey Q anbringen, der in ein Sternrad greift, welches ſtatt des ſonſt gewöhnlichen Trillings am Mühleiſen befindlich iſt, da dann das Sternrad dreymahl ſoviel Zähne haben muß, als das Getriebe Stecken hat.

483 §.

Ob es übrigens rathſam ſey, bey dem angenommenen Waſſer-Aufwand und Gefälle eine Mühle von dieſer Einrichtung zu bauen, und nicht lieber eine gewöhnliche oberſchlächtige zu wählen, überlaſſe ich. Mir komt es ſo vor, daß es ſeine Schwierigkeiten haben dürfte, die Waſſer-Trommel, die hier nur zwey Fuß im Durchmeſſer haben müſte, ſo wie erfordert wird, einzurichten, dafern nicht alles aus Metall gemacht wird. Und geſetzt, es lieſſe ſich

alles

alles ohne Schwierigkeit ſo machen, wie es der Rechnung gemäß iſt, ſo dürfte doch der Umſtand, daß die Oefnungen bey I, *i*, *i*, und F, *f*, *f*, ſo ſehr klein ſeyn müſſen, verurſachen, daß ſie häufig durch Unreinigkeiten verſtopſt werden. Dieſer Unbequemlichkeiten halber ſcheint es, daß eine ſolche Einrichtung nur alsdenn mit Nutzen in der Ausübung gebraucht werden könne, wenn man einen beträchtlichen Waſſer-Zufluß, und hinlängliches Gefälle hat.

Der XXXVI. Abſchnitt.

Theorie der Archimediſchen Waſſerſchraube.

484 §.

Wenn man ſich die Vorſtellung macht, daß um die Spindel einer Schraube (163 §. Stat.) ſtatt des ſonſt gewöhnlichen Schraubenganges eine hohle Röhre ſo herum geführt wird, daß die Axe dieſer Röhre die im 163 u. f. §. Stat. erklärte Geſtalt eines Schrauben-Ganges bekömt, ſo hat man einen Begrif von der **Waſſerſchraube**, oder **Waſſerſchnecke**, deren Erfindung gewöhnlich dem Archimedes zugeſchrieben wird: wiewohl andre dafür halten, daß ſie bereits den alten Egyptern bekant geweſen ſey, die ſich derſelben zur Austrocknung ihrer Wieſen, wenn ſie der Nilſtrohm unter Waſſer geſetzt hatte, bedient haben ſollen. Nach Leupolds Urtheil Theatr. Mach. Hydraul. P. I. im IV Cap.

67 §. iſt es ſchwer, eine bleyerne Röhre in der Geſtalt eines Schrauben-Ganges um die Spindel zu führen: deswegen iſt es mehr üblich, daß man die Waſſerſchnecke inwendig ohngefehr wie eine Windel-Treppe zurichtet, wovon man a. a. O. Zeichnungen findet, ſo wie auch Vorſchriften gegeben werden, wie alles aus hölzernen Stücken, die hier auch Schaufeln heiſſen gehörig zuſammen geſetzt, und hiernächſt mit eiſernen Reifen verbunden werden kann. Die Schnecke mag indeſſen auf die eine oder die andre Art eingerichtet ſeyn, ſo bleibt das weſentliche, worauf auch die theoretiſche Unterſuchung gegründet werden muß, dieſes: daß eine hohle Röhre, die durchgängig gleich weit iſt, um einen Cylinder ſo geführt wird, daß ihre centriſche Linie die Geſtalt der Schraubenlinie (163 §. Stat.) bekömt. Belidor verſpricht in der Architect. Hydraul. I. Th. II. B. IV. Cap. 785 §. daß er im zweyten Theil dieſes Werks, da, wo er die Lehre von den Schleuſen abhandeln werde, einen nähern Unterricht von der Waſſerſchraube ertheilen wolle. Ich finde aber im II Theil I Buch VI Cap. 223 und 224 §. nichts weiter, als eine kurze Beſchreibung einer Maſchine, welche die Waſſer-Schnecke in Bewegung zu ſetzen dient. Aus den am Ende des 223 §. befindlichen Worten ſollte man indeſſen wohl ſchlieſſen, daß dieſe Stelle an dem vorhin aus dem erſten Theil angezogenen Orte gemeint ſey. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß um eine und eben dieſelbe Spindel zwey, auch wohl drey verſchiedene Röhren geführt werden können, worauf ſich die Eintheilung in einfache, doppelte und dreyfache Waſſer-Schnecken gründet. Indeſſen iſt es nur nöthig, die einfache

Schnecke

Schnecke zu betrachten, weil dasjenige, was von dem einen Schnecken-Gang erwieſen wird, hiernächſt ohne Schwierigkeit auf die übrigen angewandt werden kan.

485 §.

6 F. Dieſe Schnecke dient, das Waſſer auf eine mäſſige Höhe zu heben, wenn die Einrichtung auf folgende Art gemacht wird. Die Spindel wird in eine ſolche Lage gebracht, daß ihre geometriſche Axe *Oo* mit dem Horizont einen ſchiefen Winkel macht, und die übrige Einrichtung muß ſo beſchaffen ſeyn, daß ſich dieſe Spindel um ihre gegen den Horizont ſchief liegende Axe *Oo* frey drehen kan. In ſolcher Abſicht iſt ſie am Mittelpunct beyder Grundflächen bey O und *o* mit Zapfen verſehen, die auf den Grundflächen ſenkrecht ſtehen. Beyde Zapfen ſind gehörig unterſtützt, und der unterſte Zapfen ſteht unter dem Waſſer, was die Schnecke heben ſoll. Die übrige Einrichtung hängt von der Art und Weiſe ab, wie die Schnecke bewegt wird. Iſt der obere Zapfen bey *o* mit einer Kurbel verſehen, ſo kann die Schnecke von Menſchen gedrehet werden. Man kan aber daſelbſt auch Rad und Getriebe anbringen, und die ganze Maſchine durch Pferde und andere angebrachte Kräfte treiben, nachdem es die Umſtände zulaſſen. In Holland werden die Schnecken häufig zur Austrocknung der Wieſen gebraucht, und man nennt ſie daſelbſt Tonnen-Mühlen. Sie werden durch Windmühlen-Flügel in Bewegung geſezt.

486 §.

6 F. Um nun einen Begrif davon zu bekommen, auf welche Art die Schnecke das Waſſer ſchöpft, ſtelle

man ſich bloß anfangs die Spindel in ihrer gegen den Horizont geneigten Lage vor. Das Rechteck ABCD ſey ein verticaler Schnitt durch die Axe Oo, und durch B ſey BK in dieſer Verticalfläche horizontal gezogen, ſo iſt CBK der Neigungswinkel der Schnecke gegen den Horizont, BA iſt der Durchmeſſer der untern Grundfläche, und der Punkt A liegt unter allen Puncten im Umſang der untern Grundfläche am höchſten über eine durch B horizontal liegende Ebene. Nun ſey AEFGHC die Schrauben-Linie, nach welcher die Röhre um die Spindel geführt iſt. Man muß ſich eigentlich vorſtellen, daß dies die centriſche Linie der Röhre ſey. Es hat alſo nun die Spindel eine ſolche Stellung, daß der unterſte Anfangspunct A der Schraubenlinie, alſo die unterſte Oefnung der Schnecke am höchſten ſteht. Die Spindel mag ſich nemlich drehen, wie ſie wolle, ſo wird die untere Oefnung A allemahl im Umfange des Kreiſes BPAV bleiben. Steht nun das Waſſer bis an *hi*, ſo kan in dieſer Stellung kein Waſſer in A hinein treten, dafern die Oefnung A noch höher, als der Waſſerpaß *hi* liegt. Um mehrer Deutlichkeit willen, ſtelle man ſich vor, *hi* ſey die Linie, worin die Verticalfläche ABKCD von der Waſſerfläche geſchnitten wird; ſo iſt *hi* eine Horizontallinie, welche AB in *g* ſchneidet. Eben die Waſſerfläche wird die Grundfläche der Spindel ebenfals in einer graden Linie $a\alpha$ ſchneiden, die durch *g* gehet. Dieſe Durchſchnittslinie $a\alpha$ iſt ebenfals horizontal, und weil die Ebene der Grundfläche AαB*a* ſowohl, als auch die Waſſerfläche auf der Ebene ABKCD ſenkrecht ſind, ſo iſt auch $a\alpha$ auf ABKCD, folglich auf AB und *hi* ſenkrecht. Man ſtelle ſich nun die verticale Ebene DABKC unbeweg-

beweglich vor, und nehme an, die Spindel drehe ſich einmahl ſo um, daß die untere Oefnung der Schnecke von A durch α, B, P, bis wieder nach A laufe; ſo wird die untere Oefnung unter Waſſer ſeyn, ſo lange ſie in dem Bogen αBPa bleibt, und während dieſer Zeit wird nach den Geſetzen der Hydroſtatik Waſſer in die Röhre hineintreten. Derjenige Theil der Röhre, welcher ſich unter dem Waſſer befindet, ſo lange die Oefnung A unter dem Waſſer bleibt, wird ganz mit Waſſer angefüllt. Ich ſetze hiebey voraus, daß die Umdrehungsbewegung nicht zu ſchnell ſey, damit das Waſſer Zeit genug behalte, in die Röhre hinein zu treten. Wenn nun die Schnecke in die Lage gekommen iſt, welche die 7 Fig. vorſtellt, wenn die untere Oefnung den Bogen $AbBa$ durchlaufen hat, und bey a wieder über das Waſſer herauf ſteigt, der Bogen aMf aber ſich in eben dieſem Augenblick noch unter dem Waſſer befindet; ſo iſt derſelbe jetzt mit Waſſer angefüllt. Unter welchen Umſtänden nun diejenige Menge Waſſer, welche bis dahin in die Röhre hineingetreten iſt, beym fernern Umlauf darin bleiben, und nach und nach höher ſteigen müſſe, ſolches wird das folgende mit mehrern erörtern.

7 Fig.

487 §.

Es iſt der Winkel gegeben, unter welchem die Schraubenlinie den Umfang der Spindel ſchneidet, nebſt dem Neigungswinkel der Axe der Spindel gegen den Horizont; die untere Oefnung befindet ſich an ihrer höchſten Stelle bey A: man ſoll die Höhe eines gegebenen Puncts M der Schraubenlinie über eine durch B horizontal gelegte Ebene finden.

Aufl.

Aufl. Es ſey MP mit der Axe der Spindel parallel, und man ſetze den Bogen AP $= x$, den Winkel MAP $= \eta$, ſo iſt x:PM $= 1 : \tang \eta$ (165 §. Stat.), alſo PM $= x \tang \eta$. Es ſey MR vertical, und PT horizontal, ſo iſt MPT der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont. Man ſetze dieſen Winkel $= \vartheta$, ſo iſt MT $=$ PM$\sin\vartheta = x \tang \eta \sin\vartheta$. Die durch B horizontal gelegte Ebene heiſſe Kürze halber die Fundamentalebene. Wenn nun MT dieſe Ebene in R trift, und Pr auf eben dieſer Ebene ſenkrecht iſt, ſo iſt Pr $=$ TR. Es ſey PN auf AB ſenkrecht, ſo iſt auch PN horizontal, und wenn NS auf die Fundamentalebene ſenkrecht fällt, ſo wird NS $=$ Pr $=$ TR. Weil nun NBS $= 90° - \vartheta$, ſo wird NS $=$ BN$\cos\vartheta =$ TR, und die geſuchte Höhe MR $= x \tang \eta \sin\vartheta +$ BN$\cos\vartheta$. Der Halbmeſſer AO der Spindel ſey $= r$, ſo iſt BN $= 2r -$ AN und AN $= r \sinv\frac{x}{r}$, folglich die geſuchte Höhe MR

$$= x \tang \eta \sin\vartheta + r\left(2 - \sinv\frac{x}{r}\right)\cos\vartheta;$$ oder auch

$$\text{MR} = x \tang \eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{x}{r}\right)\cos\vartheta.$$

488 §.

Aus dieſer Gleichung kan man folgende Sätze ſchlieſſen. Wenn $x = 0$ iſt, ſo hat man MR $= 2r\cos\vartheta$, wie auch aus der Zeichnung unmittelbar erhellet. So lange als x ſehr klein iſt, wächſt MR, wenn x wächſt. Denn $x \tang \eta \sin\vartheta$ wächſt mit x, und $r\left(1 + \cos\frac{x}{r}\right)\cos\vartheta$ nimmt zwar ab: allein

nur ſehr wenig, weil $\cos\frac{x}{r}$ ſehr nahe $= 1$ iſt, ſo lange x ſehr klein bleibt. Wie lange x wachſe, kan man ſo finden. Es iſt $d.\mathrm{MR} = dx \operatorname{tang}\eta \sin\vartheta - dx \sin\frac{x}{r}\cos\vartheta$. So lange dies Differential poſitiv bleibt, ſo lange wächſt MR; und dies erfolgt, ſo lange $\sin\frac{x}{r} < \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ bleibt. Wenn aber $\sin\frac{x}{r} = \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ wird, ſo iſt MR am gröſten (343 §. Mech.) und nimmt wieder ab, wenn $\sin\frac{x}{r} > \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ wird. Es ſey demnach $\sin\frac{AQ}{r} = \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$, und QL mit der Axe der Spindel parallel; ſo liegt der Punct L in der Schraubenlinie höher, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden Puncte. Wenn $x = \frac{1}{2}\pi r$ wird, ſo iſt $\sin\frac{x}{r} = 1$, und gröſſer kan $\sin\frac{x}{r}$ nicht werden. Für gröſſere Werthe von x, nimmt $\sin\frac{x}{r}$ wieder ab ſo daß aufs neue $\sin\frac{x}{r} = \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ wird, wenn $x = 180° - AQ$ iſt. Für gröſſere Werthe von x muß alſo $\frac{\sin x}{r} < \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ werden, und MR wieder wachſen. Wenn demnach $AP = \pi r - AQ$ genom-

genommen, und PM mit der Spindel Axe parallel gezogen wird; ſo liegt M niedriger, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden Puncte der Schraubenlinie. Für $x = AQ$ hat alſo die Höhe Lϱ einen gröſten, für $x = AP = \pi r - AQ$ aber hat MK einen kleinſten Werth: und wenn eine durch L horizontal gelegte Ebene die Schraubenlinie in l ſchneidet; ſo iſt LMl derjenige Bogen, der ſich auf einmahl mit Waſſer füllen kan (arcus hydrophorus, aquifer). Man ſtelle ſich nemlich vor, das Waſſer, worin die Spindel ſteht, ſteige höher als L liegt, ſo wird durch A Waſſer in die Schnecke hinein treten, und zwar noch über l hinauf. Wenn nun das äuſſere Waſſer wieder bis in $a\alpha$, oder auch noch tiefer ſinkt, ſo bleibt doch der ganze Bogen LMl mit Waſſer angefüllt.

489 §.

Dafern die Schnecke das Waſſer zu heben dienen ſoll; ſo muß der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Horizont gröſſer ſeyn, als der Winkel der Schraubenlinie mit dem Umfang der Grundfläche.

Beweis. Es ſey der Winkel ABS $< \eta$, alſo $90° - \vartheta < \eta$, ſo iſt $\cot\vartheta < \text{tang}\,\eta$, folglich

$$\frac{\text{tang}\,\eta}{\cot\vartheta} > 1,$$ oder $\text{tang}\,\eta\ \text{tang}\,\vartheta > 1$. Wenn 7 Fig.

aber Lϱ ein gröſtes und MR ein kleinſtes ſeyn ſoll; ſo muß $\sin\frac{AQ}{r} = \sin\frac{AP}{r} = \text{tang}\,\eta\ \text{tang}\,\vartheta$ ſeyn (488 §.), folglich $\sin\frac{AQ}{r}$, oder $\sin\frac{AP}{r} > 1$, wenn ABS $< \eta$ wäre, welches nicht möglich iſt. Bey

dieſer Vorausſetzung giebt es alſo keinen Werth für MR, der kleiner wäre, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden, und die Schraubenlinie ſteigt beſtändig höher. Daraus folgt, daß die Schnecke kein Waſſer halten kan. Wäre ABS $= \eta$, alſo $\cot\vartheta = \operatorname{tang}\eta$, ſo hätte man $\operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta = 1 = \sin\frac{AQ}{r} = \sin\frac{AP}{r}$; folglich müſte $\frac{AQ}{r} = \frac{AP}{r} = \frac{1}{2}\pi$ ſeyn, und die Puncte L und M würden ſo wie Q und P in einen zuſammen fallen, ſo daß der Bogen, welcher das Waſſer halten müſte (arcus hydrophorus) verſchwindet. Deswegen muß ABS $> \eta$ ſeyn.

Es muß demnach auch $90° - \eta > 90° -$ ABS ſeyn, alſo $90° - \eta > \vartheta$. Es iſt aber $90° - \eta$ der Winkel, welchen die Schraubenlinie mit den Ordinaten PM einſchlieſt. Dieſer muß alſo gröſſer ſeyn, als die Neigung der Spindel gegen den Horizont.

Wenn man $\operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta = T$ ſetzt, ſo erhält man $AQ = r\,A\sin T$ (488 §.) und $AP = r(\pi - A\sin T)$. Die Gleichungen dienen demnach die Puncte L und M zu finden.

490 §.

7Fig. Man ſtelle ſich nun die Schnecke in jeder andern willkührlichen Lage vor, ohne daß die untere Oefnung ſich an ihrer höchſten Stelle bey A befindet, etwa wie in der 7 Fig. wo ſich die untere Oefnung bey a in dem Halbkreiſe AaPB befindet. Würde nun die Schraubenlinie durch a erweitert bis ſie mit AD in A′ zuſammenſtieſſe; ſo könnte man durch A′ eine Ebene mit der Grundfläche der Spindel parallel legen,

deren

deren Schnitt mit der Cylinderfläche einen der Grundflächen gleichen Kreis $A'Q'P'B'$ giebt. Nimt man nun $A'Q' = rA \sin T$, und $A'P' = r(\pi - A \sin T)$, und zieht $Q'L \# P'M \# Oo$, ſo iſt wie im 488 §. L der höchſte, und M der niedrigſte Punct des Waſſerhaltenden Bogens, es ſind aber dieſe Puncte mit denjenigen nicht einerley, welche im 488 §. beſtimt wurden, auch iſt ihre Höhe über der Fundamentalebene von der Höhe der dortigen unterſchieden. Um ihre Höhe für den gegenwärtigen Fall zu finden, erwäge man folgendes. Wenn man ſich durch B' eine Horizontalfläche vorſtellt, ſo iſt die Höhe des Puncts L über dieſe Ebene

$$= A'Q' \tang \eta \sin \vartheta + r\left(1 + \cos \frac{A'Q'}{r}\right)\cos \vartheta$$

und die Höhe des Puncts M $=$

$$A'P' \tang \eta \sin \vartheta + r\left(1 + \cos \frac{A'P'}{r}\right)\cos \vartheta.$$

Dieſe Ebene liegt aber um das Stück $B'B \sin \vartheta$ niedriger als die vorige, und es iſt $B'B = A'A = Aa \tang \eta$. Wenn alſo der Winkel $AOa = \varphi$, folglich $Aa = r\varphi$ geſetzt wird; ſo erhellet, daß man von jeder der angegebenen Höhen das Stück $r\varphi \tang \eta \sin \vartheta$ abziehen müſſe, um ſie in die Höhen über die durch B gelegte Fundamentalebene zu verwandeln. So wird alſo die Höhe des Puncts M $=$

$$(A'P' - r\varphi) \tang \eta \sin \vartheta + r\left(1 + \cos \frac{A'P'}{r}\right)\cos \vartheta.$$

Wäre *a* in dem andern Halbkreiſe A*b*B befindlich, ſo würde der Bogen M*a* die Linie AD oberhalb A ſchneiden. Wenn man ſich alſo den Durchſchnittspunct A' oberhalb A vorſtellt, ſo ſieht man wohl,

 daß

daß die Höhe des Puncts M =

$$(A'P' + r\varphi)\tang\eta\sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'P'}{r}\right)\cos\vartheta$$

werden müſſe. Daſſelbe ergiebt ſich auch daraus, weil alsdenn der Winkel φ in der vorigen Gleichung das entgegengeſetzte Zeichen haben muß.

491 §.

7 Fig. Dieſe Schlüſſe machen die Art und Weiſe begreiflich, wie vermittelſt der Waſſerſchraube das Waſſer zum Steigen gebracht werde. Man ſtelle ſich nemlich vor, die niedrigſte Oefnung ſtehe anfangs in A, da noch alles ledig iſt, und die Schnecke werde nun ſo gedrehet, daß die untere Oefnung von A durch b, B, P, Q, laufe. Erreicht ſie nun beym Herabſteigen bey α das Waſſer, ſo tritt daſſelbe nach den Geſetzen der Hydroſtatik in die Röhre ſo hoch hinein, als es drauſſen ſteht, vorausgeſetzt, daß die Maſchine nicht zu ſchnell umlaufe. In dem Augenblick nun, da a in P ankomt, iſt zwar der Bogen mit Waſſer gefüllt, der ſich von P bis an die Waſſerfläche auf der andern Seite erſtreckt: allein wenn in dieſem Augenblick der Umlauf gehemmet würde, und das Waſſer plötzlich unter B ſänke, ſo würde auch alles in die Schnecke hinein getretene Waſſer wieder heraus laufen, weil a hier in P niedriger liegt, als die übrigen Puncte, welche gegen B zu liegen. Wäre aber a ſchon weiter gegen A zu, etwa bis nach a' vorgerückt, ſo würde unter eben den Umſtänden nicht mehr alles Waſſer auslaufen, weil die zwiſchen m und a' befindlichen Puncte höher als m liegen. Geſetzt alſo, daß auch das Waſſer nur bis an der Horizontallinie $a'\alpha'$ ſtünde, und die untere Oefnung bey

a' ſchon über den Waſſerpaß $a'\alpha'$ hervorſtiege, ſo würde doch der Bogen $a'mb'$ ſein Waſſer halten, wenn auch b' in dem Waſſerpaß $a'\alpha'$ liegt. Steigt nun a' höher hinauf bis Q, ſo kan die hineingetretene Maſſe Waſſer nicht in demſelben Bogen $a'mb'$ bleiben. Denn es iſt nun m nach m' gerückt, und M liegt nun niedriger als m'. Alſo muß das Waſſertheilchen, was vorhin in m war, jetzt in M gerückt ſeyn, und man ſieht leicht, daß alle übrige Waſſertheilchen um eben ſo viel gehoben ſind, als M höher wie m liegt. Zur Erleichterung der Sache kan man ſich die ganze hinein getretene Maſſe im Punkt m vereiniget vorſtellen; ſo erhellet, daß dieſe Maſſe in der graden Linie PM immer weiter hinauf rücken müſſe, wenn die Schnecke umzulaufen fortfährt.

492 §.

Wenn die Sehne QV auf AB ſenkrecht ſteht, ſo iſt ſie horizontal, und die bisherigen Lehren ergeben, daß die Grundfläche bis an dieſer Sehne unter Waſſer ſtehen müſſe, wenn die Schnecke bey jedem Umlauf die möglichſt gröſte Menge Waſſer ſchöpfen ſoll. Steht das Waſſer niedriger, ſo ſchöpft die Schnecke nicht ſo viel: ja ſie würde gar nichts ſchöpfen, wenn das Waſſer niedriger als PN ſtünde. Es iſt aber $AQ = r A \sin T = AV$, und dadurch werden die Puncte V und Q beſtimmt. Eine gröſſere Tiefe unter dem Waſſer iſt unnöthig, ja ſie kan ſchädlich werden, wenn die ganze Grundfläche unter Waſſer ſteht, ſo daß die Oefnung a nie über dem Waſſer hervorkommen kan. So viel ſich aus dem bisherigen Vortrag noch abnehmen läſt, kan ſich nie die ganze Röhre von unten bis oben mit Waſſer füllen, weil es of- 6Fig.

ſenbar iſt, daß das Waſſer unten auslaufen müſte, wenn alles voll wäre. Ob aus der Umlaufsbewegung Kräfte entſtehen können, die es hinauf treiben, ſoll unten weiter unterſucht werden. Hier nehme ich den bisherigen Schlüſſen gemäß noch an, daß ſich jeder Schraubengang nur zum Theil mit Waſſer anfülle, und ſo muß in dem übrigen Theil die Luft hinein treten können. Wenn ſich die Länge des Waſſerhaltenden Bogens zur Länge eines Schraubenganges wie $\nu:\mu$ verhält, und es iſt die Menge Waſſer, die der ganze Schraubengang faſſen würde, $= Q$, ſo ſchöpft die Schnecke bey jedem Umlauf die Menge Waſſer $= \frac{\nu}{\mu} Q$. Dieſe Menge tritt alſo beym zweyten Umlauf der Schnecke aus dem untern Schraubengang in den nächſthöhern, beym dritten Umlauf aus dem zweyten Schraubengang in den dritten, u. ſ. f. bis es endlich nach ſo viel Umläufen als Schraubengänge vorhanden ſind, aus dem oberſten Schraubengange ausläuft. Das Waſſer nemlich, was nach dem erſten Umlauf in M ſtand, wird nach dem zweyten Umlauf in M′ ſtehen, u. ſ. f.

493 §.

6 Fig. Es ſey nun die Schnecke in einer gewiſſen willkührlichen Lage befeſtiget, und man nehme an, daß in einem Schraubengange der Waſſerhaltende Bogen mit Waſſer angefüllet ſey: ſo wird das Gewicht dieſes Waſſers die Schraube zu drehen ſtreben. Wäre das Gewicht dieſer ganze Maſſe in dem Punkt M beyſammen, ſo würde man das Moment, womit daſſelbe die Schraube um ihre Axe Oo zu drehen ſtrebte,

te, ſo finden. Dies Gewicht ſey $= p$, ſo iſt die Richtung MT deſſelben vertical. Man zerlege es nach den Richtungen MP und MX, ſo daß MX in der Ebene PMT auf MP ſenkrecht ſteht, ſo wird der Druck nach $MX = p \sin MTX = p \sin TMP = p \cos\vartheta$. Es ſey MY ♯ PO, ſo iſt die Ebene XMY auf PM, folglich auch auf Oo ſenkrecht, und das Moment des Drucks nach $MX = p \cos\vartheta \, r \sin XMY$. Nun ſey Zz die Durchſchnittslinie der Ebene XMY mit ABCD, ſo iſt der Winkel $MYZ = POB$. Ferner iſt die Ebene MPT mit ABCD (324 §. Geom.), alſo MX mit YZ parallel, folglich der Winkel $XMY = 180° - BOP = AOP$, und das Moment des Drucks MX $= p \cos\vartheta \, r \sin AOP$. Da nun $AOP = \frac{AP}{r}$, ſo iſt

$$\sin AOP = \sin \frac{AP}{r} = \tang\eta \tang\vartheta \text{ (488 §.)};$$

alſo wird das Moment des Drucks nach MX $= pr \sin\vartheta \tang\eta$.

494 §.

Das Moment zu finden, womit das Waſſer, ſo wie es durch den ganzen Bogen *LMl* ausgebreitet iſt, die Schnecke um ihre Axe zu drehen ſtrebt.

Aufl. Es ſey M ein unbeſtimmter Punkt des waſſerhaltenden Bogens, und das Stück AM der centriſchen Linie $= s$, $AL = \varepsilon$, und die Länge des waſſerhaltenden Bogens $LMl = \lambda$, ſo ſind die Kreisbogen $AP = s \cos\eta$, $AQ = \varepsilon \cos\eta$, $AQPBq = (\varepsilon + \lambda)\cos\eta$ (488 §.), folglich $QPBq = \lambda \cos\eta$. Wenn nun LQ und *lq* mit der Axe der Spindel parallel, $Q\nu$ und $q\mu$ aber auf AB ſenkrecht ſind, ſo iſt $A\nu =$

 rſinv.

$r \sin v. \frac{AQ}{r}$, und $A\mu = r \sin v. \frac{APBq}{r}$. Wenn ferner das Gewicht der ganzen Maſſe Waſſer $= p$ geſetzt wird, ſo iſt das Gewicht des in M befindlichen Elements $= \frac{pds}{\lambda}$. Das Moment, womit das Element die Schraube zu drehen ſtrebt, iſt $=$

$$\frac{pds}{\lambda} . \cos\vartheta . r \sin AOP \text{ (493 §.) } =$$

$\frac{pds}{\lambda} NP \cos\vartheta$. Nun iſt $AP = r A \sin . v \frac{AN}{r}$ $= r A \sin v \frac{x}{r}$, wenn man $AN = x$ ſetzt, folglich

$$d . AP = r . \frac{dx : r}{\sqrt{(2x : r - xx : rr)}} \text{ (332 §. Mechan.)}$$

$$= \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{rdx}{NP}, \text{ und es war}$$

$AP = s \cos\eta$, alſo wird $ds \cos\eta = \frac{rdx}{NP}$, und $ds = \frac{rdx}{NP \cos\eta}$. Dies ſtatt ds geſetzt, giebt das Moment, womit das in M befindliche Element die Schraube zu drehen ſtrebt,

$$= \frac{rdx}{NP . \cos\eta} . \frac{p}{\lambda} NP \cos\vartheta = \frac{rpdx \cos\vartheta}{\lambda \cos\eta}.$$

Wird nun die Summe der Momente aller Waſſertheilchen von L bis $M = \mu$ geſetzt, ſo hat man ver-

mit-

mittelſt der Integration $\mu = \frac{rpx \cos\vartheta}{\lambda \cos\eta} + C.$

Es iſt aber $\mu = 0$, wenn $x = A\nu = r \sin v \frac{AQ}{r}$ iſt.

Dies giebt $C = -\frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} r \sin v \frac{AQ}{r}$, folglich wird $\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta}\left(x - r\sin v \frac{AQ}{r}\right)$; und um daſſelbe für den ganzen Waſſerhaltenden Bogen zu haben, muß man $x = A\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$ ſetzen, woraus der Ausdruck

$$\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} . r \left(\sin v \frac{APBq}{r} - \sin v \frac{AQ}{r}\right)$$

folgt, oder auch

$$\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} . r \left(\cos\frac{AQ}{r} - \cos\frac{APBq}{r}\right).$$

Dieſer Ausdruck läſt ſich ſo verkürzen. Weil L und l die äuſſerſten Punkte des Waſſerhaltenden Bogens ſind, ſo müſſen ſie gleich hoch über dem Horizont liegen. Aus dem 483 §. aber ergiebt ſich die Höhe des Punkts L über die durch B horizontal gelegte Ebene, wenn man AQ ſtatt des dortigen x ſetzt, und die Höhe des Punkts l über eben die Ebene, wenn man APBq ſtatt x ſetzt. Sucht man auf dieſe Art beyde Höhen, und ſetzt ſie einander gleich, ſo komt man auf die Gleichung

$$AQ \tan\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{AQ}{r}\right)\cos\vartheta =$$

APBq

$$APBq \operatorname{tang}\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{APBq}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Daraus folgt

$$AQ \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta + r\cos\frac{AQ}{r} =$$

$$APBq . \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta + r\cos\frac{APBq}{r},$$ folglich

$$r\left(\cos\frac{AQ}{r} - \cos\frac{APBq}{r}\right) =$$

$(APBq - AQ) \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta = \lambda \cos\eta \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$, (weil $APBq - AQ = QPBq = \lambda \cos\eta$, wie im Anfang dieſes §. ſchon angemerkt iſt,) $= \lambda \sin\eta \operatorname{tang}\vartheta$. Dies in den gefundenen Werth von μ geſetzt, giebt

$$\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} \times \lambda \sin\eta \operatorname{tang}\vartheta = rp \operatorname{tang}\eta \sin\vartheta.$$

Wenn das ganze Gewicht p in dem Punkt M beyſammen wäre, ſo würde das Moment deſſelben eben ſo groß ſeyn (493 §.). Deswegen hat es keine Schwierigkeit, dies Moment zu finden, dafern man nur p berechnen kan, und dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß man die Länge des Waſſerhaltenden Bogens finden könne. Wenn nemlich jeder Querſchnitt der um die Spindel gewundenen Röhre $= k^2$ iſt, ſo hat man $p = \gamma k^2 \lambda$, wo γ das Gewicht eines Cubic-Fuſſes Waſſer bedeutet.

495 §.

Die Länge des Waſſerhaltenden Bogens *LMl* zu finden.

Aufl. Es ſey der Kreisbogen $AQ = \alpha$, der dem höchſten Punkt L zugehört, ſo hat man $\alpha =$ $r A \sin T$,

r A ſin T, und T = tang η tang ϑ (489 §.). Ferner ſey APB$q = \beta$, ſo erhält man aus dem vorigen §. die Gleichung

$$\left(\cos\frac{\alpha}{r} - \cos\frac{\beta}{r}\right) = \left(\frac{\beta}{r} - \frac{\alpha}{r}\right) \text{tang}\,\eta\ \text{tang}\,\vartheta.$$

Man ſetze $\cos\frac{\beta}{r} = z$, ſo hat man $\frac{\beta}{r} = A\cos z$, ſo wie $\frac{\alpha}{r} = A\sin T$, und $\cos\frac{\alpha}{r} = \surd(1 - TT)$. Dies giebt $\surd(1 - TT) - z = (A\cos z - A\sin T)\, T$, oder $z + T \,.\, A\cos z = \surd(1 - TT) + T \,.\, A\sin T$. Wenn aus dieſer Gleichung z gefunden iſt, ſo hat man zugleich $A\cos z = \frac{\beta}{r}$, alſo auch $\frac{\beta}{r} - \frac{\alpha}{r}$, und $\beta - \alpha$, wenn man mit r multiplicirt. Es iſt aber $\beta - \alpha = $ QPB$q = \lambda \cos\eta$, und daraus erhält man $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{\cos\eta} = (\beta - \alpha)\sec\eta$. Die Länge eines ganzen Schraubenganges iſt $= 2\pi r \sec\eta$. Wird alſo dieſe $= l$ geſetzt, ſo hat man $2\pi r : \beta - \alpha = l : \lambda$, und $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{2\pi r} l$.

Die völlige Auflöſung dieſer Aufgabe hängt alſo davon ab, daß man z aus der Gleichung

$$z + T \,.\, A\cos z = \surd(1 - TT) + T \,.\, A\sin T$$

finden könne. Hätte man eine Gleichung zwiſchen z und $A\cos z$, ſo müſte man $A\cos z$ durch z ausdrücken, und hiernächſt die Gröſſe z auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein bringen. Man kan aber $A\cos z$ durch z nicht anders als vermittelſt einer Rei-

he ausdrücken, die ohne Aufhören fortgeſetzt werden müſte, wenn ſie dieſen Bogen völlig geben ſollte, und man muß ſich deswegen mit einer Näherung begnügen. Ohne indeſſen die Gleichung zwiſchen z und Acoſz zu ſuchen, welches vermittelſt der Integralrechnung geſchehen müſte, und bisher noch nicht gewieſen iſt, kan man ſich einer bequemern und kürzern Näherungs-Methode bedienen, die ſogleich erklärt werden ſoll. Vorläufig aber bemerke man noch folgendes.

Aus dem 489 §. weis man, daß tang η tang ϑ nicht gröſſer als 1 ſeyn könne. Der Werth tang η tang $\vartheta = 1$ giebt $\frac{\beta}{r} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\pi$. Wird tang η tang $\vartheta < 1$, alſo $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, ſo muß $\frac{\beta}{r} > \frac{1}{2}\pi$ werden. Denn es iſt $AP = r\left(\pi - \frac{\alpha}{r}\right)$, wird alſo $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, ſo wird $\frac{AP}{r} > \frac{1}{2}\pi$. Aber es iſt allemahl $APBq > AP$, alſo $\frac{\beta}{r} > \frac{AP}{r} > \frac{1}{2}\pi$, daß alſo $\cos\frac{\beta}{r}$ das entgegengeſetzte Zeichen bekömt. Je kleiner demnach tang η tang ϑ, alſo auch $\frac{\alpha}{r}$ wird, deſto gröſſer muß $\frac{\beta}{r}$ werden. Wird tang η tang $\vartheta = 0$, alſo $\frac{\alpha}{r} = 0$, ſo wird $1 - \cos\frac{\beta}{r} = 0$,

und

und $\cos\frac{\beta}{r} = 1$, folglich $\frac{\beta}{r}\ 2\pi$, weil allemahl $\frac{\beta}{r} > \frac{AP}{r}$, alſo bey jetziger Vorausſetzung $\frac{\beta}{r} > \pi$ iſt.

Will man nun für einen beſtimmten Werth von $\tang\eta \tang\vartheta$, alſo von $\frac{\alpha}{r}$, den zugehörigen Werth von $\frac{\beta}{r} = A\cos z$ haben; ſo drücke man die Gleichung zwiſchen $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{\beta}{r}$ ſo aus:

$$z + T.A\cos z - T.A\sin T - \surd(1 - TT) = 0,$$

und ſetze ſtatt z einen muthmaßlich angenommenen Werth. Würde nun dieſer Ausdruck würklich $= 0$, ſo wäre z richtig angenommen: je näher derſelbe der 0 kömmt, deſto weniger iſt der angenommene Werth von z von dem wahren Werth verſchieden. Dem wahren Werth von z kan man alsdenn immer näher kommen, wenn man die folgende Aufgabe zu Hülfe nimmt.

496 §.

Den Werth der unbekannten Gröſſe z in einer Gleichung durch Näherung zu finden.

Aufl. Wenn man die Gleichung auf 0 gebracht hat, und man ſetzt den ganzen Ausdruck, welcher auf der andern Seite des Gleichheitszeichens ſteht, $= y$, daß die Gleichung unter der Form $y = 0$ begriffen iſt; ſo wird y ein Ausdruck ſeyn, worin die unbe-

unbekannte Gröſſe z mit bekannten vermengt iſt. Man kan y ſodann als eine Function von z betrachten, und man ſucht alsdenn eigentlich denjenigen Werth, welcher ſtatt z geſetzt, $y = 0$ giebt. Wenn nun f beynahe der rechte Werth von z iſt, und $z = f$, den Werth $y = F$ giebt, ſo wird F nur klein, und deſto kleiner ſeyn, je weniger f von dem geſuchten Werth unterſchieden iſt. Geſetzt nun es iſt $f + \omega$ der eigentlich geſuchte Werth von z, ſo muß $y = 0$ ſeyn, wenn $f + \omega$ ſtatt z geſetzt wird. Nun kan man ω als eine Differenz betrachten, um welche der Werth $z = f$ wächſt, alſo Δz ſtatt ω ſchreiben, ſo muß $y + \Delta y$ aus y werden, wenn $z + \Delta z$ ſtatt z geſetzt wird. Schreibt man alſo f ſtatt z, ſo muß F ſtatt y geſetzt werden, und es wird $F + \Delta y$ aus y, wenn $f + \Delta z$ aus f wird. Da nun voraus geſetzt wird, daß $y = 0$ werde, wenn $z = f + \Delta z$ iſt, ſo hat man $F + \Delta y = 0$. Es iſt aber beynahe $\Delta y = \frac{dy}{dz}\Delta z$, weil Δz ſehr klein, alſo beynahe $\Delta z = dz = 0$, oder beynahe $\frac{\Delta z}{dz} = 1$ iſt, alſo wird

$$F + \frac{dy}{dz}\Delta z = 0, \text{ und dies giebt } \Delta z = -\frac{F dz}{dy},$$

alſo beynahe $z = f - \frac{F dz}{dy}$.

Wenn man hievon die Anwendung auf die Gleichung des vor. §. macht, alſo

$$z + T.A\cos z - TA\sin T - \sqrt{(1-TT)} = y$$

ſetzt; ſo wird $dy = dz - \frac{T dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, alſo $\frac{dy}{dz}$

=

$= \frac{\sqrt{(1-zz)} - T}{\sqrt{(1-zz)}}$, und $\frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(1-zz)}-T}$.

Giebt alſo der Werth $z = f$ den Werth $y = F$ beynahe $= 0$, ſo wird beynahe $z = f - \frac{F\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)}-T}$.

497 §.

Zur würklichen Berechnung der Länge eines Waſſerhaltenden Bogens wird übrigens noch erfordert, daß die Geſtalt der Waſſerſchraube, und ihre Lage gegen den Horizont gegeben ſey. Vitruv (de architectura Lib. X. Cap. XI. p. m. 413) ſchreibt vor, es ſoll allemahl AP = PM ſeyn; und wenn CK vertical, BK aber horizontal iſt; ſo ſollen ſich die Linien CK : BK wie 3 : 4 verhalten, welches BC = oO = 5 giebt. Hieraus folgt $\frac{PM}{AP} = \tang\eta = 1$, alſo $\eta = 45°$; $\tang\vartheta = \frac{CK}{BK} = \frac{3}{4}$, und man erhält ferner $T = \tang\eta \tang\vartheta = \frac{3}{4}$, folglich $\frac{\alpha}{r} = A\sin T = 48° 35'$, daß alſo der ganze Bogen QV der Grundfläche, welcher aus dem Waſſer hervor ragen muß, 97° 10' beträgt. Uebrigens läſt ſich A ſin T aus dem 469 §. G. ſo finden.

Es iſt $A.1^\circ = 0{,}0174533$

$$\begin{array}{r} 0{,}0174533 \\ 48 \\ \hline 0{,}698132 \\ 139626 \\ \hline A.48^\circ = 0{,}837758 \\ \hline A.1' = 0{,}0002909 \\ 35 \\ \hline 8727 \\ 1454 \\ \hline A.35' = 0{,}010181 \\ \hline \text{alſo } A\sin T = 0{,}847939 \end{array}$$

Ferner iſt $T = 0{,}75$ alſo $T.A\sin T = 0{,}637939$ und $\sqrt{(1-TT)} = 0{,}6614378$. Dies in die Gleichung des 495 §. geſetzt giebt

$$z + 0{,}75 . A\cos z - 1{,}2993768 = 0.$$

Nun kan man zum vorausſehen, daß $A\cos z > \frac{1}{2}\pi$ ſeyn werde, alſo z negativ genommen werden müſſe: und weil zu vermuthen iſt, daß dieſer Bogen nicht viel vom Halbkreiſe unterſchieden ſeyn werde, ſo verſuche man die Vorausſetzung $A\cos z = A.170^\circ$. Dies giebt $z = -0{,}9848078 = f$ und weil

$$\begin{array}{r} A.1^\circ = 0{,}0174533 \\ 170 \\ \hline 1{,}74533 \\ 1{,}221731 \\ \hline \end{array}$$

ſo wird $A\cos z = 2{,}967061$

und $\frac{3}{4} A\cos z = 1{,}975296$

Ferner war $z = -0{,}9848078 = f$

man addire $-1{,}2993768$

ſo iſt die Summe $-2{,}2841846$

und

und man erhält

$1,975296 - 2,2841846 = -0,308886 = F.$

Dieſer Gleichung kan man es leicht anſehen, daß ſich der Werth von F der o mehr nähern werde, wenn man $A \cos z$ etwas gröſſer nimmt. Denn dies macht den poſitiven Theil gröſſer, und obgleich der negative Theil auch etwas wächſt, ſo beträgt dies doch lange nicht eben ſoviel, weil der Coſinus eines Bogens, der nicht viel von 180° unterſchieden iſt, ſehr langſam zunimmt. Deswegen verſuche man die Vorausſetzung $A \cos z = A . 175°$. Dies giebt

$$z = -0,9961947, \text{ und}$$
$$A \cos z = 3,0543275$$
$$\tfrac{3}{4} A \cos z = 2,2907456$$

Ferner hat man $z = -0,9961947 = f$
man addire $-1,2993768$

ſo iſt die Summe $-2,2955715$

Dies giebt

$2,2907456 - 2,2955715 = -0,0048259 = F.$

Weil dieſer Werth von F der o ſehr nahe iſt, ſo hat man z ſchon beynahe richtig geſunden, und nun läſt ſich nach dem vorigen §. die Näherung noch weiter treiben. In der Gleichung $z = f - \frac{F\surd(1-ff)}{\surd(1-ff)-T}$ am Ende des 496 §. brauche man die Werthe $F = -0,0048259$ und $f = \cos 175° = -0,9961947$: ſo iſt $\surd(1-ff) = \sin 175° = \sin 5° = 0,0871557$. Ueberdem iſt hier $T = \frac{3}{4} = 0,75$, alſo wird

$$\frac{\surd(1-ff)}{\surd(1-ff)-T} = -0,1314876,$$

und $\frac{F\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)}-T} = + 0{,}0006335$,

alſo $z = - 0{,}9968282$.

Dieſem Coſinus komt der Bogen von 175° 26′ am nächſten. Um alſo zu prüfen, wie weit dieſer Werth von z der Gleichung ein Genüge leiſte, ſuche man nun $A.\,175°\,26' = A\cos z = 3{,}0618909$,

ſo wird $\frac{3}{4} A\cos z = 2{,}2959818$.

Zu $z = - 0{,}9968282$
addire man $- 1{,}2993768$

ſo iſt die Summe $- 2{,}2962050$

Dies giebt

$2{,}2959818 - 2{,}2962050 = - 0{,}0002232 = F$.

Die Vergleichung ergiebt, daß dieſer Werth von F der 0 viel näher komme als der vorige, alſo z ebenfals viel richtiger als vorhin gefunden ſey. Bey gegenwärtiger Unterſuchung iſt eine fernere Näherung eben nicht nöthig, ſonſt könte man ferner ſo verfahren. Es iſt nun $f = \cos 175°\,26' = - 0{,}9968282$ und $\sqrt{(1-ff)} = \sin 175°\,26' = 0{,}0796190$, alſo wird $\frac{\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)}-T} = \frac{0{,}0796190}{-0{,}6403810} = 0{,}1243307$, und

$\frac{F\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)}-T} = + 0{,}0000277$,

alſo $z = f - \frac{F\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)}-T} = - 0{,}9968559$,

und zu dieſem Coſinus gehört der Bogen von 175° 27′.

498 §.

Wenn b der Abſtand der Schraubengänge iſt, ſo hat man $\tan\eta = \frac{b}{2\pi r}$. Demnach wird im 494 §. $\mu = rp \tan\eta \sin\vartheta = \frac{b}{2\pi} p \sin\vartheta$, und dies wäre das Moment der Kraft, welches erfordert wird, die Schraube im Gleichgewicht zu erhalten, wenn nur ein Waſſerhaltender Bogen angefüllet iſt. Iſt alſo die Anzahl der Schraubengänge $= n$, ſo wird das Moment $= \frac{nb}{2\pi} p \sin\vartheta$, wenn alle Bogen gefüllt ſind. Wird nun in einer Ebene, die auf der Axe Oo ſenkrecht iſt, in der Entfernung f von der Axe eine Kraft P angebracht, ſo iſt ihr Moment $= Pf$. Soll alſo dieſe mit der geſamten Maſſe Waſſer, womit die Schraube beſchwert iſt, im Gleichgewicht ſeyn, ſo erhält man $P = \frac{b \sin\vartheta}{2\pi f} np$, da dann np das Gewicht der ganzen in der Schraube befindlichen Maſſe Waſſer iſt. Wenn dieſe $= Q$ geſetzt wird, ſo hat man $P = \frac{b \sin\vartheta}{2\pi f} . Q$. Indem aber die Schnecke einmahl herum geht, durchläuft die Kraft den Weg $2\pi f$, und die Laſt Q wird um die Höhe $b \sin\vartheta$ gehoben: alſo findet auch hier der allgemeine Grundſatz des Gleichgewichts (372 §. Mechan.) ſeine Anwendung. Hieraus folgt, daß das Verhältniß zwiſchen der Laſt und erhaltenden Kraft bey der Waſſerſchraube einerley bleibe, die

Winkel η und ϑ mögen ſeyn, welche ſie wollen, wenn nur die Höhe $b\sin\vartheta$ dieſelbe bleibt.

499 §.

Iſt M der niedrigſte Punkt eines Waſſerhaltenden Bogens, ſo iſt ſeine Höhe über eine durch B horizontal gelegte Ebene =

$$(AP + r\varphi)\,\text{tang}\,\eta\,\sin\vartheta + r\left(1 + \text{coſ}\,\frac{AQ}{r}\right)\text{coſ}\,\vartheta$$

(490 §.), wenn φ den Winkel AOa bedeutet, um welchen ſich die Spindel gegen $AqBP$ zu gedrehet hat. Der veränderliche Theil $r\varphi\sin\eta\,\text{tang}\,\vartheta$ dieſes Ausdrucks iſt dem Winkel φ proportional. Wenn alſo die Spindel gleichförmig umläuft, ſo ſteigt auch die Laſt mit gleichförmiger Bewegung, und weil das Moment der Laſt gar nicht von dem Winkel φ abhängt, ſo iſt daſſelbe von gleicher Gröſſe, was auch die Spindel durch die Umdrehung um ihre Axe für eine Lage bekömmt. Wird alſo die Waſſerſchraube vermittelſt einer mechaniſchen Einrichtung umgetrieben, woran eine veränderliche Kraft angebracht iſt, die von der Geſchwindigkeit der Maſchine abhängt, ſo findet hier die im XXIII. Abſchnitt der Mechanik vorgetragene allgemeine Theorie vom Maſchinenweſen ihre Anwendung.

500 §.

Die Waſſerſchraube ſoll durch eine Maſchine umgetrieben, und an derſelben eine veränderliche Kraft, die von der Geſchwindigkeit der Maſchine abhängt, angebracht werden: man ſucht die Menge Waſſer, welche die Maſchine

ſchine bey ihrer vortheilhafteſten Einrichtung auf eine gegebene Höhe $= a$ binnen einer gegebenen Zeit T heben kan.

Aufl. Man ſuche nach dem 383 §. Mech. diejenige Geſchwindigkeit des angegriffenen Punkts, wobey das mechaniſche Moment der Kraft am gröſten wird. Dieſe ſey $= \alpha$, und die davon abhängende Kraft für dieſe Geſchwindigkeit $=$ F. Die Umlaufszeit der Spindel ſey $= t$, ſo ſteigt das Waſſer binnen der Zeit auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geſchwindigkeit deſſelben nach der verticalen Richtung iſt $= \frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechaniſche Moment der Laſt $= \frac{Qb \sin \vartheta}{t}$. Für den Beharrungsſtand der Maſchine hat man alſo $F\alpha = \frac{Qb \sin \vartheta}{t}$. Wenn nun n die Anzahl der Schraubengänge iſt, ſo hebt die Maſchine in der Zeit t die Menge Waſſer $= \frac{1}{n} Q$. Setzt man alſo die in der Zeit T gehobene Menge $= M$, ſo iſt $M = \frac{Q . T}{nt}$. Es iſt aber $\frac{Q}{t} = \frac{F\alpha}{b \sin \vartheta}$, alſo $M = \frac{F\alpha T}{nb \sin \vartheta}$. Die Höhe a, worauf die Maſchine das Waſſer heben kann, iſt $= nb \sin \vartheta$: demnach erhält man $M = \frac{F\alpha T}{a}$. Ich ſetze voraus, daß man F durch eine Menge Waſſer ausdrücke, deren Gewicht ſo groß, als die Kraft iſt, dem 313 §. gemäß.

501 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Maſchine, welche die Waſſerſchraube umzutreiben dienen ſoll, anzugeben.

Aufl. Man hat einmahl die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{a}$, und hiernächſt die in der Zeit t gehobene Menge Waſſer $= \frac{1}{n} Q = \frac{Mt}{T}$. Weil nun dies diejenige Menge iſt, welche einen Waſſerhaltenden Bogen füllt, ſo muß $k^2\lambda = \frac{Mt}{T}$ ſeyn, wenn λ die Länge des Waſſerhaltenden Bogens und k^2 die Gröſſe eines jeden ſeiner Querſchnitte iſt. Aus dieſer Gleichung hat man $t = \frac{k^2\lambda T}{M}$. Die Umlaufszeit des Hauptrades ſey $= \vartheta$, und der Halbmeſſer deſſelben $= \varrho$, ſo iſt $\vartheta = \frac{2\pi\varrho}{\alpha}$. Daraus erhält man $\frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi\varrho . M}{T . k^2\lambda . \alpha}$, welches die Einrichtung der Maſchine beſtimmt. Wenn mehr Röhren als eine um die Spindel gewunden ſind, ſo muß man ſtatt k^2 die Summe ihrer Querſchnitte ſetzen.

Gewöhnlich wird die Höhe a gegeben ſeyn, auf welche die Maſchine das Waſſer bringen ſoll, und daraus ergiebt ſich $M = \frac{F\alpha T}{a}$, wenn das mechaniſche Moment der Kraft $F\alpha$ bekannt iſt. Die Wahl

der

der Kraft, welche die Maſchine treiben ſoll, wird von der Beſchaffenheit des Orts, wo die Maſchine angelegt werden ſoll, und andern eintretenden Umſtänden abhängen. Nachdem man dies durch Menſchen, Pferde, oder vermittelſt des Waſſers bewerkſtelligen will, wird man die im 317. 318. 319 §. vorkommenden Anmerkungen, nebſt den Lehren des XXIV. Abſchnitts der Mechanik, imgleichen des VII und IX. Abſchnitts der Hydraulik gebrauchen müſſen, α zu beſtimmen. Uebrigens ſind nun in der Gleichung $t = \frac{T.k^2\lambda}{M}$ drey Gröſſen, t, k^2 und λ, vorhanden, wovon man zwey willkührlich beſtimmen kan: jedoch iſt man dabey an folgende Einſchränkungen gebunden.

Man beſtimmet λ, wenn man die Winkel η, ϑ, und den Halbmeſſer r der Spindel beſtimmt, von der Axe der Spindel bis an die centriſche Linie der um die Spindel geführten Röhre gerechnet. Es ſey die Länge der Spindel $Oo = l$, ſo iſt $\sin\vartheta = \frac{a}{l}$. Je kleiner alſo l genommen wird, deſto gröſſer wird $\sin\vartheta$. Man ſiehet leicht, daß es vortheilhaft ſey, l ſo klein zu nehmen, als die übrigen Umſtände zulaſſen, weil dadurch nicht allein ein Theil der Koſten erſpart, ſondern auch das Gewicht der Schnecke, folglich zugleich die Friction an ihren Zapfen vermindert wird. Aber man darf auch l nicht zu klein nehmen, damit $\sin\vartheta$ nicht zu groß werde, und dies aus zweyen Urſachen. Einmahl muß $\tan\vartheta \tan\eta < 1$ ſeyn, damit die Schnecke würklich Waſſer ſchöpfen könne, (489 §.) und fürs zweyte wird der Waſſerhaltende

Bogen deſto gröſſer, je kleiner $\tan g\vartheta \tan g\eta$ bleibt (495 §.). Nimmt man $\vartheta = 60°$, wie Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. IX. pag. 189. vorſchlägt, ſo iſt $l = \frac{a}{\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ beſtimmt. Alsdenn aber muß $\eta < 90° - \vartheta$, alſo $\eta < 30°$ ſeyn. Je kleiner man η nimmt, deſto länger wird der Waſſerhaltende Bogen in Vergleichung mit der Gröſſe eines Schraubenganges. Deswegen ſchlägt Bernoulli a. a. O. vor, man ſoll $\eta = 5°$ ſetzen: doch dürfte dieſer Winkel faſt zu klein ausfallen, dafern die Röhre nicht ziemlich eng werden ſoll; oder der Halbmeſſer der Spindel muß etwas gröſſer wie gewöhnlich ſeyn, damit die Gänge nicht zu nahe aneinander kommen. Beyde Winkel η und ϑ zuſammen beſtimmen hiernächſt die Bogen $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{\beta}{r}$ (495 §), wofür ich ε und ζ ſetzen ſchreiben will, da dann $\lambda = (\zeta - \varepsilon) r \sec\eta$ wird, und r noch unbeſtimmt bleibt.

Man brauche nun dieſen Werth ſtatt λ in der Gleichung $k^2 \lambda T = Mt$, ſo hat man $k^2 T (\zeta - \varepsilon) r \sec\eta = Mt$, und es können nun zwey von den dreyen Gröſſen k^2, r und t willkührlich angenommen werden. Es iſt nicht rathſam, daß die Schnecke ſchnell umlaufe, weil ſonſt der unterſte Waſſerhaltende Bogen ſich nicht gehörig füllen würde, deswegen iſt es am beſten, k^2 und r ſo zu beſtimmen, daß t nicht kleiner als 4 Secunden werde. Man hat alsdenn $k^2 r = \frac{Mt}{(\zeta - \varepsilon) T \sec\eta}$, da dann wiederum k^2 oder r willkührlich genommen werden kan, wobey aber zu erwegen bleibt, daß k^2 nicht zu klein ausfallen müſſe, damit

damit das Waſſer einen völlig freyen Durchgang behalte, und ſich keine Unreinigkeiten in der Röhre anſetzen. Ueberhaupt iſt es allemahl am rathſamſteu, daß *r* nicht zu groß ausfalle.

502 §.

So wie ich bisher die Theorie von der Waſſerſchraube vorgetragen habe, iſt ſie von den meiſten mir bekannten Schriftſtellern gleichfalls betrachtet worden. Es gehört dahin ein Aufſatz des Hrn. *Pitot*: Theorie de la vis d'Archimede avec le calcul de l'effet de cette machine, in den Memoires de l'Academie de Paris A. 1736. p. 238. ed. Bat. und des Herrn Daniel Bernoulli Commentationes ſpeciales de cochlea Archimedis in der Hydrodyn. Sect. IX. pag. 183. ſqq. Der Verfaſſer der Diſſertation ſur ces queſtions comment l'eau ſ'éleve-t-elle dans la vis d'Archimede? & quels ſeroient les moyens de porter cette machine a ſa perfection? welche die Berlinſche Akademie der Wiſſenſchaften dem Abdruck der Hennertſchen Preisſchrift über dieſe Fragen beyfügen laſſen, bleibt bey demſelben Vortrag dieſer Theorie, und enthält nichts neueres. Das neueſte hieher gehörige Werk: Theoria cochleæ Archimedis ab obſervationibus experimentis & analyticis rationibus ducta, auctore *Jacobo Bellogrado*, Societ. Jeſu. Parma 1767. kenne ich nur aus Recenſionen, und habe es noch nicht erhalten können. Von demjenigen, was die hieher gehörigen Aufſätze der Herren Euler und Hennert enthalten, werde ich bald mehr Nachricht ertheilen.

503 §.

Man nimmt nach der bisher vorgetragenen Theorie an, es trete bey jedem Umlauf der Spindel ſo viel Waſſer in die Schnecke hinein, als der Waſſerhaltende Bogen faſſen kan, vorausgeſetzt, daß die Schnecke grade ſo tief unter Waſſer ſtehe, als die im 492 §. vorgetragene Rechnung erfordert. Dieſen Umſtand, daß die Grundfläche der Schnecke nicht ganz unter Waſſer ſtehen müſſe, ſchreibt **Bernoulli** ausdrücklich vor, und ihm folgt darin der Verfaſſer des Aufſatzes, welchem die Akademie zu Berlin das Acceſſit zuerkannt hat. Andre Schriftſteller, dahin Pitot gehört, ſchreiben es zwar nicht ausdrücklich vor, daß die Grundfläche nicht ganz unter Waſſer ſtehen müſſe, ſie berechnen aber doch die Würkung ſo, daß ſie keinen ununterbrochenen Guß des Waſſers aus der obern Mündung der Schraube annehmen, ſondern nur bey jedem Umlauf ſo viel, als der waſſerhaltende Bogen faſſen kann. Man wird demnach nun natürlich auf die Frage kommen: **Ob denn die Waſſerſchraube ihre Dienſte nicht leiſte, wenn ihre Grundfläche ganz unter Waſſer ſtehet, oder ob nicht vielmehr alsdenn das Waſſer ununterbrochen durch die Röhre flieſſen, folglich dieſe Einrichtung noch vortheilhafter, als die vorige ſeyn werde?** Die Gründe, worauf die Unterſuchung über dieſe Frage gebauet werden muß, ſind völlig einerley mit denjenigen, worauf die Auflöſung der Aufgaben des 464. 465 und 466 §. beruhet. Eben dieſe ſind es, worauf Hr. **Euler** ſeine Unterſuchungen gebauet hat in der Abhandlung: De cochlea Archimedis, Comment. Nov. Petrop. T. V. p. 259. ſqq. Dieſelbe Theo-

Theorie legt Hr. Hennert zum Grunde in der Diſſertation, ſur la vis d'Archimede, qui a remporté le prix de Mathématique adjugé par l'Académie royale des ſciences et belles lettres de Pruſſe en 1766. Ich werde die Reſultate, welche beyde Schriftſteller herausbringen, mit einander vergleichen, da ſich dann ergeben wird, daß Hr. Hennerts Vortrag ſehr wichtigen Erinnerungen ausgeſetzt ſey, und die Theorie von der Waſſerſchraube durch dieſe Preisſchrift nichts gewonnen habe.

Der XXXVII. Abſchnitt.

Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit des durch die Waſſerſchraube flieſſenden Waſſers.

504 §.

Die Umlaufsgeſchwindigkeit der Spindel nebſt der relativen Geſchwindigkeit des Waſſers in der umwundenen Röhre ſind gegeben: man ſucht die Beſchleunigung des Elements *M* nach der Richtung *Mv*.

Aufl. Es ſey die relative Geſchwindigkeit des Waſſers nach der Richtung $Mv = \surd v$, ſo iſt wegen dieſer Bewegung die Beſchleunigung des Elements 7 Fig.

M nach der Richtung $Mm = \frac{2}{dt} d.\surd v = \frac{dv}{dt\surd v}$.

Dieſer Ausdruck gilt unbeſtimmt für jedes Element M, weil alle Querſchnitte der Röhre gleich groß ange-

genommen werden. Ferner ſey die Geſchwindigkeit eines jeden Elements M, womit es in ſeinem Kreiſe nach der Richtung Mu herum läuft $= \sqrt{u}$, ſo entſteht daraus nach der Richtung Mv die Geſchwindigkeit $\cos\eta \sqrt{u}$, und dieſe erfordert nach der Richtung Mm die Beſchleunigung $\frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$. Iſt alſo die geſammte Beſchleunigung des Elements M nach der Richtung Mv = V, ſo hat man $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$, dafern die Spindel nach der Richtung BPA umläuft. Liefe ſie gegen APB zu, ſo müſte $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} + \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ ſeyn.

M. ſ. H. Eulers Aufſatz am angeführten Ort §. 9. woſelbſt eben dieſe Formul aus H. Eulers Rechnungen flieſt, welche mit den im 464 §. vorgetragenen Rechnungen auf einerley Gründen beruhen. Wenn man dort in der Gleichung, welche am Ende herauskommt, $q = b$, $f^2 = z^2$, und $dq = 0$ ſetzt, ſo erhält man ebenfals denſelben Ausdruck für V, weil das dortige ϑ hier η iſt.

Man ſetze $Ba = \alpha$, $aP = A$, alſo $BP = \alpha - A$, ſo iſt $aM = \frac{A}{\cos\eta}$, und wenn eben dies Stück der Schraubenlinie $= s$ geſetzt wird, ſo iſt $\sqrt{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt\cos\eta}$, folglich $\frac{2}{dt} d.\sqrt{v} = \frac{2}{dt\cos\eta} d.\frac{dA}{dt}$. Ferner wird $\sqrt{u} = \frac{d\alpha}{dt}$,

alſo

alſo $\frac{2\cos\eta}{dt} d.\sqrt{u} = \frac{2\cos\eta}{dt} d.\frac{d\alpha}{dt}$. Dies giebt, $V = \frac{2}{dt\cos\eta} d.\frac{dA}{dt} - \frac{2\cos\eta}{dt} d.\frac{d\alpha}{dt}$, und wenn man das poſitive Glied in dieſem Ausdruck mit $\sin\eta^2 + \cos\eta^2 = 1$ multiplicirt, ſo wird auch

$$V = -\frac{2\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2\sin\eta \tan\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt}.$$

M. ſ. die angeführte Hennertſche Preisſchrift §. 10. p. 71.

505 §.

Die von der Schwere abhängende Beſchleunigung des Elements M nach der Richtung Mv zu finden.

Aufl. Wenn dM das Gewicht des Elements bezeichnet, ſo entſteht daher der Druck nach der Richtung $MX = dM\cos\vartheta$. Dieſe Richtung ſchlieſt mit der Tangente des Kreiſes ZMz, die durch M gehet, einen Winkel $= 90° - ZYM = 90° - BOP$ ein, und es iſt $BOP = \frac{\alpha - A}{a}$, wenn a den Halbmeſſer der Spindel bezeichnet. Zerlegt man alſo die Kraft MX nach der Richtung der Tangente und auf ihr ſenkrecht, ſo wird jene $=$

$$dM\cos\vartheta \cos(90° - BOP) = dM\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a}.$$

Mit der Richtung dieſer Tangente ſchlieſt Mv den Winkel η ein; alſo entſpringt hieraus nach der Richtung

tung Mv die Kraft $dM\cos\vartheta \sin\frac{\alpha-A}{a}\cos\eta$. Ferner entſpringt aus dem Gewicht dM nach MP der Druck $dM\cos TMP = dM\sin\vartheta$, und dieſer giebt nach der Richtung Mv den Druck $-dM\sin\vartheta\sin\eta$. Daher iſt der deſamte Druck nach der Richtung Mv $= dM\left(\cos\vartheta\sin\frac{\alpha-A}{a}\cos\eta - \sin\vartheta\sin\eta\right)$, und die Beſchleunigung wird gefunden, wenn man durch dM dividirt.

506 §.

Den Druck zu finden, den jedes Element M wegen der Zuſammenpreſſung des Waſſers leidet.

Aufl. Wenn h^2 jeden Querſchnitt der Röhre bezeichnet, und h^2p der Druck iſt, den das Element M nach der Richtung Mv leidet, ſo wird eben daſſelbe Element nach entgegengeſetzter Richtung den Druck $h^2(p+dp)$ leiden, und daraus entſteht nach der Richtung Mv die Beſchleunigung $= -\frac{h^2dp}{dM} = -\frac{dp\cos\eta}{dA}$, weil $dM = \frac{h^2dA}{\cos\eta}$ iſt. Die von dem Gewicht des Elements herrührende Beſchleunigung nach Mv iſt $\cos\vartheta\sin\frac{\alpha-A}{a}\cos\eta - \sin\vartheta\sin\eta$ (505 §.), folglich die geſammte Beſchleunigung nach dieſer Richtung $= \cos\vartheta\sin\frac{\alpha-A}{a}\cos\eta - \sin\vartheta\sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA}$. Dieſe Beſchleunigung muß nun dem

Werth

Werth von V im 504 §. gleich ſeyn: alſo erhält man folgende Gleichung:

$$\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a}\cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA}$$

$$= -\frac{2\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)$$

$$+ \frac{2\sin\eta \tan g\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt}$$ (459 §.) Wofern man diese Gleichung integriren kan, ſo iſt p gefunden. Weil man aber nur für einen gegebenen Augenblick der Zeit t den Druck p ſucht, ſo muß t, alſo auch der davon abhängende Bogen α als eine beſtändige Gröſſe betrachtet werden. Man überſieht leichter, wie das Integral gefunden werde, wenn man

$$\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta$$ ſtatt

$$-\frac{2\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)$$

$$+ \frac{2\sin\eta \tan g\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt}$$ ſchreibt (504 §.)

Dies giebt

$$\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a}\cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA} =$$

$$\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta,$$ woraus $dp\cos\eta =$

$$dA \sin\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - dA\sin\vartheta\sin\eta + \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}dA$$

$$- \frac{dv}{dt\sqrt{v}}dA$$ folgt, und die Integration giebt

 $p\cos\eta$

$$p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta$$

$$+ \frac{A\,du\cos\eta}{dt\sqrt{u}} - \frac{A\,dv}{dt\sqrt{v}}.$$ Eben die Gleichung findet Hr. Euler a. a. O. 12 §. 271 S. Bey ihm iſt das q was hier p heiſt, $\sqrt{u}$ hat das entgegengeſetzte Zeichen, weil er die Spindel nach APB umlaufen läſt, und s iſt bey ihm was hier A heiſt. Ueberdem iſt bey ihm $Aa = p$, alſo $AP = p + s$, hier aber iſt $BP = \alpha - A$, alſo $\alpha - A = \pi a - p - A$, oder $\alpha = \pi a - p$, und man hat

$$\sin\frac{(\alpha - A)}{a} = \sin\frac{p+s}{a},\ \cos\frac{\alpha - A}{a} = - \cos\frac{p+s}{a}.$$ Noch iſt beym Hrn. Euler der Winkel $ABS = \vartheta$, alſo die Ergänzung desjenigen zu 90°, der hier ϑ heiſt.

Hr. Hennert a. a. O. 14 §. 74 S. ſchreibt ſtatt $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}$ den obenſtehenden Ausdruck durch α und A. Dies giebt

$$p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta$$

$$+ \frac{2A\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)$$

$$- \frac{2A\sin\eta\tan g\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt},$$ und dieſe Gleichung müſte mit der Hennertſchen a. a. O. einerley ſeyn. Aber Herrn Hennerts Gleichung iſt hievon gänzlich

ſich verſchieden, und der Grund der Verſchiedenheit liegt darin. Die Differentialgleichung

$$\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{dA} =$$

$$-\frac{2\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2\sin\eta \tan\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt}$$

muß man mit dA multipliciren, ſo erhält man

$$dA \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - dA \sin\vartheta \sin\eta - dp \cos\eta =$$

$$-2dA \cos\eta \times \frac{1}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)$$

$$+2dA \sin\eta \tan\eta \times \frac{1}{dt} d.\frac{dA}{dt}.$$ Was von t abhängt, alſo auch α, muß nun bey der Integration unveränderlich bleiben, es muß ſich nur A und p ändern, ſo erhält man

$$A \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta - p \cos\eta + C =$$

$$-\frac{2A\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2A \sin\eta\, tg\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt},$$

und dies iſt völlig die vorige Gleichung. Hr. Hennert aber multiplicirt mit $d\alpha - dA$, und erhält

$$(d\alpha - dA) \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - (d\alpha - dA) \sin\vartheta \sin\eta$$

$$-\frac{dp\, d\alpha \cos\eta}{dA} + dp \cos\eta =$$

$$-\frac{2(d\alpha - dA)\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)$$

$$+ \frac{2(d\alpha - dA)\,\mathit{ſin}\eta\,\mathit{tang}\eta}{dt}\, d \,.\, \frac{dA}{dt}.$$

Nun integrirt er ſo, daß nicht allein dA, ſondern auch $d\alpha$, ja $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{dA}{dt}$ veränderlich angenommen werden, und dies giebt

$$-a\,\mathrm{coſ}\frac{\alpha - A}{a}\,\mathrm{coſ}\vartheta\,\mathrm{coſ}\eta - (\alpha - A)\,\mathrm{ſin}\vartheta\,\mathrm{ſin}\eta$$

$$-\int \frac{dp\,d\alpha\,\mathit{coſ}\eta}{dA} + p\,\mathit{coſ}\eta + C =$$

$$-\frac{\mathit{coſ}\eta}{dt}\, d\,.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2$$

$$+ 2\,\mathrm{ſin}\eta\,\mathrm{tang}\eta\left(\int\frac{1}{dt}\,d\alpha\, d.\frac{dA}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right).$$

Dies Verfahren iſt der Theorie ganz entgegen, und es verleitet den Hn. Hennert zu einer ganz falſchen Auflöſung ſeiner Haupt-Aufgabe.

507 §.

Ich werde demnach berechtiget ſeyn, die erſte richtige Gleichung, welche mit Hn. Eulers Gleichung überein kommt, in der Folge zu gebrauchen, da dann vor allen Dingen nun erfordert wird, die beſtändige Gröſſe C zu beſtimmen. Wenn dies geſchehen ſoll, ſo muß man zuförderſt feſtſetzen, ob die Waſſerſchnecke während des ganzen Umlaufs beſtändig mit Waſſer angefüllt angenommen werden ſoll, oder ob man annehmen will, daß von jedem Schraubengange nur ein Theil angefüllt ſey. Hr. Hennert ſetzt das erſte voraus, und Hr. Euler berechnet beyde Fälle beſonders.

ders. Nimt man die erſte Vorausſetzung an, daß die Schnecke ganz mit Waſſer angefüllet ſey, welches in die untere Oefnung ununterbrochen hinein, und aus der obern wieder heraus flieſt, ſo muß man auch zum Grunde ſetzen, daß die ganze Grundfläche ſich beſtändig unter Waſſer befinde, damit die untere Oefnung nie über dem Waſſer herauf ſteige. Dies widerſpricht der Vorſchrift des 492 §. nicht; denn dort ward vorausgeſetzt, daß ſich bey jedem Umlauf nur der Waſſerhaltende Bogen füllen, und die Schnecke nicht ununterbrochen flieſſen ſolle: die gegenwärtige Unterſuchung ſoll zur Prüfung dienen, ob ein ununterbrochener Fluß des Waſſers durch die Schnecke erhalten werden könne. Iſt nun PM $= y$, ſo hat man $y = A \times \tang\eta$, und $A = y \cot\eta$: wenn demnach die ganze Länge der Schraube $Oo = b$ iſt, ſo gehört der obern Oefnung bey C die Ordinate $y = b$, und der Bogen $A = b \cot\eta$ zu. Weil hier das Waſſer ausflieſt, ſo muß $p = 0$ ſeyn, wenn $A = b \cot\eta$ iſt. (Den Druck der Atmoſphäre kan man beyſeit ſetzen, weil die obere Oefnung der Schnecke wenige Fuß über die untere erhaben iſt). Setzt man dieſe Werthe in die für p gefundene Gleichung, ſo erhält man

$$C = -a \cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta$$

$$+ b \sin\vartheta \cos\eta - \frac{bdu \cot\eta \cos\eta}{dt\sqrt{u}} + \frac{bdv \cot\eta}{dt\sqrt{v}}.$$

Wenn man hiemit die Vorausſetzung verbindet, daß die Umlaufsbewegung der Spindel einmahl gleichförmig werde, und man ſucht die Bewegung des Waſſers in der Schnecke nur für dieſen Zuſtand der

Maſchine; ſo kan man das, was in du multiplicirt iſt, aus der Gleichung weglaſſen, weil für dieſen Zuſtand $du = 0$ iſt.

508 §.

Die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Schnecke zu finden, vorausgeſetzt, daß die untere Oefnung beſtändig unter Waſſer bleibe, daß ferner das Waſſer ununterbrochen durch die Röhre flieſſe, und die Umlaufs-Geſchwindigkeit ſchon unveränderlich ſey.

Aufl. Für die untere Oefnung bey a, wo das Waſſer hineintritt, ſey $p = \Pi$, ſo iſt zugleich $A = 0$, und man erhält

$$\Pi \operatorname{coſ}\eta = C + a \operatorname{coſ}\frac{\alpha}{a} \operatorname{coſ}\vartheta \operatorname{coſ}\eta.$$

Setzt man hier ſtatt C den im vor. §. gefundenen Werth, und dividirt durch $\operatorname{coſ}\eta$, ſo wird

$$\Pi = a \operatorname{coſ}\frac{\alpha}{a} \operatorname{coſ}\vartheta - a \operatorname{coſ}\frac{\alpha - b \cot\eta}{a} \operatorname{coſ}\vartheta + b \operatorname{ſin}\vartheta$$

$+ \frac{b\,dv}{\operatorname{ſin}\eta\, dt \sqrt{v}}$. Um Π zu finden, muß man zuerſt einen Ausdruck für die Tiefe der Oefnung a unter Waſſer ſuchen, der ſich aus den Formuln des 490 §. ergiebt. Es iſt nemlich die Höhe eines jeden Punkts M über eine durch B horizontal gelegte Ebene

$$= (AP - Aa) \operatorname{tang}\eta \operatorname{ſin}\vartheta + a \left(1 + \operatorname{coſ}\frac{AP}{a}\right) \operatorname{coſ}\vartheta,$$

weil das dortige r hier a heiſt. Für den Punkt a iſt $AP = Aa = a\pi - \alpha$, alſo wird des Punkts a Höhe über die durch B horizontalliegende Ebene

=

$= a\left(1 + \cos\frac{a\pi - \alpha}{a}\right)\cos\vartheta$. Iſt nun die Höhe des Waſſers über dem Mittelpunkt der Grundfläche $= c$, ſo iſt die Höhe des Waſſers über B $= c + a\cos\vartheta$, folglich die Tiefe des Punkts a unter Waſſer $= c - a\cos\frac{a\pi - \alpha}{a}\cos\vartheta$, oder $= c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta$. Weil nun das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $\surd v$ in a hinein flieſt, ſo gehört der Druck für dieſe Stelle der Höhe $c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta - v$ zu (215 §.). Dies ſtatt Π geſetzt, giebt die Gleichung

$$c = -a\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{bdv}{\sin\eta dt\surd v} + v.$$

Eben dieſe Gleichung findet Hr. Euler a. a. O. §. 40. p. 295. Um die Vergleichung anzuſtellen, muß man ſich aus dem 506 §. erinnern, daß das hieſige α beym Hrn. Euler $= a\pi - p$, alſo $\alpha - b\cot\eta = a\pi - p - b\cot\eta$, folglich $\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} = -\cos\frac{(p + b\cot\eta)}{a}$ ſey. Dies giebt H. Eulers Ausdruck

$$c = a\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{bdv}{\sin\eta dt\surd v} + v.$$

Hiebey mögte nun noch folgendes zu erinnern

 ſeyn.

ſeyn. Der Werth von Π ſcheint wegen der Umlaufsbewegung noch einer Verbeſſerung zu bedürfen: wenigſtens alsdenn, wenn die Schraube nach BPA zu läuft, ſcheint der Druck gegen die untere Oefnung gröſſer zu ſeyn, als er vorhin in Rechnung gebracht iſt. Wenn die Umlaufsbewegung ſchon gleichförmig geworden iſt, und man ſetzt alsdenn die Geſchwindigkeit der untern Oefnung, womit ſie jetzt im Kreiſe umläuft, $= \sqrt{k}$; ſo ſcheint es, daß man $\Pi =$ $c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta + k - v$ ſetzen müſſe, und dies um deswillen, weil aus dem Anſtoß der untern Oefnung an die im Wege liegenden Waſſertheilchen noch ein Druck entſteht, welcher der Höhe k zugehört (301 §. Mech.). Ich will mich hierüber noch etwas näher erklären. Hätte es mit dieſer Erinnerung ſeine Richtigkeit, ſo würde es auf die folgenden Rechnungen weiter keinen Einfluß haben, als daß man $c + k$ ſtatt c ſchreiben müſte.

509 §.

Setzt man den Winkel $AOa = \varphi$, alſo $Aa = a\pi - \alpha = p = a.\varphi$; ſo wird $d\alpha = -ad\varphi$; und weil nun $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ iſt, ſo erhält man $dt = -\frac{ad\varphi}{\sqrt{k}}$.

Setzt man ferner $\frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$, oder $b\cot\eta = a\gamma$, und $b = a\gamma\tan g\eta$; ſo erhält man $\frac{b}{\sin\eta dt} =$ $-\frac{\gamma\sqrt{k}}{\cos\eta d\varphi}$, folglich $c = a\cos(\varphi + \gamma)\cos\vartheta$

+

$+ a\gamma \operatorname{tang}\eta \sin\vartheta - \frac{\gamma dv\sqrt{k}}{\cos\eta\, d\phi\sqrt{v}} + v$. Noch ſetze man $2\sqrt{kv} = z$, alſo $v = \frac{zz}{4k}$, und $dv = \frac{zdz}{2k}$, $dv\sqrt{k} = \frac{zdz}{2\sqrt{k}}$, folglich $\frac{dv\sqrt{k}}{\sqrt{v}} = dz$. Dieſe Werthe in die gefundene Gleichung geſetzt, geben

$$c \cos\eta\, d\phi = a \cos(\phi + \gamma) \cos\vartheta \cos\eta\, d\phi$$

$$+ a\gamma \sin\eta \sin\vartheta\, d\phi - \gamma dz + \frac{zz}{4k} d\phi \cos\eta, \quad \text{oder}$$

$$-\gamma dz + \frac{zz}{4k} d\phi \cos\eta + a d\phi \cos(\phi + \gamma) \cos\vartheta \cos\eta$$

$$= (c \cos\eta - a\gamma \sin\eta \sin\vartheta)\, d\phi.$$

Die bisher bekannten Kunſtgriffe der Integralrechnung reichen nicht hin, dieſe Gleichung vermittelſt der Integration aufzulöſen, und eine Gleichung zwiſchen z und ϕ zu finden, ohne nur in dem Fall, wenn die Spindel vertical ſteht, alſo $\sin\vartheta = 1$, und $\cos\vartheta = 0$ iſt. Alsdenn hat man

$$-\gamma dz + \frac{zz}{4k} d\phi \cos\eta = (c . \cos\eta - a\gamma \sin\eta)\, d\phi,$$

oder wenn $\frac{b \cot\eta}{a}$ ſtatt γ wieder geſetzt wird,

$$- \frac{b}{a \sin\eta} dz + \frac{zz}{4k} d\phi = (c - b)\, d\phi;$$

woraus $\frac{a \sin\eta}{b} d\phi = - \frac{4k d\phi}{4k(c-b) - zz}$ folgt,

oder auch

$$\frac{a\, \mathit{ſin}\, \eta \sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\, d\varphi = -\frac{dz : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - zz : 4k(c-b)}.$$

Das Integral hievon iſt

$$\frac{a\, \mathit{ſin}\, \eta \sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\, \varphi = C - \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1 + z : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - z : \sqrt{4k(c-b)}},$$

(319 §. Mech.) und weil $\frac{z}{\sqrt{4k}} = \sqrt{v}$ war, ſo erhält man

$$\frac{a\, \mathit{ſin}\, \eta \sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\, \varphi = C - \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}}.$$

Die beſtändige Grösſe C muß aus dem anfänglichen Zuſtande der Bewegung beſtimmt werden. Nimmt man an, daß $\sqrt{v} = 0$ ſey, wenn $\varphi = 0$ iſt, ſo wird $C = 0$. Beym Fortgang der Bewegung, wenn nun die untere Oefnung von A durch α, b, B u. ſ. f. umläuft, wird φ negativ, und dies giebt

$$l\, \frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}} = \frac{2a\, \mathit{ſin}\, \eta \sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}} \cdot \varphi.$$

Man ſetze, um abzukürzen, dieſen Ausdruck $= \psi$, ſo wird $\frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}} = e^{\psi}$, und man findet

$$\sqrt{v} = \frac{e^{\psi} - 1}{e^{\psi} + 1} \sqrt{(c-b)}.$$

510 §.

Wenn man nun aus dieſer Gleichung Schlüſſe ziehen wollte, ſo wäre vornemlich zu erwegen, in wie weit die angenommene Beſtimmungen für den

anfänglichen Zuſtand der Bewegung beſtehen können. Es iſt angenommen worden, daß dem Werth $\varphi = 0$ der Werth $v = 0$ zugehöre, und dieſe Vorausſetzung würde ihre Anwendung finden, wenn man annähme, die Schnecke ſey anfangs ganz mit Waſſer angefüllt, und die untere Oefnung verſchloſſen geweſen, hierauf aber, nachdem die Schnecke beym Umlauf um ihre Axe, und mit ihr das Waſſer in der Röhre ſchon die Geſchwindigkeit $\sqrt{k}$ erreicht hatte, die untere Mündung plötzlich eröfnet worden. In Fällen alſo, wo es mit der Bewegung des Waſſers dieſe Bewandniß hätte, würde die Gleichung $\sqrt{v} = \frac{e^{\psi} - 1}{e^{\psi} + 1} \sqrt{(c-b)}$ ihre Anwendung finden: und weil der Werth von e^{ψ} mit φ ſehr ſchnell wächſt, ſo würde die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre ſehr bald unveränderlich, und $\sqrt{v} = \sqrt{(c-b)}$ werden. Dieſe beſtändige Geſchwindigkeit würde man auch aus der Differentialgleichung finden, wenn man $d\varphi = 0$ ſetzte. Ueberhaupt aber iſt bey dieſer Rechnung angenommen worden, daß $c > b$, oder vielmehr der am Ende des 508 §. beygefügten Erinnerung gemäß, daß $c + k > b$ ſey. (Wenn c allein die Höhe des Waſſers über den Mittelpunkt der Grundfläche bedeutet, ſo iſt allemahl $c < b$).

Wenn $b > c$ iſt, (man kan hier auch $c + k$ ſtatt c verſtehen) ſo verwandelt ſich die Differentialgleichung in folgende

$$\frac{a \sin n \sqrt{(b-c)}}{b\sqrt{4k}} d\varphi = \frac{dz : \sqrt{4k(b-c)}}{1 + zz : 4k(b-c)},$$

und

und die Integration giebt

$$\frac{a\,ſin\,\eta\sqrt{(b-c)}}{b\sqrt{4k}}\varphi = C + A\,tang\,\frac{z}{\sqrt{4k(b-c)}},$$

da dann wiederum C = o iſt, wofern v und φ zugleich verſchwinden müſſen. Bey dieſer Vorausſetzung wird alſo $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}} = A\,tang\,\frac{a\,ſin\,\eta\sqrt{(b-c)}}{\sqrt{4k}}\varphi$ gefunden. Weil nun beym Fortgang der Bewegung auch hier der Winkel φ negativ wird, ſo erhellet, daß $\sqrt{v}$ gleich vom erſten Augenblick der Bewegung negativ werde, folglich das Waſſer ſogleich anfangen müſſe, zurück nach unten zu flieſſen. Uebrigens aber kan die Gleichung nicht dienen, beym Fortgang der Bewegung die Geſchwindigkeit des zurückflieſſenden Waſſers daraus zu berechnen, weil die Rechnung im 507 §. vorausſetzt, daß die Röhre beſtändig voll Waſſer bleibe.

511 §.

Es ließ ſich vorausſehen, daß die Rechnung dies Reſultat geben müſſe, wofern aus dem beſtändigen Anſtoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Waſſertheilchen nicht ein ſolcher Druck entſteht, der das Waſſer hinauf zu treiben nicht vermögend iſt. Aus der Schwungbewegung um die Axe der Spindel können hier gar keine Kräfte entſtehen, die das Waſſer hinauf treiben, weil die Richtung aller Schwungkräfte hier auf der centriſchen Linie der Röhre ſenkrecht iſt, und die geſamte Wirkung der Schwungkräfte hier von der Röhre ſelbſt völlig aufgehalten wird. Vermittelſt der Maſchine des Herrn *de Mour*, worüber Hr. Euler in der Hiſtoi-

re

re de l'Academie de Berlin A. 1751 p. 303 ſqq. eine umſtändliche Unterſuchung angeſtellet hat, wird das Waſſer deswegen zum Steigen gebracht, weil die Richtung der Schwungkräfte auf der centriſchen Linie der Röhre nicht ſenkrecht iſt, und daher ihre Würkung von der Röhre nicht ganz aufgehoben werden kan. Was übrigens den Druck gegen die untere Mündung der um die Spindel gewundenen Röhre betrift, ſo müſte man bey einer genauern Rechnung noch erwegen, daß dieſer Druck beym Fortgang der Bewegung nicht unveränderlich bleiben würde. Durch den Umlauf der Waſſerſchnecke wird auch dem Waſſer an der Stelle, wo die Schraube ſteht, eine wirbelförmige Bewegung ebenfals nach BPA zu mitgetheilt. Wegen dieſer eigenen Bewegung der Waſſertheilchen, welche der untern Mündung unterweges aufſtoſſen, hängt die Würkung des Stoſſes nur von der reſpectiven Geſchwindigkeit des Waſſers ſelbſt ab, die alſo ſo lange veränderlich bleiben würde, als ſich noch die Geſchwindigkeit des Waſſers ändert. Wenn alles ſoweit in den Beharrungsſtand gekommen wäre, daß das Waſſer in demſelben Kreiſe, den die untere Mündung durchläuft, ebenfals mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{k}$ umliefe, ſo würde weiter kein Druck gegen die Mündung wegen des Anſtoſſes entſtehen. Demnach könte das Waſſer in der Schnecke gar nicht ſteigen.

512 §.

Ob nun gleich der bisher betrachtete Fall, wenn die Waſſerſchraube vertical ſtehet, in der Ausübung nicht vorkommt, weil ſie allemahl gegen den Horizont ſchief gelegt wird; ſo dienen doch die bisherigen Schlüſſe dazu, auch ohne weitere Rechnung zu überſehen,

ſehen, was bey der geneigten Lage der Spindel erfolgen müſſe. Auch in dieſem Fall können die Schwungkräfte dazu nichts beytragen, daß das Waſſer in der Röhre zu ſteigen genöthiget werde. Wenn dies erfolgen ſollte, ſo müſte der von dem Anſtoß der untern Mündung an das Waſſer herrührende Druck es zuwege bringen, der jedoch veränderlich ſeyn, mit dem Fortgang der Bewegung abnehmen, und zuletzt gar aufhören würde. Es ſcheint alſo, daß man hieraus mit ziemlicher Sicherheit ſchlieſſen könne, die Waſſerſchraube könne das Waſſer nie ununterbrochen heben, was man ihr auch für eine Lage gegen den Horizont geben wollte. Hr. Euler entſcheidet hierüber nichts, er bricht hier ſeine Unterſuchungen ab, erklärt die Theorie der Waſſerſchraube für ſehr ſchwer, und fordert andre Geometer auf, ihre Kräfte bey dieſer Aufgabe gleichfals zu verſuchen. Eben dies hat auch wohl veranlaſſet, daß von der Königl. Akademie der Wiſſenſchaften zu Berlin im J. 1765 dieſe Aufgabe iſt zur Preisaufgabe aufgegeben worden, und ich werde nun näher prüfen, ob Hr. Hennert die Preisaufgabe aufgelöſet habe.

513 §.

Er nimmt an, die Geſchwindigkeit des Waſſers $\sqrt{v}$ in der Röhre werde beym Fortgang der Bewegung unveränderlich: eine Vorausſetzung, die wie man leicht ſiehet, bewieſen werden muß, bevor ſie als ausgemacht angenommen werden kan. Iſt ſie wahr, ſo muß aus der Differentialgleichung des 509 §. wenn in derſelben $dz = 0$ geſetzt wird, eine Gleichung folgen, die $z = 2\sqrt{kv}$ allein durch beſtändige Gröſſen beſtimmt. Aber die Differentialgleichung

chung giebt $\frac{zz}{4k}\cos\eta + a\cos(\varphi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta = c.(\cos\eta - a\gamma\sin\vartheta\sin\eta)$, wenn $dz = 0$ geſetzt wird, woraus $\frac{zz}{4k} = v = c - a\gamma\tang\eta\sin\vartheta - a\cos(\varphi+\gamma)\cos\vartheta$ folgen würde. Weil dieſer Ausdruck offenbar von der veränderlichen Gröſſe φ abhängt, ſo widerſpricht die Folge der Vorausſetzung, und ergiebt ſich, daß die Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ nie unveränderlich werden könne. Dieſe Gleichung würde alſo nur nach Beſchaffenheit der Umſtände einen gröſten oder kleinſten Werth geben. Ja wenn c nichts weiter, als die Tiefe bedeutet, um welche der Mittelpunct der Grundfläche unter Waſſer ſteht, ſo würde ſogar $\sqrt{v}$ unmöglich werden. Es war nemlich $a\gamma = b\cot\eta$ (509 §.) alſo würde $v = c - b\sin\vartheta - a\cos(\varphi+\gamma)\cos\vartheta$ negativ werden, weil $b\sin\vartheta > c$ iſt.

514 §.

Man wird ſich aber aus dem 506 §. erinnern, daß Hr. Hennert wegen eines Verſehens bey der Integration der Gleichung für p eine unrichtige Differentialgleichung für die Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ herausgebracht hat, und deswegen wird man vermuthen, daß aus ſeiner Differentialgleichung vielleicht eine ſolche unveränderliche Geſchwindigkeit folge. Seine Gleichung ſtehet oben am Ende des 506 §., und ich will verſuchen, ob ich ihm in ſeinen Schlüſſen weiter folgen kan. In ſeiner Gleichung, die eigentlich p aus beyden Geſchwindigkeiten des Waſſers und der Umlaufsbewegung beſtimmen ſoll, ſetze man $A = b\cot\eta$ und $p = 0$ dem 507 §. gemäß, das Integral

$\int$

$\int \frac{dp\,d\alpha\,\cos\eta}{dA}$ nehme man ſo, daß es mit p zugleich verſchwindet, und bey eben dieſer Vorausſetzung $A = b\cot\eta$, ſey $-\cos\eta . \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = M$, ſo wie

$$2\sin\eta \tan\eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha d . \frac{dA}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 \right) = N.$$

(Ich muß ſo nachrechnen, wie Hr. Hennert mir vorrechnet, ſonſt müſte hier alles, was von t abhängt, unveränderlich bleiben.) Dies giebt

$$- a \cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta - (\alpha - b\cot\eta)\sin\vartheta \sin\eta$$

$+ C = M + N$, und es wird die beſtändige Gröſſe

$$C = M + N + a\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta$$

$+ (\alpha - b\cot\eta)\sin\vartheta\sin\eta$. Setzt man dieſen Werth ſtatt C in die Hennertſche Integralrechnung im 506 §. ſo müſte nun eine Gleichung herauskommen, woraus ſich p finden lieſſe, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{u}$ und $\frac{dA}{dt} = \cos\eta\sqrt{v}$ (504 §.) als bekannt angeſehen werden. Nach Hr. Hennerts Rechnung würde das nun noch nicht angehen, weil in ſeiner Gleichung noch das Integral $\int \frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA}$ vorkommt, und bey ihm α ſowohl als A veränderlich iſt. Mit dieſem Integral aber wird Hr. Hennert ſo fertig. Er nimmt gleich an, nach Verlauf einiger Zeit werde

nicht allein die Umlaufsgeſchwindigkeit der Spindel, ſondern auch die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre $\sqrt{v}$ unveränderlich, alſo ſey alsdenn $\frac{d\alpha}{d\Lambda} = \frac{\sqrt{u}}{cos\eta\sqrt{v}}$ unveränderlich, und findet dieſer Vorausſetzung gemäß das Integral

$$\int\frac{dpd\alpha cos\eta}{d\Lambda} = \frac{p\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{p\sqrt{k}}{\sqrt{v}},$$

wenn von nun an k ſtatt u geſetzt wird. Ferner wird nun dem 508 §. gemäß in ſo weit ganz richtig angenommen, daß für die untere Mündung der Röhre der Druck der Höhe $c + a cos\frac{\alpha}{a} cos\vartheta - v$ zugehöre, dieſer Werth wird ſtatt p und zugleich $\Lambda = 0$ geſetzt. So müſte nun freylich eine Gleichung herauskommen, woraus v gefunden werden könte: weil aber nach der Hennertſchen Vorausſetzung nun $\sqrt{v}$ ſchon unveränderänderlich ſeyn ſoll, ſo muß man auch $d.\sqrt{v} = 0$, alſo $d.\frac{d\Lambda}{dt} = 0$ ſetzen, und dies müſte alsdenn eine Gleichung zwiſchen v und lauter beſtändigen Gröſſen geben. Es wird mir in der That ſchwer, dem Herrn Hennert in ſeinen Schlüſſen weiter nachzufolgen. Entweder ich verſtehe den 15 §. der Preisſchrift gar nicht, oder Hr. Hennert verſieht ſich hier abermahl, wenn er ſchließt: für die untere Mündung iſt $\Lambda = 0$, alſo auch $\frac{d\Lambda}{dt} = 0$, und $d.\frac{d\Lambda}{dt} = 0$. So viel iſt wahr, daß nach ſeiner Vorausſetzung $d.\frac{d\Lambda}{dt} = 0$ ſey, weil er $\sqrt{v} = \frac{d\Lambda}{dt\, cos\eta}$ unver-

änderlich annimt: aber $dA = 0$ ſetzen, heiſt das hier nicht eben ſoviel, als $\sqrt{v} = 0$ ſetzen? Geſetzt auch, Hr. Hennert wollte antworten, man müſſe bey dieſer Rechnung das A nicht als eine Function von t betrachten, ſondern nur als eine veränderliche Gröſſe, wovon die Geſtalt der Röhre abhängt, ſo iſt es ja doch falſch geſchloſſen: wenn eine veränderliche Gröſſe in einem beſtimten Fall $= 0$ wird, ſo wird auch ihr Differential $= 0$. Hr. Hennerts Schluß wäre richtig, wenn A den unveränderlichen Werth $= 0$ haben müſte, und das iſt hier der Fall gar nicht: Ich muß indeſſen mit H. Hennert weiter rechnen, und ſeinen Schlüſſen gemäß

$$\operatorname{coſ}\eta\left(\frac{d\alpha}{dt}-\frac{dA}{dt}\right)^2=\frac{\operatorname{coſ}\eta\, d\alpha^2}{dt^2}=k.\operatorname{coſ}\eta,$$

und überdem

$$2\operatorname{ſin}\eta\ \operatorname{tang}\eta\left(\int\frac{1}{dt}d\alpha\, d\,.\frac{dA}{dt}-\tfrac{1}{2}.\frac{dA^2}{dt^2}\right)=0$$

ſetzen. Wenn ich alsdenn Kürze halber Π ſtatt $c + a\operatorname{coſ}\frac{\alpha}{a}\operatorname{coſ}\vartheta - v$ ſchreibe, ſo verwandelt ſich H. Hennerts Gleichung (506 §.) in folgende:

$$-a\operatorname{coſ}\frac{\alpha}{a}\operatorname{coſ}\vartheta\operatorname{coſ}\eta-\alpha\operatorname{ſin}\vartheta\operatorname{ſin}\eta-\frac{\Pi\sqrt{k}}{\sqrt{v}}+\Pi\operatorname{coſ}\eta$$

$$+M+N+a\operatorname{coſ}\frac{\alpha-b\cot\eta}{a}\operatorname{coſ}\vartheta\operatorname{coſ}\eta$$

$$+(\alpha-b\cot\eta)\operatorname{ſin}\vartheta\operatorname{ſin}\eta=-k\operatorname{coſ}\eta.$$

Nun ſollte

$$M=-\operatorname{coſ}\eta\left(\frac{d\alpha}{dt}-\frac{dA}{dt}\right)^2,$$ und

N=

$$N = 2\sin\eta \tang\eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha d . \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dA^2}{dt^2} \right)$$

ſeyn, vorausgeſetzt, daß $A = b \cot\eta$ genommen werde. Ich wüſte nicht, wie ich das machen ſollte, dieſe Werthe herauszubringen: mit Hr. Hennert aber ſetzt man $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$, $\frac{dA}{dt} = \cos\eta \sqrt{v} = \int d . \frac{dA}{dt}$, und man findet $M = -\cos\eta(\sqrt{k} - \cos\eta\sqrt{v})^2$, $N = 2\sin\eta \tang\eta (\cos\eta\sqrt{kv} - \frac{1}{2} v \cos\eta^2) = 2\sin\eta^2 \sqrt{kv} - \sin\eta^2 \cos\eta . v$. Man wird leicht ſehen, wenn dieſe Werthe ſtatt M und N geſetzt werden, was die Gleichung für eine Geſtalt annimmt. Es wird völlig diejenige, die Hr. Hennert auf der 76 S. der Preisſchrift herausbringt. Um die Vergleichung deſto leichter anzuſtellen, bemerke ich, daß das hieſige η, ϑ, b, beym H. Hennert φ, $90° - \vartheta$ und c heiſſe, und was hier c heiſt, iſt bey ihm $h - a \sin\vartheta$. Die gefundene Gleichung müſte nun auſſer v keine andre, als beſtändige Gröſſen enthalten, $\sqrt{k}$ auch für eine beſtändige Gröſſe genommen. Aber ein einziger Blick auf die Gleichung ergiebt ja, daß noch auſſerdem der Bogen α darin vorkomme. Wenn man z ſtatt $\sqrt{v}$ ſchreibt, und die Gleichung nach den Potenzen von z ordnet, ſo wird ſie cubiſch. H. Hennert rechnet weiter, und bringt heraus, daß dieſe cubiſche Gleichung zwey unmögliche Wurzeln und eine negative Wurzel habe. Uebrigens hängt doch ſeine Formul für dieſe negative Wurzel noch immer von dem veränderlichen Bogen α ab, und ich begreife nicht, wie dies mit der Vorausſetzung beſte-

beſtehen könne, daß nun $\sqrt{v}$ unveränderlich ſey. Ferner würde ja der negative Werth von $\sqrt{v}$ anzeigen, daß das Waſſer in der Schnecke nicht gegen die obere Oefnung zu, wie während der Rechnung vorausgeſetzt iſt, ſondern gegen die untere Oefnung zu laufe, und das hieſſe, die **Schnecke kan gar kein Waſſer heben.** Hr. Hennert aber erklärt ſich über den negativen Werth von $\sqrt{v}$ am Ende des 15 §. 77 S. ganz anders. Er ſagt, dies komme daher, weil das Waſſer ſteigend in die Schnecke hineindringe, und fallend heraus trete, **Steigen** und **Fallen** aber entgegen geſetzte Bewegungen ſeyn. Wie doch ein Irthum immer mehrere nach ſich zieht! Bezeichnet denn nicht $\sqrt{v}$ unbeſtimmt die Geſchwindigkeit des durch einen jeden Querſchnitt der Röhre laufenden Waſſers, ſowohl deſſen, was oben ausläuft, als auch deſſen, was unten eintritt?

515 §.

Am meiſten wundre ich mich darüber, daß dasjenige, was Hr. Hennert im 16 §. 78 S. vorträgt, ihn nicht auf das fehlſame ſeiner Theorie aufmerkſam gemacht habe. Hier ſoll die Menge Waſſer beſtimmt werden, welche die Schnecke in gegebener Zeit t heben wird. Dieſe müſte $=m^2t\sqrt{v}$ ſeyn, wenn m^2 den Querſchnitt der Röhre bedeutet. Aber, heiſt es hier, man muß bemerken, **daß das Waſſer nicht ununterbrochen durch die Schnecke flieſſe.** Dies lehrt die Erfahrung nach Hrn. Hennerts Bericht bey den in Holland jetzt üblichen Waſſerſchnecken, deren Grundflächen ganz unter Waſſer ſtehen. Das Waſſer hört auf zu flieſſen, noch ehe die Spindel den halben Umlauf vollendet hat: während

rend des übrigen Theils eines Umlaufs fließt nichts heraus. Fließt es denn nicht etwa während dieſer Zeit erſtlich um einen guten Theil zurück, und kehrt nachher wieder um? oder bleibt es während dieſer Zeit in der Röhre ruhig? Darüber erklärt ſich Hr. Hennert nicht. Aber dem ſey wie ihm wolle, wenn das Waſſer während eines jeden Umlaufs zu flieſſen aufhört, und eine zeitlang nachher wieder anfängt zu flieſſen, wie läſt ſich denn in aller Welt die Vorausſetzung rechtfertigen, daß $\sqrt{v}$ unveränderlich werde? Hier muß Hr. Hennert doch würklich die Schwäche ſeiner Theorie gefühlt haben. Denn gegen das Ende des 16 §, wo er die Waſſermenge blos aus einigen Beobachtungen beſtimmt, und ohngefehr ein Mittel genommen, auf $\frac{2}{3} m^2 t \sqrt{v}$ ſchätzt, ſetzt er hinzu: Les remarques que nous venons de faire, ſont tres importantes pour la theorie de cette machine. Elles ont echappé aux Mechaniciens. (das denke ich eben nicht, denn faſt alle, die ich habe nachſchlagen können, ſagen einhellig, daß das Waſſer aus der Schnecke nicht ununterbrochen flieſſe). Cependant elles ne laiſſent pas que de *rendre la theorie un peu incertaine.*

516 §.

Weil Erfahrungen, die man mit dieſer Theorie vergleichen kan, vorzüglich intereſſant ſind, ſo werde ich nun diejenigen herſetzen, welche Hr. Hennert im 17-20 §. erzehlt. Die in Holland ehedem üblich geweſenen Waſſer-Schrauben, welche Waater-Moolen hieſſen, und zur Austrocknung der Wieſen gebraucht wurden, lagen faſt horizontal, und hoben das Waſſer auf eine ſehr geringe Höhe. Wenn ſie

das Waſſer auf 4 Fuß heben, ſo heiſſen ſie Sheprad-Moolen, und in der Herrſchaft Hazerswoude nahe bey Leiden, hat man vier dergleichen Schrauben über einander geſtellt, um das Waſſer 16 Fuß hoch zu heben. Ohngefehr um das Jahr 1754 ward von einigen Kunſtverſtändigen in Vorſchlag gebracht, den Neigungswinkel gegen den Horizont 60° groß zu machen, um das Waſſer auf gröſſere Höhen zu bringen. Vielleicht verfiel man daher darauf, weil Daniel Bernoulli dieſen Winkel angegeben hat (500 §.). Man zog Herrn Lulof zu Rath, und auf deſſen Empfehlung wurden dergleichen Maſchinen mit Waſſerſchrauben unter dem Winkel von 60° erbauet, die den Nahmen Vyzel-Moolen erhalten haben. Alle werden durch Windmühlen-Flügel getrieben.

Mit dreyen Vyzelmoolen, die, wie es ſcheint, nicht weit von einander angelegt ſind, und welche Hr. Lennert durch die Namen der nordlichen, der mittlern, und der ſüdlichen, nach ihrer Lage unterſcheidet, hat man Erfahrungen angeſtellet. Um jede Spindel ſind drey Röhren gewunden, deren viereckte Oefnungen um gleiche Bogen von einander abſtehen. Die Oefnung der Gänge an der nordlichen Schraube beträgt 1,36 Quadr. Fuß, an der mittlern 1,46 Quadr. Fuß, und an der ſüdlichen 1,41 Quadr. Fuß; die Halbmeſſer ihrer Spindeln ſind 35, 37, 36 Zoll; die Winkel η ſind 11° 55′, 14° 42′, 11° 54′, dieſe findet man aus den Entfernungen der Schraubengänge, welche 23, 29, 24 Zoll betragen. Der Winkel ϑ iſt für alle $=60°$, die ganze Länge der Spindeln $14\frac{1}{2}$ Fuß, und ſie ſtehen ohngefehr 4 Fuß tief unter Waſſer. Ich ſetze

dieſe

dieſe Zahlen alle ſo her, wie ſie auf der 81 S. der Preisſchrift ſtehen, werde aber unten verſchiedenes dabey erinnern müſſen. Man hat jede dieſer Mühlen eine zeitlang arbeiten laſſen, und die in dieſer Zeit gehobene Menge Waſſer gemeſſen; auch hat man die Anzahl der Umläufe der Wind-Flügel bemerkt, und daraus die Zahl der Umläufe der Schrauben geſchloſſen, wovon vermöge der Einrichtung der Maſchine beynahe anderthalb auf einen Umlauf der Windflügel kamen.

517 §.

Der Erfahrungen ſelbſt ſind an der Zahl 17, die alle auf der 82 S. der oft erwehnten Preisſchrift ſtehen. Hr. Hennert verwirft aber die erſte, vierte, zehnte, dreyzehnte, vierzehnte und ſechszehnte, als ſolche, die zu weit von der Theorie abweichen. Die übrigen ſtehen auf der 84 S. nochmahl: aber die hieſigen Zahlen kommen mit den auf der 82 S. befindlichen nicht alle überein. Hr. Hennert hat aus der Anzahl der Umläufe die Winkel-Geſchwindigkeit der Spindel, und daraus die Geſchwindigkeit eines jeden Punkts im Umfang ihrer Querſchnitte geſchloſſen, welches hier $2\sqrt{gk}$ wäre. Dieſe letztern Geſchwindigkeiten ſind größtentheils auf der 84 S. anders, als auf der 82 S. angegeben. Ich ſetze ſie ſo her, wie ſie auf der 84 S. ſtehen.

Erfahrungen.	Winkelgeſchwindigk. der Spindel.	Werth v. $2\sqrt{gk}$	Waſſermenge in Cub. F. für 1 Min	Namen der Schrauben
2	81°	4,10	181	nordliche Schraube
3	98° 30′	4,95	227	
5	117°	5,93	273	
7	79°	4,50	217	mittlere Schraube
8	85° 30′	4,60	228	
9	108°	6,94	294	
11	130°	7,00	356	
12	124°	6,59	367	ſüdliche Schraube
15	121° 30′	6,52	beide zuſ.	die mittlere
		6,35	648	u. ſüdliche
17	187° 15′	9,46	alle drey Schrauben	
		10,00	zuſammen	
		9,77	1140	

Dieſe Erfahrungen vergleicht nun Hr. Hennert mit ſeiner Theorie, aber ich weiß in der That ſelbſt nicht recht, auf welche Art. Seine Gleichung für $\sqrt{v}$ hängt von α ab, und weil $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$, (504 §.), ſo iſt $\alpha = t\sqrt{k}$. Dies iſt nemlich der Weg, den der Punkt a in der 7 Fig. in der Zeit t durchläuft. Setzte nun Hr. Hennert $t\sqrt{k}$ ſtatt α in die Gleichung, ſo würde $\sqrt{v}$ von t abhängen, und ſich folglich mit t ändern. Aber es ſoll $\sqrt{v}$ unveränderlich ſeyn, und dieſe einmahl zum Grunde geſetzte Vorausſetzung bringt H. Hennert dahin, daß er

den

den Bogen α für das anſieht, was ſonſt Geſchwindigkeit heiſt (3. 4 §. Mech.). Daher ſetzt er auf der 81 S. $\alpha = \sqrt{60k}$, und nimmt alſo α für die Geſchwindigkeit, die der Höhe k zugehört. Dieſe iſt nemlich $= 2\sqrt{gk}$ (32 §. Mechan.), und $g =$ 15,625 Fuß Rheinl., alſo $2\sqrt{g} = 2 \times 3{,}95 = 7{,}9$ beynahe $\sqrt{60}$. Dies iſt ein neuer Irrthum, der zu den vorigen noch hinzu kommt; alſo iſt es wohl nicht zu verwundern, daß die von ihm beygebrachten Erfahrungen ſo wenig mit ſeiner Theorie zuſammen treffen wollen. Alle drey Waſſerſchrauben haben ſehr viel weniger Waſſer in einer Minute gegeben, als ſie nach H. Hennerts Rechnung thun ſollten, und der Fehler hat bald ein Drittel, bald die Hälfte der ganzen berechneten Waſſermenge betragen: gewöhnlich iſt er zwiſchen dieſe Grenzen gefallen. Das meint nun zwar H. Hennert nicht, nach ihm beträgt die gröſte Abweichung der beobachteten Waſſermengen etwa nur den 9ten oder 10ten Theil der nach ſeiner vermeintlichen Theorie berechneten, und zwey Beobachtungen geben faſt grade eben das, was er nach der Theorie gefunden zu haben angiebt. Allein Hr. Hennert verbirgt hier die gröſſere Abweichung ſeiner Theorie von der Erfahrung auf eine ganz künſtliche Art. Er reducirt erſtlich das eigentliche Reſultat ſeiner Theorie auf denjenigen Theil, worauf er ihn nach einer andern aus der Erfahrung geſchloſſenen Regel reducirt wiſſen will, die auf der 78 und 79 S. der Preisſchrift ſteht, und hier ſchon im 515 §. angeführt iſt. Dieſe reducirte Waſſermenge vergleicht er nun wieder mit derjenigen, welche die im Anfang dieſes §. angeführten Erfahrun-

fahrungen gegeben haben, und die Zahlen, welche er angiebt, ſind folgende:

Erfahrungen.	Berechnete Waſſermenge.	Reducirte Waſſermenge.	Beobachtete Waſſermenge.	Differenzen.
2	373 C. F.	182	181	1
3	386	258	227	31
5	529	353	273	80
7	406	271	217	54
8	365	243	228	25
9	487	325	294	31
11	659	430	356	74
12	557	371	367	4
15	1068	712	648	64
17	2183	1453	1140	313

Ob nun gleich bey der erſten Erfahrung die beobachtete Waſſermenge von der berechneten um ein Drittel der leztern abweicht; ſo ſagt Hr. Hennert doch, ſie weiche gar nicht ab, weil ſie mit der reducirten übereinkomt: und obgleich bey der leztern Erfahrung die beobabtete Waſſermenge wenig mehr, als die Hälfte der berechneten ausmacht, und ſelbſt die Differenz von der reducirten Waſſermenge nicht viel weniger als $\frac{1}{4}$ der leztern ausmacht; ſo will H. Hennert doch nicht, daß der Fehler mehr als ohngefehr $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{9}$ betrage, denn ſagt er, man muß hier nur $\frac{7}{12}$ der berechneten Waſſermenge bey der Reduction nehmrn, und alsdenn beträgt der Fehler nur $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{10}$. So künſtlich vergleicht man ſonſt keine Erfahrungen mit der Theorie, und Hr. Hennert legt ſeiner Theorie doch wohl zuviel Lob bey, wenn er von ihr

ihr ein parfait accord avec l'experience (84 S.) rühmt und von ihr ſagt: Notre theorie donne un luſtre aux Mathématiques ſublimes (87 S.). Die Differenzen der beobachteten von ſeiner ſo genannten reducirten Waſſermenge ſind ja keine Differenzen von der nach ſeiner Theorie berechneten Menge, alſo ſind die von ihm angegebenen Abweichungen keine Abweichungen von der Theorie, ſondern von ſeinen aus Beobachtungen geſchloſſenen Regeln.

518 §.

Wenn es nun mit den bisherigen Erinnerungen gegen des Hrn. Hennerts Vortrag ſeine Richtigkeit hat, ſo werde ich auch berechtiget ſeyn, zu behaupten, daß Hr. Hennerts Regeln für die Ausübung ganz unbrauchbar ſind. Es fehlet ſehr viel, daß Hr. Hennert das Haupt-Problem von der Waſſerſchraube ſollte aufgelöſt haben, deſſen Auflöſung Hr. Euler unvollſtändig laſſen muſte. Wollte man auf dem richtigen Wege, den Hr. Euler betreten hat, weiter gehen; ſo müſte man bey der Differentialgleichung des 509 §. eine bisher von mir in dieſem Lehrbuch noch nicht erklärte Integrations-Regel anwenden, nach welcher ſich eine unendliche Reihe finden lieſſe, die z durch φ ausdrückte. Ich denke aber, man hat nicht nöthig, die Mühe dieſer Rechnung zu übernehmen; man kan ſich ohnehin überzeugen, daß das Waſſer bey der geneigten Lage der Schnecke ſo wenig, als bey ihrem ſenkrechten Stande (511 §.) durch die obere Mündung ununterbrochen durchflieſſen könne. Wenn in jedem Schraubengange nur die Waſſerhaltenden Bogen voll Waſſer ſind, ſo läſt ſich begreifen, daß das Waſſer beym

Umlauf

Umlauf der Spindel höher ſteigen könne. Wenn aber die ganze Röhre von unten bis oben voll Waſſer iſt; ſo iſt offenbar, daß alles unten auslaufen würde, wenn die Schraube nicht umliefe, und man die untere Mündung öfnete. Beym Umlauf der Spindel entſtehen keine Kräfte, die das Waſſer nach der Richtung der Röhre gegen die obere Mündung zu treiben können, es wäre denn, daß aus dem Anſtoß der untern Mündung gegen die im Wege liegenden Waſſertheilchen ein ſo ſtarker Druck entſtünde, der dies ausrichten könte. Im 511 §. ſind aber die Urſachen ſchon angegeben, weswegen dieſer Druck beym Fortgang der Bewegung ſchwächer werden müſte, wenn er gleich beym Anfang der Umlaufsbewegung noch beträchtlich genug wäre. Man begreift auch leicht, daß die Umlaufsbewegung ſchon ziemlich ſchnell ſeyn müſte, wenn der Druck gegen die untere Mündung ſtark genug werden ſollte, das Waſſer hinauf zu treiben.

519 §.

Geſetzt aber, daß das Waſſer bey hinlänglicher Schnelligkeit der Umlaufsbewegung wenigſtens auf eine Zeitlang zum ununterbrochenen Durchflieſſen gebracht werden könnte; geſetzt die Integration der oben herausgebrachten Differentialgleichung hätte keine groſſe Schwierigkeit, und führte auch nicht auf ſehr verwickelte Formuln; ſo dünkt mich doch, daß hiebey noch wichtige Mängel übrig bleiben würden, die keine ſonderliche Uebereinſtimmung der Reſultate der Theorie mit dem würklichen Erfolg würden erwarten laſſen. Die Differentialgleichung gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß alle Waſ-

ſer-

ſertheilchen, die in einerley auf der centriſchen Linie ſenkrechten Querſchnitt liegen, von einerley Kräften beſchleuniget werden, und daß die Schwungkräfte insgeſamt von der Röhre aufgehalten werden, ohne auf die Bewegung des Waſſers Einfluß zu haben. Eigentlich aber würde dies alles, ſo wie überhaupt diejenigen, Grundſätze von der Bewegung des Waſſers in Röhren, worauf die Rechnung gebauet iſt, nur in völliger Schärfe gelten, wenn die Querſchnitte der Röhre unendlich klein wären. Dies hat Hr. Euler mehr als einmahl erinnert. M. ſ. die Hiſtoire de l'Academie de Berlin Année 1755. p. 330. Alſo würde eine völlige Entwickelung der aus dieſen Grundſätzen geſchloſſenen Gleichungen alsdenn nur für die Ausübung einen erheblichen Nutzen verſprechen, wenn die um die Spindel gewundene Röhre eine ſehr geringe Weite hätte. Wenn man aber weis, daß es eine gewöhnliche Maxime ſey, dieſen Röhren eine beträchtliche Weite zu geben, damit deſto mehr Waſſer zur Zeit durchflieſſen könne, ſo wird man alle Hofnung aufgeben, daß die auf ſehr enge Röhren eingeſchränkte Theorie hier mit erheblichen Nutzen angewandt werden könne. Wenn die Waſſerſchraube inwendig nach Art einer Wendeltreppe eingerichtet iſt, ſo etwa, wie man beym **Leupold** Zeichnungen davon antrift, ſo weicht ihre ganze inwendige Geſtalt von derjenigen, welche die obige Rechnung vorausſetzt, ſo ſehr ab, daß ich gar keine Uebereinſtimmung der auf ſehr enge Röhren eingeſchränkten Theorie erwarten würde, wenn auch alle Schwierigkeiten der Rechnung überwunden wären.

520 §.

520 §.

Eben dieſe gewöhnliche Geſtalt der Waſſerſchraube, die von derjenigen, welche die obige Theorie vorausſetzt, ſo weit abweicht, macht es mir begreiflich, woher es komt, daß eine ſolche Waſſerſchraube das Waſſer zum Steigen bringen kan, wenn gleich die untere Mündung beym Umlauf beſtändig unter dem Waſſer bleibt. Wenn eine enge Röhre Schraubenförmig um die Spindel gewunden wäre, ſo würde nimmermehr das Waſſer darin in die Höhe ſteigen, weil Luft und Waſſer einander darin nicht würden ausweichen können. Dies geſchicht in weiten Röhren. Wenn das Waſſer in der Röhre ſchon ſo weit geſtiegen iſt, daß es ſich beym fernern Umlauf der Spindel über dem Waſſerpaß desjenigen, woraus die Schraube ſchöpft, ſchon heben muß; ſo läuft es zwar weiter gegen die obere Mündung zu, aber nicht ſo, daß es bis an ſeine äuſſere Grenze den ganzen innern Raum der Röhre ausfüllt. Die vorderſte Fläche deſſelben iſt nicht auf der centriſchen Röhre ſenkrecht, ſondern horizontal, oder doch wenigſtens beynahe horizontal. Es flieſt ſo vorwärts, wie es in einer Rinne vorwärts flieſſen würde, und macht über ſich der Luft Platz in die Röhre hinein zu dringen. Auf ſolche Art ſondert ſich von dem beym erſten Umlauf hinein getretenen Waſſer beym zweyten Umlauf ſoviel ab, als ohngefehr den Waſſerhaltenden Bogen im zweyten Schraubengang füllet. Eine ſolche Abſonderung erfolgt bey jedem Umlauf, bis endlich das Waſſer zur obern Mündung ausläuft. Demnach iſt nie die ganze Schnecke voll Waſſer, ſondern von jedem Schraubengange nur

ſoviel

ſoviel ohngefehr, als den waſſerhaltenden Bogen füllen kan, und die Zwiſchenräume ſind mit Luft angefüllt.

521 §.

Wenn ich nun dies alles erwege, ſo dünkt mich, daß man immer mit der im vorigen Abſchnitt vorgetragenen auf die Geſetze des Gleichgewichts gebaueten Pitotſchen und Bernoulliſchen Theorie von der Waſſerſchraube in der Ausübung zufrieden ſeyn könne. Wenn die Waſſerſchraube nur langſam umläuft, (und eine ſolche Einrichtung kan man der Maſchine nach Vorſchrift des 500 §. allemahl geben) ſo denke ich, daß der Erfolg von dem Reſultat, was die erwehnte Theorie giebt, ſo ſehr nicht abweichen werde. Hierüber wären nun allerdings noch Verſuche zu wünſchen. Wenn ich Gelegenheit hätte, ſie anzuſtellen, ſo würde ich es auf beyde Arten verſuchen, ſowohl bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter Waſſer, wobey die untere Oefnung beym Umlauf beſtändig unter Waſſer bleibt, als auch bey einer ſolchen Tiefe, welche des Hrn. Bernoulli Regel gemäß iſt. Ich würde hauptſächlich auf den Umſtand aufmerkſam ſeyn, ob nicht bey ſonſt unveränderter Anordnung der Schraube und einerley Umlaufsgeſchwindigkeit eine gröſſere Waſſermenge bey Beobachtung der Bernoulliſchen Regel gehoben würde. Es ſcheint ſehr natürlich zu ſeyn, daß nicht ſoviel Waſſer bey jedem Umlauf in einerley Zeit aus einem Schraubengange in den andern hinüber treten könne, wenn Luft und Waſſer einander ausweichen müſſen, als in dem Fall, wenn die Luft durch die untere Mündung eintreten kan.

522 §.

522 §.

Die Erfahrungen, welche ich aus der Hennertſchen Preisſchrift oben im 517 §. ſchon angeführt habe, ſind, wie es ſcheint, bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter dem Waſſer angeſtellet worden. Ich würde indeſſen zur Probe einige dieſer Erfahrungen mit des Hrn. Bernoulli Theorie vergleichen, wenn mir nicht verſchiedene Zweifel entgegen ſtünden, ob auch wohl die im 516 §. aus der Preisſchrift ſchon angeführten Zahlen für die Abmeſſungen der Schrauben alle richtig ſind. Es kan vielleicht ein unrichtiger Abdruck meine Zweifel veranlaſſen: es können auch andre Urſachen hie und da ein Verſehen bey der Angabe dieſer Abmeſſungen zuwege gebracht haben. Einmahl ſcheinen die Zahlen 35, 37, 36 Zoll, wofern ſie würklich die Halbmeſſer des Umfangs bedeuten ſollen, ſehr groß zu ſeyn. Die Durchmeſſer hätten alſo auf 6 Fuß betragen, da doch Leupold im Theatro Machin. Hydraul. I Th. 72 §. 40 S. berichtet, daß man den größten Waſſerſchrauben in Holland nur 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer gebe. Das ſtatiſche Moment des Widerſtandes wird bey einem ſo groſſen Durchmeſſer ungemein groß, zumahl da die Hennertſchen Waſſerſchrauben drey Umgänge von ſehr beträchtlicher Weite gehabt haben. Ueberdem ſtimmen die erwehnten Zahlen auch nicht mit denjenigen überein, die Hr. Hennert für die Winkel η, und die Entfernungen der Schraubengänge von einander angiebt. Jene Winkel ſollen 11° 55′, 14° 42′ und 11° 54′, dieſe Entfernungen aber 23, 29, 24 Zoll betragen haben. Wenn aber a den Halbmeſſer, und e die Weite der Schraubengänge von einander bedeutet,

ſo

ſo wird tang $\eta = \frac{e}{2\pi a}$, alſo wären für die erſte Schraube tang $\eta = \frac{23}{220} = 0{,}1045$, und $\eta =$ $5^\circ\ 58'$. (Wäre dies die richtige Abmeſſung, ſo hätte man ſich auch in Anſehung des Winkels η nach Bernoulli Vorſchrift gerichtet 500 §.) Nehme ich dagegen $2a = 35$ Zoll an, ſo wird tang $\eta =$ 0,2091, und $\eta = 11^\circ\ 49'$, welches mit Hr. Hennerts Zahl mehrentheils überein kommt. Ich würde alſo dafür halten, daß nur aus einem Verſehen rayons ſtatt diametres geſchrieben wäre, allein alsdenn ſtimmen in der Tafel des 517 §. die ich dort aus der Hennertſchen Schrift mitgetheilet habe, die Winkelgeſchwindigkeiten, und die Werthe von $2\sqrt{gk}$, oder α, welche Hennert für gleichgültig annimmt, nicht überein: deswegen ſcheint es, daß man durch die Zahlen 23, 29, 24 Zoll nicht die ganze, ſondern die halbe Entfernung der Schraubengänge von einander verſtehen müſſe. Dies letztere ſcheint auch mit der Weite der Schraubengänge mehr überein zu kommen, deren drey um jede Schraube befindlich geweſen ſind, und deren viereckte Oefnungen 1,36; 1,46 und 1,41 Quadratfuß weit angegeben werden. Für ſo weite Gänge wäre kein Platz geweſen, wenn die ganze Höhe eines Schraubenganges ohngefehr 2 Fuß bis 2½ Fuß betragen hätte; oder man müſte die angegebenen Zahlen für die Summe aller dreyer Oefnungen an jeder Schraube verſtehen. Wofern würklich die Halbmeſſer der Schrauben 35, 37, 36 Zoll betragen haben, ſo muß ich vorausſetzen, daß Hr. Hennert von der Axe der Spindel bis an die

Mitte der Oefnungen der viereckten Gänge gemeſſen habe, wenn die Zahlen zur Rechnung brauchbar ſeyn ſollen. Wäre dies geſchehen, ſo hätten die Schrauben bis an ihre äuſſere Gränze gemeſſen, 7 Fuß und drüber im Durchmeſſer betragen, und das iſt doch würklich eine ſehr ungewöhnliche Weite. Bey dieſer Ungewißheit ſcheint mir eine nähere Vergleichung der angegebenen Effecte mit der Bernoulliſchen Theorie ohne Nutzen zu ſeyn. Der eigentliche Bau der bey dieſen Erfahrungen gebrauchten Waſſerſchrauben müſte auch noch genauer beſchrieben ſeyn, wenn man die Rechnung mit einiger Zuverläßigkeit darauf anwenden wollte.

Ich ſchlieſſe dieſe Beurtheilnng der Hennertſchen Preisſchrift mit der Bitte, daß mich niemand einer Tadelſucht beſchuldige, weil ich ihre Fehler freymüthig entdeckt habe. Der geſchickteſte Mann kan ſich verrechnen, und in Fehlſchlüſſe verfallen, das benimmt ſeinen übrigen Verdienſten nichts. Ich denke, es iſt meine Pflicht, in einem Lehrbuch, wie das gegenwärtige ſeyn ſoll, von den neueſten Unterſuchungen über wichtige Materien Nachricht zu geben, und das fehlerhafte derſelben ſo gut, als das brauchbare und nützliche anzuführen.

523 §.

7 Fig. Ein gegebenes Stück *RVS* der Schraube iſt mit Waſſer angefüllt, man ſucht die Geſchwindigkeit, womit dieſes Waſſer durchflieſt, wenn ſich die Spindel gegen *BPA* zu drehet.

Aufl. Die im 506 §. gefundene Haupt-Gleichung

$$p \cos\eta = C + a \cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta$$

$$+ \frac{A du \cos\eta}{dt\sqrt{u}} - \frac{A dv}{dt\sqrt{v}}$$ findet hier folgenderge- ſtalt ihre Anwendung. Von den Endpunkten R und S des mit Waſſer gefüllten Bogens ziehe man bis an den Umfang der Grundfläche RF und SG mit der Axe der Spindel parallel; ſo ſind FR und GS die den Punkten R und S zugehörigen Ordinaten, und die Bogen $aBbAF$, $aBbAFBG$ ſind die dazu gehöri- gen Abſciſſen. Nun ſey das unbeſtimmte Stück der centriſchen Linie $aMfR = x$, und $RVS = f$, ſo än- dert ſich x mit der Zeit t, aber f bleibt beſtändig. Setzt man nun den Druck der Atmoſphäre beyſeite, wie hier geſchehen kan, wenn man annimmt, daß ſich zwiſchen jeden zween waſſerhaltenden Bogen Luft von natürlicher Dichtigkeit befindet; ſo kan man an- nehmen, daß die äuſſere Flächen des mit Waſſer ge- füllten Bogens bey R und S keinen Druck leiden, al- ſo daſelbſt $p = 0$ ſey. Für die Fläche bey R iſt der Bogen $aP = x \cos\eta$, und für die Fläche bey S iſt er $= (x+f)\cos\eta$. In der Hauptgleichung bedeutet aber A den Bogen aP. Demnach ſetze man erſtlich $A = x\cos\eta$ und $p = 0$, ſo wird

$$C = - a \cos\frac{\alpha - x\cos\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta + x \sin\vartheta \sin\eta \cos\eta$$

$$- \frac{x du \cos\eta^2}{dt\sqrt{u}} + \frac{x dv \cos\eta}{dt\sqrt{v}}$$: man ſetze fürs zweyte $A = (x+f)\cos\eta$ und $p = 0$, ſo erhält man

$$C = - a \cos\frac{\alpha - (x+f)\cos\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta$$

$$+(x+f)\sin\vartheta\sin\eta\cos\eta-\frac{(x+f)du\cos\eta^2}{dt\surd u}$$

$$+\frac{(x+f)dv\cos\eta}{dt\surd v}.$$ Beyde Werthe von C gleich geſetzt, geben $-a\cos\frac{\alpha-x\cos\eta}{a}\cos\vartheta=$

$$-a\cos\frac{\alpha-(x+f)\cos\eta}{a}\cos\vartheta+f\sin\vartheta\sin\eta$$

$$-\frac{fdu\cos\eta}{dt\surd u}+\frac{fdv}{dt\surd v}.$$ Schreibt man mit H. Euler $a\pi-p$ ſtatt α, alſo $a\pi-p-x\cos\eta$ ſtatt $\alpha-x\cos\eta$, ſo hat man

$$\cos\frac{\alpha-x\cos\eta}{a}=-\cos\frac{p+x\cos\eta}{a},$$ und

$$\cos\frac{\alpha-(x+f)\cos\eta}{a}=-\cos\frac{p+(x+f)\cos\eta}{a},$$

alſo

$$a\cos\frac{p+x\cos\eta}{a}\cos\vartheta=a\cos\frac{p+(x+f)\cos\eta}{a}\cos\vartheta$$

$$+f\sin\vartheta\sin\eta-\frac{fdu\cos\eta}{dt\surd u}+\frac{fdv}{dt\surd v}.$$

Weil nun $dp=-dt\surd u$, und $dx=dt\surd v$, ſo iſt $dp+dx\cos\eta=-dt\surd u+dt\cos\eta\surd v$. Hiemit multiplicire man die letzte Gleichung, und integrire alsdenn, ſo wird

$$a^2\sin\frac{p+x\cos\eta}{a}\cos\vartheta=C+a^2\sin\frac{p+(x+f)\cos\eta}{a}\cos\vartheta$$

$$+f(p+x\cos\eta)\sin\vartheta\sin\eta+f\int\Big(\frac{dv}{\surd v}$$

—

$- \frac{du \cos\eta}{\sqrt{u}} \Big) (-\sqrt{u} + \cos\eta \sqrt{v}$. Man ſ. H. Eulers angeführte Abhandlung §. 13. Comment. Nov. Petrop. Tom. V. p. 273. wobey ich nur noch wieder bemerke, daß man, um H. Eulers Gleichung mit dieſer zu vergleichen, ſinϑ ſtatt cosϑ ſchreiben (506 §.), und vor $\sqrt{u}$ das entgegen geſetzte Zeichen brauchen müſſe, weil H. Euler die Spindel gegen AaPB zu umlaufen läſt.

Wenn die Spindel gleichförmig umläuft, und $u = k$, alſo $du = 0$ iſt, ſo hat man

$$a^2 \sin\frac{p + x\cos\eta}{a} \cos\vartheta = C + a^2 \sin\frac{p + (x+f)\cos\eta}{a} \cos\vartheta$$
$$+ f(p + x\cos\eta)\sin\vartheta \sin\eta + fv\cos\eta - 2f\sqrt{kv}.$$

524 §.

Dieſe Aufgabe würde in der Ausübung ihre Anwendung finden, wenn die Waſſerſchraube ſo geſtellt wäre, wie Bernoulli vorſchreibt, daß ein Theil der Grundfläche aus dem Waſſer hervorragte, damit ſich nur bey jedem Umlauf ein Theil eines Schraubenganges füllen könne. Man nehme an, daß die Schraube jetzt das erſtemahl umlaufe, und daß in dem Augenblick, da a in Q anlangt, und daſelbſt aus dem Waſſer hervortritt, ſich ein Bogen = RVS mit Waſſer gefüllt habe; ſo wird in dieſem Augenblick dieſe hineingetretene Maſſe Waſſer ſchon eine gewiſſe Geſchwindigkeit nach der Richtung des Schraubenganges erlangt haben. Dieſe ſey $= \sqrt{h}$, und der Bogen AQ = B, ſo beſtimmt ſich in der gefundenen Gleichung C dadurch, daß $p = B$ und $x = 0$ ſeyn muß, wenn $v = h$ iſt. Dies giebt 7 Fig.

$$C = a^2 \sin \frac{B}{a} \cos\vartheta - a^2 \sin \frac{B + f\cos\eta}{a} \cos\vartheta$$

$$- fB \sin\vartheta \sin\eta - fh \cos\eta + 2f\sqrt{kh},$$ folglich

$$a^2 \cos\vartheta \left(\sin \frac{p + x\cos\eta}{a} - \sin\frac{B}{a} \right)$$

$$= a^2 \cos\vartheta \left(\sin \frac{p + (x+f)\cos\eta}{a} - \sin \frac{B + f\cos\eta}{a} \right)$$

$$+ f \sin\vartheta \sin\eta \, (p + x\cos\eta - B) + f\cos\eta \, (v - h)$$

$- 2f\sqrt{k}\,(\sqrt{v} - \sqrt{h})$. Weil nun der Bogen $AaBbAF = p + x\cos\eta$ iſt, ſo ſey der zugehörige Winkel am Mittelpunkt $= \varphi$, alſo $\frac{p + x\cos\eta}{a} = \varphi$.

Ueberdem ſey $\frac{f\cos\eta}{a} = \gamma$, alſo $a = \frac{f\cos\eta}{\gamma}$.

Man ſubſtituire dieſe Werthe, und multiplicire mit $\cos\eta$, ſo wird $\frac{a}{\gamma} \cos\eta^2 \cos\vartheta \left(\sin\varphi - \sin\frac{B}{a} \right. =$

$$\frac{a}{\gamma} \cos\eta^2 \cos\vartheta \left(\sin(\varphi + \gamma) - \sin\left(\frac{B}{a} + \gamma \right) \right)$$

$+ \sin\vartheta \sin\eta \cos\eta \, (a\varphi - B) + 2\cos\eta \sqrt{kh} - h\cos\eta^2 + v\cos\eta^2 - 2\cos\eta\sqrt{kv}$. Addirt man nun k auf beiden Seiten, und bringt alsdenn $v\cos\eta^2 - 2\cos\eta\sqrt{kv} + k$ auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein, ſo erhält man durch Ausziehung der Quadratwurzel, $\cos\eta\sqrt{v} =$

$$\sqrt{k} \pm \sqrt{\left(k + \frac{a}{\gamma} \cos\eta^2 \cos\vartheta \left(\sin\varphi - \sin(\varphi + \gamma) \right.\right.}$$

$$\left. + \sin\left(\frac{B}{a} + \gamma \right) - \sin\frac{B}{a} \right) + (B - a\varphi) \sin\vartheta \sin\eta \cos\eta$$

+

$+ h\cos\eta^2 - 2\cos\eta\sqrt{kh}$). Ob man das Zeichen + oder − der Wurzelgröſſe voranſetzen müſſe, läſt ſich ſo prüfen. Es iſt $\sqrt{k}$ die Geſchwindigkeit, womit der Punkt R im Kreiſe wegen des Umlaufs der Spindel herum gehet: zugleich aber läuft derſelbe nach der entgegen geſetzten Richtung mit der Geſchwindigkeit $\cos\eta\sqrt{v}$. Er läuft alſo gegen QPB im Kreiſe mit der Geſchwindigkeit $\cos\eta\sqrt{v} - \sqrt{k} = \frac{ad\varphi}{dt}$. So lange demnach $d\varphi$ negativ iſt, d. i. ſo lange der Winkel φ abnimmt, ſo lange iſt $\cos\eta\sqrt{v} - \sqrt{k}$ negativ, und deswegen muß ſo lange vor der Wurzelgröſſe das Zeichen (−) gebraucht werden: das Zeichen (+) aber, wenn φ wächſt.

525 §.

Vorhin ward angenommen, es ſey im Anfang der Bewegung, in dem Augenblick nemlich, da die Oefnung a aus dem Waſſer hervor kam, der Bogen $p = \mathrm{B} = \mathrm{AQ}$ geweſen. In der folgenden Zeit t hat nun die Oefnung a den Bogen QAbBa durchlaufen; und wenn dieſer $= \mathrm{X}$ geſetzt wird, ſo iſt nun $p = \mathrm{B} - \mathrm{X}$. Im vor. §. war $p = a.\varphi - x\cos\eta$, alſo hat man $\mathrm{B} - \mathrm{X} = a.\varphi - x\cos\eta$, und $\varphi = \frac{\mathrm{B}}{a} - \frac{\mathrm{X}}{a} + \frac{x\cos\eta}{a}$. Statt $\frac{\mathrm{B}}{a}$ und $\frac{\mathrm{X}}{a}$ ſchreibe man ζ und ω, ſo wird $\varphi = \zeta - \omega + \frac{x\cos\eta}{a}$, und $d\varphi =$

$-d\omega + \frac{dx\, coſ\eta}{a}$. Weil ferner $dx = dt\sqrt{v}$, und $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, alſo $dt = \frac{a d\omega}{\sqrt{k}}$; ſo wird $dx = \frac{a d\omega \sqrt{v}}{\sqrt{k}}$, und $d\varphi = - d\omega + \frac{d\omega\, coſ\eta \sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{coſ\eta\sqrt{v} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}}\, d\omega$, folglich $d\omega = \frac{d\varphi\sqrt{k}}{coſ\eta\sqrt{v} - \sqrt{k}}$. Wird hier der Werth des Nenners aus der im 524 §. gefundenen Gleichung ſubſtituirt, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen $d\omega$ und $d\varphi$, ſo daß $d\omega$ blos durch φ und $d\varphi$ ausgedrückt iſt. Lieſſe ſich nun das Integral $\omega = \int \frac{d\varphi\sqrt{k}}{coſ\eta\sqrt{v} - \sqrt{k}}$ finden, ſo hätte man eine Gleichung zwiſchen ω und φ. Weil nun für jede jede Zeit t der Winkel $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$ bekannt iſt, ſo könnte ferner aus der Integralgleichung φ, und hiernächſt $x = \frac{a(\varphi - \zeta + \omega)}{coſ\eta}$ gefunden werden, ſo wie auch $\sqrt{v}$ gefunden würde, wenn man den gefundenen Werth von φ in der Gleichung des 524 §. brauchte.

526 §.

Allein wenn gleich die Integration bewerkſtelliget, und die Gleichung zwiſchen ω und φ gefunden wäre, ſo würde dennoch die völlige Auflöſung der Aufgabe davon abhängen, daß man erſtlich $\sqrt{h}$ ſuchen müſte. Ferner wäre zu erwegen, daß die Formuln des

523

523 u. f. §. nur ſo lange ihre Anwendung finden können, bis das Waſſer durch die obere Oefnung auszulaufen anfängt, alſo bis $x+f$ der Länge der ganzen Schraubenlinie gleich iſt. Die Gleichung des 524 §. kann deswegen die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers nicht geben, weil die Rechnung vorausſetzt, daß f unveränderlich ſey: aber f wird veränderlich in dem Augenblick, da das Waſſer oben auszulaufen anfängt. Es ſey die Länge der ganzen um die Spindel gewundenen Röhre $=\lambda$, ſo hat man $x+f=\lambda$ von dem Augenblick an, da das Waſſer auszulaufen anfängt. Weil ſich von nun an f ändert, ſo ſchreibe man z ſtatt f, und man hat $x=\lambda-z$, alſo verändert ſich die Gleichung des 523 §. in folgende,

$$a \cos \frac{p+(\lambda-z)\cos\eta}{a} \cos\vartheta = a \cos \frac{p+\lambda\cos\eta}{a} \cos\vartheta$$

$$+ z \sin\vartheta \sin\eta + \frac{z\,dv}{dt\sqrt{v}},$$ wenn $du=0$ iſt. Dies wäre die Gleichung, aus welcher die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers geſucht werden müſte, und ihre völlige Auflöſung würde die Auflöſung der Aufgabe des 523-525 §. vorausſetzen, weil ſich nemlich daher die Geſchwindigkeit für $z=f$ ergeben würde.

527 §.

Um h zu finden, müſte man ſich ſo verhalten. 7 Fig.
Man gehe auf die Fundamentalgleichung der ganzen Theorie im 506 §. zurück, nemlich auf die Gleichung

$$p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta$$

$-\frac{Adv}{dt\sqrt{v}}$. Ich laſſe, was in du multiplicirt iſt, weg, weil $u=k$ unveränderlich angenommen wird. Man ſetze voraus, daß ſich die Oefnung a noch unter dem Waſſer befinde, und daß in die Schnecke ſo viel Waſſer hineingetreten ſey, als den Bogen aMf füllet. Die dem Punkt f zugehörige Ordinate ſey $=y$, ſo wird die zugehörige Abſciſſe auf dem Umfang der Grundfläche genommen, $=y\cot\eta$. Nun verfahre man, wie im 507 §, und überlege, daß der Druck gegen die Fläche f verſchwinde, wenn der Druck der Atmoſphäre nicht in Rechnung gebracht wird, daß alſo $p=0$ ſeyn müſſe, wenn der Bogen $A=y\cot\eta$ geſetzt wird, und daß im Gegentheil $p=\Pi$ ſey, wenn $A=0$ iſt, wo Π eben das, was es im 507 §. bedeutet. Dies giebt dieſelben Gleichungen, wie im 507 §, für C und $\Pi\,\mathrm{coſ}\,\eta$, nur daß hier y ſtatt b ſtehen muß. Wenn alſo alle übrige Bezeichnungen bleiben, ſo erhält man

$$c=-a\,\mathrm{coſ}\,\frac{\alpha-y\cot\eta}{a}\,\mathrm{coſ}\,\vartheta+y\,\mathrm{ſin}\,\vartheta$$

$$+\frac{ydv}{\mathrm{ſin}\,\eta\,dt\sqrt{v}}+v.$$

oder wenn $\alpha=a\pi-p$ geſetzt wird

$$c=a\,\mathrm{coſ}\,\frac{p+y\cot\eta}{a}\,\mathrm{coſ}\,\vartheta+y\,\mathrm{ſin}\,\vartheta+\frac{ydv}{\mathrm{ſin}\,\eta\,dt\sqrt{v}}+v.$$

Wie man mit dieſer Gleichung weiter umgehen müſte, wird ſich einiger maßen beurtheilen laſſen, wenn man eine fernere Vergleichung mit dem 508 §. u. f. §§. anſtellen will.

Man müſte erſtlich eine Gleichung zwiſchen $\varphi=\frac{p}{a}$ und v haben, hiernächſt eine andre zwiſchen

φ und y oder auch zwiſchen v und y, da dann $y = x \sin \eta$ geſetzt werden kónte, um zwiſchen v und x oder φ und x eine Gleichung zu erhalten, wenn $x = aMf$ geſetzt würde. Setzte man alsdenn ſtatt φ denjenigen Winkel, bey welchem die Oefnung a im Hinaufſteigen in die Oberfläche des Waſſers komt, ſo würden die gefundenen Gleichungen die zugehörigen Werthe von $x = f$ und $\sqrt{v} = \sqrt{h}$ geben, welche man im 524 und 525 §. noch nöthig hatte.

Wenn man bey dieſer Unterſuchung vorausſetzte, daß die Grundfläche ganz unter Waſſer ſtünde, alſo a gar nicht über dem Waſſer herauf káme; ſo würden die Formuln die Bewegung des Waſſers bis an den Augenblick zu finden dienen, in welchem es durch die obere Oefnung auszulaufen anfienge, vorausgeſetzt, daß ſich die ganze Röhre anfülle. Wenn nun gleich im 509 §. das Integral der dortigen Gleichung hätte gefunden werden können, ſo würde doch bey Beſtimmung der beſtändigen Gröſſe nöthig geweſen ſeyn, die erſte Geſchwindigkeit zu wiſſen, womit das Waſſer durch die obere Oefnung auszulaufen anfängt. Dieſe würde man vermittelſt gegenwärtiger Aufgabe finden, nemlich in der zuletzt angenommenen Vorausſetzung, daß die untere Oefnung beſtändig unter Waſſer bleibe, und die Röhre ſich nach und nach ganz anfülle. Hätte man eine Gleichung zwiſchen v und x, oder zwiſchen v und y; ſo müſte man $y = b$, oder ſtatt x die ganze Länge der Schraubenlinie ſetzen, um dasjenige v zu haben, welches der Geſchwindigkeit zugehört, womit das Waſſer auszulaufen anfängt.

528 §.

In der Vorausſetzung, daß die Waſſerſchraube ganz angefüllt ſey, das Moment zu finden,

finden, womit das Gewicht des Waſſers die Schraube zu drehen ſtrebt.

6 Fig. Aufl. Der allgemeine Ausdruck $\mu = \frac{ap\,coſ\,\vartheta}{\lambda\,coſ\,\eta}\,x + C$ (494 §. das dortige r iſt hier a) giebt dies Moment, vorausgeſetzt, daß nur der Bogen LMl deſſen Länge $= \lambda$ mit Waſſer angefüllt und die Schraube ſowohl, als auch das Waſſer in derſelben die in Ruhe ſey: da dann p das Gewicht des Waſſers, und $x = AN = a\,ſinv\,A\frac{AP}{a}$ iſt. Man ſieht leicht, daß dieſelbe Formul die hier geſuchte Auflöſung geben müſſe, wenn man durch λ die Länge der ganzen um die Spindel gewundenen Röhre, durch p das Gewicht des darin enthaltenen Waſſers verſteht, und dabey die Vorausſetzung beybehält, daß alles in Ruhe ſey. Nur muß man die beſtändige Gröſſe C ſo beſtimmen, daß $\mu = 0$ werde, wenn

7 Fig. $AP = Aa$, alſo $x = a\,ſinv\,A\frac{Aa}{a}$ iſt. Dies giebt

$$\mu = \frac{aap\,coſ\,\vartheta}{\lambda\,coſ\,\eta}\left(ſinv\frac{AP}{a} - ſinv.\frac{Aa}{a}\right)$$

oder $$\mu = \frac{aap\,coſ\,\vartheta}{\lambda\,coſ\,\eta}\left(coſ\frac{Aa}{a} - coſ\frac{AP}{a}\right).$$

Braucht man nun hier die den letztern Rechnungen gemäſſen Bezeichnungen und ſetzt $Aa = a\varphi$, $aM = x$, alſo $aP = x\,coſ\,\eta$, ſo wird

$$\mu = \frac{aap\,coſ\,\vartheta}{\lambda\,coſ\,\eta}\left(coſ\,\varphi - coſ\left(\varphi + \frac{x\,coſ\,\eta}{a}\right)\right).$$

Für die ganze Länge der Röhre muß man $x = \lambda$ ſe-

tzen; und wenn die Fläche ihrer ſenkrechten Querſchnitte $= h^2$ iſt, ſo hat man $p = h^2\lambda$, die eigene Schwere des Waſſers $= 1$ geſetzt. Alſo wird für die ganze Röhre

$$\mu = \frac{a^2 h^2 \cos\vartheta}{\cos\eta}\left(\cos\varphi - \cos\left(\varphi + \frac{\lambda\cos\eta}{a}\right)\right).$$

Im 507 §. war b die Länge der Spindel, alſo $b = \lambda\sin\eta$, und $\lambda = \frac{b}{\sin\eta}$. Schreibt man dies ſtatt λ, und ſetzt $\frac{x\cos\eta}{a} = \frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$, wie im 509 §, ſo wird

$$\mu = \frac{a^2 h^2 \cos\vartheta}{\cos\eta}\left(\cos\varphi - \cos(\varphi+\gamma)\right).$$

Wenn alles in Bewegung iſt, ſo muß man erwegen, daß ein Theil vom Gewicht des Waſſers auf die Beſchleunigung deſſelben nach der Richtung der Röhre verwandt werde, wovon alſo kein Moment in Anſehung der Axe der Spindel entſtehen kan. Um alſo in dieſem Fall das Moment zu finden, womit das Waſſer die Schraube zu drehen ſtrebt, gehe man bis zum 505 §. zurück. Dort ward die Kraft MX nach den Richtungen der Tangente des Kreiſes ZMz und des Halbmeſſers YM zerlegt, und es war die Kraft nach der Richtung der Tangente $= dM\cos\vartheta\sin\frac{\alpha - A}{a}$. Die Kraft nach YM giebt kein Moment in Anſehung der Umdrehungs-Axe: die Kraft nach der Tangente aber, die ich $= T$ ſetzen will, muß man wieder in zwo andre zerlegen. In der Ebene beyder Tangenten durch M ſey M*n* auf

Mv ſenkrecht; ſo zerlegt ſich T in zwo Kräfte nach Mv und Mn, wovon jene zur Beſchleunigung des Waſſers verwandt wird, aber dieſe $Mn =$

$dM \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \sin\eta$ die Röhre drückt. Ferner entſtehen aus dem Druck nach $MP = dM \sin\vartheta$ (505 §) zwo Kräfte nach Mv und Mn, wovon jene das Waſſer beſchleunigt, und dieſe $= dM \sin\vartheta \cos\eta$ die Röhre drückt. Beyde Kräfte nach Mn geben zuſammen den Druck

$$dM\left(\cos\vartheta \sin\eta \sin\frac{\alpha - A}{a} + \sin\vartheta \cos\eta\right).$$

Weil nun Mn mit dem Kreiſe durch M den Winkel $90° - \eta$ einſchlieſt, ſo entſteht aus dem gefundenen Druck Mn nach der Tangente dieſes Kreiſes die Kraft

$$dM \sin\eta \left(\cos\vartheta \sin\eta \sin\frac{\alpha - A}{a} + \sin\vartheta \cos\eta\right).$$

Der Druck, welcher eben daher nach MP entſteht, giebt kein Moment gegen die Umdrehungs-Axe. Braucht man nun Hr. Eulers Bezeichnung, wie im 505 §, und ſetzt $\sin\frac{\alpha - A}{a} = \sin\frac{p+s}{a}$; ſo wird $dM = \frac{hhds}{\cos\eta}$, und die Multiplication mit dem Halbmeſſer a giebt für das Element dM das Moment

$$d\mu = \frac{ahh \sin\eta^2 \cos\vartheta}{\cos\eta} ds \sin\frac{p+s}{a} + ahhds \sin\vartheta \sin\eta$$

Die Integration aber giebt

$\mu = C$

$$\mu = C - \frac{aahh\sin\eta^2 \cos\vartheta}{\cos\eta}\cos\frac{p+s}{a} + ahhs\sin\vartheta\sin\eta.$$

Für $s = 0$ wird dies Moment $= 0$, alſo

$C = \frac{aahh\sin\eta^2\cos\vartheta}{\cos\eta}\cos\frac{p}{a}$. Um aber daſſelbe für die ganze Länge der Röhre zu haben, muß man $s = b\cot\eta$ ſetzen (507 §.) Dies giebt

$$\mu = ahh\left(\frac{a\sin\eta^2\cos\vartheta}{\cos\eta}\left(\cos\frac{p}{a} - \cos\frac{p+b\cot\eta}{a}\right)\right.$$

$\left. + b\cos\eta\sin\vartheta\right)$; oder wenn man $\frac{p}{a} = \varphi$, $\frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$ ſetzt (509 §.), ſo iſt

$$\mu = ahh\left(\frac{a\sin\eta^2\cos\vartheta}{\cos\eta}\left(\cos\varphi - \cos(\varphi+\gamma)\right)\right.$$

$\left. + b\cos\eta\sin\vartheta\right)$. Man ſ. Hn. Eulers oben angeführte Abhandlung gegen das Ende des 40 §.

Weil dieſer Ausdruck von dem Winkel φ abhängt, der ſich wegen des Umlaufs der Spindel ändert; ſo erhellet, daß das Moment des Widerſtandes veränderlich ſeyn würde, welches das Waſſer der Kraft, welche die Schraube herumtreibt, entgegen ſetzen würde, wenn die Röhre beſtändig voll Waſſer bliebe.

529 §.

Ich habe die Aufgabe des vor. §. hergeſetzt, um Hn. Eulers geſamten Vortrag zu erläutern. Sonſt dürfte ſie in Rückſicht auf die Erinnerungen des 512 §. überflüßig ſeyn, wofern der Fall würklich gar nicht ſtatt haben könnte, daß man einen ununterbroche-

brochenen Fluß des Waſſers durch die Schnecke erhielte. Wenn nur ein gegebenes Stück RVS (7te Fig.) der um die Spindel geführten Röhre mit Waſſer angefüllt wäre, und überdem alles, wie im vor. §, in Bewegung angenommen würde; ſo könte man das Moment, womit das Waſſer die Schraube zu drehen ſtrebte, aus der Integral-Gleichung des vorigen §. ebenfalls finden: nur müſte die beſtändige Gröſſe C der jetzigen Vorausſetzung gemäß gehörig beſtimmt werden. Die dem Punkt R der centriſchen Linie zugehörige Ordinate FR ſey $= y$, und die Länge des Bogens RVS $= f$, ſo wird die Ordinate GS $= y + f\,\text{ſin}\eta$. Nun muß im vor. 528 §. $\mu = 0$ ſeyn, wenn der Bogen $s = a\text{PB}b\text{AF} = y\,\text{cot}\eta$ iſt, und dies giebt

$$C = \frac{aahh\,\text{ſin}\eta^2\,\text{coſ}\vartheta}{\text{coſ}\eta}\,\text{coſ}\,\frac{p + y\,\text{cot}\eta}{a}$$

$- ahhy\,\text{coſ}\eta\,\text{ſin}\vartheta$. Um hiernächſt dies Integral für den ganzen Bogen RVS zu haben, muß man $s = (y + f\,\text{ſin}\eta)\,\text{cot}\eta = y\,\text{cot}\eta + f\,\text{coſ}\eta$ ſetzen, oder auch $s = (y + b)\,\text{cot}\eta$, wenn man hier $f\,\text{ſin}\eta = b$ annimmt. Dies giebt alsdenn $\mu =$

$$\frac{aa\,hh\,\text{ſin}\eta^2\,\text{coſ}\vartheta}{\text{coſ}\eta}\left(\text{coſ}\,\frac{p + y\,\text{cot}\eta}{a} - \text{coſ}\,\frac{p + (y+b)\,\text{cot}\eta}{a}\right)$$

$+ ahhb\,\text{coſ}\eta\,\text{ſin}\vartheta$.

Wenn nun beym würklichen Gebrauch der Waſſerſchraube alles in Bewegung iſt; ſo werden mehr dergleichen Bogen mit Waſſer gefüllet ſeyn, und um das geſamte Moment des Widerſtandes zu haben, welches die angebrachte Kraft zu überwinden hat, müſte man die Momente für alle einzelne Bogen zuſammen addiren. Hiebey wäre denn noch zu erwegen,

gen, daß die Länge des höchſten und niedrigſten waſſerhaltenden Bogens abwechſelnd veränderlich, alſo in der gefundenen Formul auch b für dieſe beyden Bogen veränderlich ſeyn würde. Alle einzelne Momente würden überdem von dem veränderlichen Bogen $\frac{p}{a} = \varphi$ abhängen.

530 §.

Die Berechnung des Widerſtandes würde demnach auf dieſem Wege keine geringe Schwierigkeit haben, der Schwierigkeiten nicht zu gedenken, die man zu überwinden hätte, die Länge f der waſſerhaltenden Bogen dem 527 §. gemäß, nebſt den Geſchwindigkeiten des Waſſers, und daraus noch ferner die Zeit zu finden, binnen welcher ein jeder waſſerhaltender Bogen die Länge der ganzen um die Spindel gewundenen Röhre zurück legte. Ich habe nur zeigen wollen, wie weit man die Rechnung nach hydrauliſchen Grundſätzen treiben könne, wenn man ſie auch auf den Fall anwenden wollte, wo die Grundfläche nicht ganz unter Waſſer ſteht, und bey jedem Umlauf der Spindel nur ein Theil des untern Schraubenganges ſich mit Waſſer anfüllet. Uebrigens beziehe ich mich nun nochmahl auf die im 521 §. ſchon angeführten Gründe, weswegen ich dafür halte, daß man in der Ausübung mit der Pitotſchen und Bernoulliſchen Theorie, ſo wie ich ſie im vorhergehenden Abſchnitt vorgetragen habe, zufrieden ſeyn könne.

Der XXXVIII. Abſchnitt.

Von Schöpfwerken, Kaſtenkünſten und andern zur Hebung des Waſſers dienlichen Einrichtungen.

531 §.

Wenn das Waſſer auf eine beträchtlich groſſe Höhe gehoben werden ſoll; ſo iſt faſt allemahl ein Pumpwerk einer jeden andern Einrichtung vorzuziehen. Bey mittelmäßigen und kleinen Höhen dienen auch andre Einrichtungen, zumahl ſolche, wodurch eine beträchtliche Menge Waſſer in kurzer Zeit auf die erforderliche Höhe gebracht wird. Es giebt Fälle, wo die Anlegung ordentlicher Maſchinen von keinem ſonderlichen Nutzen, ja vielmehr nachtheilig ſeyn würde, wenn es darauf ankömt, ganze Teiche binnen kurzer Zeit auszuſchöpfen, oder das Waſſer bey einem Grundbau wegzuſchaffen, wo es nur auf eine Höhe von 3 bis 4 Fuß über einen aufgeworfenen Damm zu heben iſt. Beym See-Bau würde man über die Anlegung einer Maſchine nicht allein viele Zeit verlieren, die oft ſehr koſtbar iſt, ſondern noch dazu der Gefahr ausgeſetzt ſeyn, daß die Maſchine durch die Gewalt der Wellen wieder zerſtört würde, wenn ſie kaum zu Stande gekommen wäre. In Fällen von dieſer Art iſt das beſte Mittel zu ſeinem Zweck zu gelangen dieſes, daß man durch eine groſſe Menge Arbeiter, die mit Mulden und Eimern,

Kuffen und andern dienlichen Gefäſſen verſehen ſind, das Waſſer ausſchöpfen laſſe.

532 §.

Wenn man das Bewegungs-Moment $F\alpha$ (315§) für einen Menſchen auf 50 Pf. rechnet, und die Formul $M = \frac{3600\, F\alpha}{a}$ für die Menge Waſſer behält, die ein Menſch in einer Stunde auf die Höhe *a* heben kan, ſo ſcheint es, wenn $a = 4$ Fuß geſetzt wird, daß man auf $3600 \times 12\frac{1}{2}$ Pf. oder ohngefehr 625 Cub. Fuß Waſſer für diejenige Menge annehmen könne, die ein Menſch in einer Stunde 4 Fuß hoch heben kan, wenn auch ein Cubic-Fuß 72 Pf. ſchwer in Anſchlag gebracht wird. Dies würde dienen, einen ohngefehren Ueberſchlag zu machen, wieviel Arbeiter nöthig wären, wenn in gewiſſer Zeit eine gegebene Menge ausgeſchöpft werden ſollte. Daß dies aber keine allgemeine Regel ſey, wird man leicht daraus abnehmen, weil es vornemlich auf die Beſchaffenheit des Orts ankomt, und auf eine vortheilhafte Stellung des Leibes beym ſchöpfen, wobey die Leute nicht ſo leicht ermüden. Um das Heben den Leuten zu erleichtern, auch das tiefere Bücken beym unmittelbaren Schöpfen zu vermeiden, (welches jedoch ſoviel nicht zu bedeuten hat, wenn die Leute ſelbſt etwa bis am Knie im Waſſer ſtehen) hat man der Sache auch noch durch verſchiedene Arten ganz einfacher Mechaniſcher Einrichtungen zu Hülfe kommen wollen. Daher iſt die ſo genannte Schwung-Schaufel, oder Holländerin entſtanden. Sie iſt ein aus fünf Stück Brettern ohngefehr

gefehr in Geſtalt einer ſonſt bekannten Wurfſchaufel zuſammengefügtes Gefäß, worin ein Stiel in gehöriger Länge befeſtiget wird. Man hängt ſie an einem Geſtelle vermittelſt eines Seils, ſo auf, daß ein Menſch, der den Stiel anfaſſet, indem er ſie hin und wieder ſchwingt, wechſelsweiſe jedesmahl das Waſſer damit faſſen, und vorwärts über einen Damm werfen kan. Obgleich dieſer Einrichtung gewöhnlich ein beträchtlicher Effect zugeſchrieben wird, ſo iſt derſelbe nach Belidors Urtheil doch nicht erheblich. Ein Arbeiter kan vermittelſt derſelben in zweenen Schwüngen, wozu etwa 4 Secunden Zeit gehören, nicht über einen halben Cubicſchuh Waſſer ſchöpfen, welches auf die Stunde nur 450 Cubic-Schuh giebt.

533 §.

Eine andre ganz ſimple Art, das Waſſer auf eine Höhe von etwa 4 Fuß zu bringen, iſt diejenige, ſo vermittelſt der Heb-Schaufel, oder Heb-Schüſſel bewerkſtelliget wird. Dieſe iſt wie ein Trog, oder eine Rinne AB geſtaltet, und bey ihrer Mündung mit Zapfen C, D, verſehen, um welche ſie ſich drehen läſt. Sie iſt im Boden nahe bey dem hintern Theil A mit einem Ventil E verſehen, und dieſer Theil wird durch einen oder zween Arbeiter, die bey F und G angreifen, auf- und niederwärts bewegt. Beym Niederdrücken tritt das Waſſer durchs Ventil in die Rinne hinein, und die Arbeiter müſſen gleich darauf dies hintere Ende der Heb-Schaufel etwas höher heben, als das vordere liegt, damit nun das Waſſer gegen die Mündung B zu ein Gefälle bekomme, und durch dieſelbe ablaufe.

Dieſe

Dieſe Heb-Schüſſel wird auch wohl gedoppelt gemacht, ſo daß ſie aus zweyen gleich groſſen einander gegen über ſtehenden Rinnen beſtehet, davon ſich die eine ſenkt, und das Waſſer ſchöpft, wenn die andre gehoben wird. Dies geſchicht, damit während des Senkens keine Zeit verlohren werden ſoll. Wenn man indeſſen bedenkt, daß an der doppelten Heb-Schüſſel auf jeder Seite zwey, alſo zuſammen vier Perſonen arbeiten müſſen, da die einfache durch zwo Perſonen bewegt wird, ſo iſt es im Grunde einerley, ob man eine doppelte, oder zwo einfache Heb-Schüſſeln braucht. Zeichnungen und Beſchreibungen von beyden Arten, imgleichen von der Schwungſchaufel, und andern zum Ausſchöpfen dienlichen Geräthſchaften findet man in Leupolds Theatro Machin. Hydraul. I Th. II Cap. 30 u. f. §§. imgleichen in Belidors Architectura Hydraul. II IV Cap. 771 u. f. §§.

534 §.

Will man das Waſſer auf gröſſere Höhen bringen, ſo dient zuweilen eben die Art der Waſſerſchöpfungen, vermittelſt der eben beſchriebenen Gefäſſe, wenn ſich die Einrichtung ſo machen läſt, daß das Waſſer, welches eine oder etliche Perſonen auf die Höhe von etwa 4 Fuß gebracht haben, von andern weiter befördert wird. Doch iſt hiezu eine ziemliche Anzahl Arbeiter nöthig, und wo dieſe fehlen, da muß man eigene dazu beſtimmte Maſchinen anlegen, beſonders, wenn es ein beſtändiges Werk ſeyn ſoll, und das gehobene Waſſer zum anderweitigen Gebrauch beſtimmt iſt. Unter den in ſolcher Abſicht gebräuchlichen Maſchinen verdienen die Kaſten-

Künſte und Roſenkranz-Mühlen, wovon die Schaufel-Werke, und die Taſchen- oder Büſchel-Künſte beſondre Arten ſind, noch eine kurze Beſchreibung; weil ſie ſonſt am meiſten üblich geweſen ſind, bevor man die Pumpen-Künſte zu der jetzigen Vollkommenheit gebracht hatte.

9 Fig. Man bringt unter dem Waſſer eine horizontal-liegende Welle AB an, und grade über ihr eine andre CD, die eben ſo groß, als die vorige iſt, und mit ihr parallel liegt. Um beyde Wellen werden Ketten oder Seile geführt, die ſich in ſich ſelbſt wieder ſchlieſſen, und deswegen Ketten- oder Seile ohne Ende heiſſen. Dieſe Ketten müſſen ſo ſtark geſpannt ſeyn, daß wenn die obere Welle durch eine daſelbſt angebrachte Kraft umgedrehet wird, vermittelſt der Ketten die untere Welle in eben die Bewegung gebracht werde. An den Ketten befeſtiget man eine nach Proportion der Höhe der obern Welle über die untere gewählte Anzahl Käſten, E, F, G, H, oder andre zum Waſſerſchöpfen dienliche Gefäſſe ſo, daß ihre Oefnung, wenn ſie abwärts gehen nach unten, wenn ſie aber hinauf ſteigen aufwärts gekehrt iſt: und alsdenn heiſt das Werk eine Kaſten-Kunſt. Wenn aber an dem Seil oder der Kette ohne Ende, ſtatt der Käſten, lederne ausgeſtopfte Kugeln, hölzerne Scheiben, oder auch wohl viereckte Tafeln ſo angebracht ſind, daß ſie das Waſſer in einer Röhre zum Steigen bringen, durch welche in ſolcher Abſicht die Kette, oder das Seil durchgehen muß, ſo heiſt dieſe Einrichtung ein Paternoſterwerk, oder eine Roſenkranz-Mühle. Die obere Welle kan durch Menſchen, Thiere, Waſſer oder Wind getrieben werden, wenn die nöthige Einrichtung dazu gemacht iſt.

535 §.

535 §.

Was nun zuerſt die Kaſtenkunſt betrift, ſo macht man ſich von der Art, wie eine ſolche Maſchine hebt, leicht folgende Vorſtellung. Indem die Käſten unter der untern Welle herum kommen, ſchöpfen ſie das Waſſer, welches ſie bis an die obere Welle mit hinauf nehmen, und daſelbſt in das dort angebrachte Behältniß ausſchütten. So einfach indeſſen die Einrichtung ſelbſt iſt; ſo viel Schwierigkeit hat doch die würkliche Erbauung einer ſolchen Maſchine im groſſen. Anfangs brauchte man viereckte Wellen, und wählte nach der Zeit ſechseckigte, auch achteckigte, endlich völlig runde Wellen, weil ſich die Käſten leicht gegen die eckigten Wellen klemmen, und dieſer Umſtand der Bewegung groſſe Hinderniſſe ſetzt. Auch iſt das ein gewöhnlicher Fehler ſolcher Kaſtenkünſte, daß ſie oben beym Ausgieſſen viel Waſſer verſchütten, wenn man demſelben nicht durch eine zweckdienliche Einrichtung der Geſtalt, ſowohl der Welle, als auch der Käſten, zuvor zu kommen ſucht. Wie Ketten, Welle und Käſten eingerichtet ſeyn müſſen, hat Leupold im Theatro machinarum Hydraul. im VI. Cap. des I. Theils gewieſen. Belidor in der Architectura Hydraul. II. Buch IV. Cap. 748 §. beſchreibt eine im Jahr 1722 zu Rochefort erbauete Kaſten-Kunſt, die von Pferden getrieben wird. Bey derſelben iſt nur die obere Welle allein gebraucht, und die untere, welche ſonſt unter dem Waſſer zu ſtehen kommt, fehlt. Dies hat zwar die Würkung, daß die Käſten unter dem Waſſer ſich deſto freyer wenden können: hiengen aber die Käſten in einem etwas ſchnell flieſſenden Waſſer, ſo dürfte

es den Kaſten-Kranz zu ſehr hin und wieder ſchleudern, und die regelmäßige Bewegung ſtören.

536 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche die angebrachte Kraft in gegebener Zeit vermittelſt der Kaſtenkunſt auf eine gegebene Höhe bringen kan.

Aufl. Die an der Kunſtkette hangenden Käſten müſſen, ſo lange ſie ledig ſind, mit ſich ſelbſt im Gleichgewicht ſeyn. Diejenigen aber, welche zugleich in die Höhe ſteigen, müſſen ſich mit Waſſer füllen, und das Gewicht dieſes mit den Käſten hinauf ſteigenden Waſſers iſt die Laſt, oder der Widerſtand, den die Maſchine überwinden ſoll, wenn man die Friction und andere Hinderniſſe der Bewegung beyſeit ſetzt. Aus der Geſtalt der Welle und der Käſten läſt ſich beurtheilen, wie viele derſelben ſich an den Umfang derſelben nach und nach anlegen, bevor ſie einmahl herum kommt. So müſſen ſich z. E. acht Käſten nach und nach anlegen, wenn die Welle achteckigt iſt: daraus findet man, wie lang das Stück des Kaſtenkranzes ſey, welches ſich binnen der Umlaufszeit der Welle aufwickelt, und dieſe Länge iſt einerley mit der Höhe, um welche die Laſt in eben der Zeit ſteigt. Es ſey die ganze Höhe, worauf die Maſchine das Waſſer hebt, $= f$, die Anzahl der Käſten, welche zugleich ſteigen, $= n$, und die Menge Waſſer, welche ſie alle zuſammen enthalten, $= K$, ſo hält jeder eine Menge Waſſer $= \frac{1}{n} K$, und der Abſtand eines jeden Kaſtens von

dem

dem folgenden, iſt $=\frac{1}{n}f$. Ferner ſey m die Anzahl der Käſten, welche ſich binnen der Umlaufszeit ϑ der Welle nach und nach anlegen, und ihr Waſſer ergieſſen; ſo iſt $\frac{m}{n}K$ die Menge Waſſer, welche die Maſchine in der Zeit ϑ auf die Höhe f bringt, die ganze Laſt K aber ſteigt in der Zeit ϑ um die Höhe $\frac{m}{n}f$. Demnach iſt die Geſchwindigkeit der Laſt $=\frac{mf}{n\vartheta}$; und man hat $F\alpha=\frac{mKf}{n\vartheta}$, wenn F die Kraft in dem Verſtande des 313 §, und α die Geſchwindigkeit der Kraft bezeichnet. Iſt nun diejenige Menge Waſſer $=M$, welche die Maſchine in der Zeit T auf die Höhe f bringt, ſo hat man $\vartheta:T=\frac{m}{n}K:M$. Dies giebt $\frac{mK}{n\vartheta}=\frac{M}{T}$, alſo $F\alpha=\frac{Mf}{T}$, und man erhält, wie im 500 §, $M=\frac{F\alpha T}{f}$.

537 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung einer Kaſtenkunſt anzugeben, wenn feſtgeſetzt iſt, welche Art der Kräfte die Kunſt treiben, und wie hoch ſie das Waſſer heben ſoll.

Aufl. Nachdem man einen ohngefehren Ueberſchlag wegen der Friction gemacht hat, ſuche man die Menge Waſſer, welche in der Zeit T zu der gege-

gebenen Höhe f gebracht werden kan, aus der Glei=chung $M = \frac{(F-\varphi)\alpha T}{f}$ (536. 320 §.). Da nun die Umlaufszeit der Welle, woran der Kaſten=kranz hängt, $\vartheta = \frac{mKf}{n(F-\varphi)\alpha}$ iſt, ſo ſetze man den Werth $\frac{Mf}{T}$ ſtatt $(F-\varphi)\alpha$, ſo wird $\vartheta = \frac{mKT}{nM}$. Der Umfang der Kunſt=Welle ſey p, ſo hat man $f:p = n:m$, alſo $\vartheta = \frac{pKT}{fM}$, und $K = \frac{M.f\vartheta}{p.T}$. In dieſer Gleichung kann man von den dreyen Gröſſen K, p, ϑ, zwey willkührlich annehmen. Es iſt aber nicht rathſam, daß die Kunſtwelle, oder der ſogenannte Bock, ſehr ſchnell umlaufe, beſonders wenn die Käſten ſo eingerichtet ſind, daß das Waſſer nicht auf einmahl oben in den Behälter hinein ſtürzen kann, ſondern etwas Zeit zum Auslaufen nöthig hat. Wenn man nun in Betrachtung ziehet, daß $\frac{p}{\vartheta}$ die Geſchwindigkeit ſey, womit die Käſten um die Welle laufen, ſo kan man dieſe nach Beſchaffenheit der Umſtände anneh=men. Sie ſey $=\beta$, ſo iſt $p = \beta\vartheta$, und $K = \frac{M.f}{\beta.T}$. So viel Waſſer müſſen alſo die zugleich ſteigenden Käſten faſſen. Die Anzahl aller Käſten, woraus der ganze Kaſten=Kranz muß zuſammenge=

ſetzt

ſetzt werden, beruhet auf die Länge des ganzen Kranzes und die Länge der einzelnen Ketten-Glieder, da dann gewöhnlich an jedem Ketten-Gliede ein Kaſten befeſtiget iſt. Ihre halbe Anzahl iſt jedesmahl angefüllt, wenn demnach dieſe beſtimmt iſt, ſo hat man $\frac{1}{n}K$ als die Menge Waſſer, die jeder Kaſten faſſen muß. Wie groß die Geſchwindigkeit α des angegriffenen Punkts der Maſchine ſeyn müſſe, wird durch die Wahl der Kraft beſtimmt, welche die Maſchine treiben ſoll, und die übrige Einrichtung beſtimmt das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$.

538 §.

Die im 535 §. angeführte Kaſtenkunſt zu Rochefort, welche Hr. Belidor beſchreibt, iſt nach ſeinem eigenen Urtheil kein Muſter einer ſolchen Maſchine. Sie wird von 4 Pferden getrieben, und hebt doch in einer Stunde nur 1296 Cubicfuß Waſſer auf eine Höhe von 24 Fuß. Aber 4 Pferde würden $\frac{36000 \times 4}{24} = 6000$ Cubic-Fuß in einer Stunde ſo hoch heben können (318 §.), wenn die Maſchine ihre gröſte Vollkommenheit hätte. Die Maſchine iſt zwar ſehr überſetzt, indeſſen zeiget Hr. Belidor, daß die davon herrührende Friction allein den Effect ſo ſehr nicht vermindern könne: ja er findet nach angeſtellter Berechnung, daß man unnöthiger Weiſe 4 Pferde brauche, und daß 2 genügen würden, die Maſchine zu treiben, wenn man ſie mit der ihnen angemeſſenen Geſchwindigkeit von 3 bis 4 Fuß in

einer Secunde arbeiten lieſſe. Ich bemerke hiebey noch, daß es nach den Zeichnungen das Anſehen habe, als ſey die Höhe von 24 Schuh, auf welche die Maſchine das Waſſer hebt, nur von der Oberfläche des in der Tiefe befindlichen Waſſers bis dahin gemeſſen, wo die Käſten ihr Waſſer ausgieſſen. Nun wird zwar dasjenige Waſſer, womit die Käſten angefüllt ſind, die ſich noch unter der Waſſerfläche befinden, von dem in der Tiefe befindlichen Waſſer getragen, ſo daß man dieſen Theil von der Laſt abrechnen könnte. Indeſſen widerſtehet dagegen das Waſſer der Bewegung der Käſten. Dieſes Widerſtandes halber kan man das in den erwehnten unter der Waſſerfläche befindlichen Käſten enthaltene Waſſer noch mit zur Laſt rechnen, und die halbe Länge des Kranzes für die Höhe nehmen, worauf die Maſchine das Waſſer bringen ſoll. Bey der Rochefortſchen Maſchine geht der Kaſtenkranz noch etliche Fuß tief unter Waſſer, und der ganze Kranz iſt 60 Fuß lang, alſo die halbe Länge 30 Fuß. Nimt man alſo wegen der angeführten Urſache dieſe 30 Fuß für die Höhe, worauf die Maſchine das Waſſer bringen ſoll, ſo betrüge die Waſſermenge nur $\frac{36000 \times 4}{30}$ $= 1200 \times 4 = 4800$ Cub. Fuß, welche 4 Pferde ſo hoch bringen könnten, und für zwey Pferde wäre ſie 2400 Cub. Fuß: aber die Maſchine hebt nur etwas mehr als die Hälfte hievon.

539 §.

Mit den bisher beſchriebenen Kaſten-Künſten haben diejenigen Schöpf-Räder einige Aehnlichkeit, welche durch angehängte Käſten oder Eimer das unten

ten geſchöpfte Waſſer mit in die Höhe bringen und daſelbſt ausgieſſen. Eine andre Art Schöpf-Räder iſt mit Röhren verſehen, die das Waſſer, indem das Rad umläuft, auffangen, und in der Mitte des Rades ausgieſſen. Sie bringen das Waſſer auf eine ſolche Art in die Höhe, die derjenigen ähnlich iſt, wie es die Waſſerſchraube hebt, und man könnte ſie durch den Nahmen der **Schnecken-Räder** von der andern Art Schöpf-Räder unterſcheiden. Beyder Arten hat ſchon **Vitruv** im X. Buch de Architectura erwehnt. **Leupold** im Theatro Machin. Hydraul. I. Th. III. Cap. beſchreibt zwölferley Arten, wovon einige ganz unnütz ſind; andere etwas ausrichten, jedoch entweder viel Waſſer vergeblich verſchütten, oder es nur auf eine geringe Höhe bringen; noch andre aber das verlangte ziemlich leiſten. Wenn ein ſolches Rad im flieſſenden Waſſer hängt, ſo kann es durch die Gewalt des Stroms ſelbſt umgetrieben werden, und man darf es in ſolcher Abſicht am Umfang nur mit Schaufeln verſehen. Hängt es im ſtillſtehenden Waſſer, ſo muß es vermittelſt einer andern mechaniſchen Einrichtung umgetrieben werden, wozu ein an eben der Welle angeordnetes Lauf-Rad dienen kan.

540 §.

Wer über die Würkung der Schnecken-Räder theoretiſche Unterſuchungen anſtellen wollte, der müßte ſo zu Werk gehen, wie oben bey der Waſſerſchraube dazu die Anleitung gegeben iſt. Bey den übrigen eigentlich ſo genannten Schöpfrädern hat die Berechnung weniger Schwierigkeit, wenn ſie ſo eingerichtet ſind, wie **Belidor** in der Architect. Hydraul.

draul. II. Buch IV Cap. 783 und 784 §. davon die Beſchreibung giebt. Das hier beſchriebene Schöpf-Rad iſt mit beweglichen Eimern verſehen, welche ganz frey ſeitwärts am Umfang des Rades an eiſernen Polzen aufgehenkt werden. Weil dieſe Eimer ſo lange von ſelbſt vertical herab hängen, bis ſie in den oberſten Stand gelangen, ſo verſchütten ſie unterweges nichts von dem geſchöpften Waſſer, welches feſt gemachte Zuber oder kleine Käſten thun. Oben aber beym Sammelbehälter wird ein Querholz oder eine Sparre ſo angebracht, das jedes Eimer in dem Augenblick, da es oben anlangt, daran ſtößt, und dadurch auf die Seite geneigt wird, ſo daß es das Waſſer in den Behälter fallen läſt. Wenn man nun jedes Eimer für ſich allein als eine Laſt betrachtet, welche vermittelſt der am Umfang des Rades angebrachten Kraft gehoben wird, ſo ſiehet man wohl, daß ſich dieſe Laſt unter eben den Umſtänden befinde, wie eine an der Warze eines Krumzapfens hängende Laſt (332 §.), deren Moment ſich alle Augenblick ändert. Deswegen würde nicht wohl eine gleichförmige Bewegung des Schöpfrades zu erhalten ſeyn, wenn nicht mehrere Eimer am Umfange des Rades vertheilt wären, ſo daß die Summe der Momente aller angefüllten Eimer allemahl ohngefehr dieſelbe Gröſſe behielte. Weil nun die Laſt binnen der halben Umlaufszeit des Rades um die Höhe des Durchmeſſers gehoben wird, ſo iſt das Verhältniß zwiſchen den Wegen der Kraft und Laſt $= \pi : 2$, wie bey der Kurbel (334 §.). Es ſey die Menge Waſſer $= K$, welche in allen Eimern zugleich ſteigt, des Schöpf-Rades Halbmeſſer $= r$, die halbe Umlaufszeit $= \vartheta$, und das Moment der angebrachten Kraft,

Kraft, $= F\alpha$; ſo hat man $F\alpha = \frac{2r}{\vartheta} K$. Iſt nun M die Menge Waſſer, welche das Rad in jeder andern Zeit T hebt, ſo iſt $\vartheta : T = K : M$, und $\frac{K}{\vartheta} = \frac{M}{T}$, folglich $F\alpha = \frac{2r.M}{T}$, und $M = \frac{F\alpha T}{2r}$, wie bey andern Waſſerkünſten, weil hier $2r$ die Höhe iſt, worauf das Waſſer gehoben wird. Uebrigens iſt $\alpha = \frac{\pi r}{\vartheta}$, alſo $\vartheta = \frac{\pi r}{\alpha}$, woraus $K = \frac{M}{T}.\vartheta$ gefunden wird. Weil nun die Geſchwindigkeit α des angegriffenen Punkts durch die Natur der gewählten Kraft beſtimmt wird, ſo iſt ϑ beſtimmt, alſo auch die Menge Waſſer K, welche alle zugleich hinaufſteigende Eimer faſſen müſſen: und wenn man dieſe durch die halbe Anzahl der anzuhängenden Eimer dividirt, ſo weiß man, wie groß jedes Eimer gemacht werden müſſe.

Der

Der XXXIX. Abſchnitt.

Von Roſenkranz-Mühlen und Schaufel-Werken.

541 §.

Die im 534 §. ſchon erwehnten Roſenkranz-Müh-
len ſind von zweyerley Art: ſie haben das Waſ-
ſer entweder in lothrecht ſtehenden Röhren grade auf-
wärts, oder in Röhren, die gegen den Horizont ge-
10 neigt ſind. In jenem Fall ſind die Röhren gewöhn-
Fig. lich cylindriſch, und die Kunſtkette iſt alsdenn mit
ledernen ausgeſtopften Kugeln, oder ſo genannten
Püſcheln verſehen, daher dann in dieſem Fall auch
der Nahme **Püſchel-Kunſt** gebräuchlich iſt. Die
Welle AB, oder der Bock, wodurch der Roſenkranz
oder Püſchelkranz GHI ſeine Bewegung erhält, muß
eine eigene zu dieſer Abſicht dienliche Einrichtung
haben. Es iſt gewöhnlich eine runde Scheibe $1\frac{1}{2}$
bis 2 Ellen im Durchmeſſer, etwa 6 bis 8 Zoll dick;
ihr äuſſerer Umfang iſt mit einer winklichten Vertie-
fung verſehen, worin die Kette etwa wie ein Seil
auf dem Umfang einer Rolle läuft. Damit ſie aber
nicht rutſche, werden auf dem Umfang hervorragen-
de Eiſen geſetzt, welche die Gelenke der Kette faſſen,
und das herabglitſchen verhindern. Damit ſich die
Püſchel am innern der Röhre EF nicht gar zu ſtark
reiben, müſſen ſie nicht zu gedrange gehen, und nicht
zu ſtark ſeyn. Solche Püſchel, die nicht völlig ge-
nau

nau anſchlieſſen, laſſen zwar etwas Waſſer durchfallen, man ſucht aber dem daher rührenden Waſſer-Verluſt durch eine etwas ſchnelle Bewegung zu begegnen. Böckler hat ſtatt der ledernen Püſchel hölzerne Scheiben vorgeſchlagen, und in ſolcher Abſicht dem Bock ſowol, als der Kette, eine etwas andre Einrichtung gegeben. Leupold aber erinnert dagegen, daß die hölzernen Scheiben zu wandelbar ſeyn, und insbeſondere alsdenn, wenn das Werk zuweilen ſtille ſtehet, eindorren und aufſpringen würden. Man müſte deswegen nach Belidors Urtheil, wenn das Werk von Dauer ſeyn ſollte, meſſingene Scheiben wählen. Die beſte Einrichtung der Scheiben aber iſt unſtreitig diejenige, welche Belidor in der Archit. Hydraul. II Buch IV Cap. 740 §. beſchreibt, ſo wie ſie bey den Paternoſterwerken am Canal de Picardie gebraucht werden. Die hölzernen Scheiben an ſich haben einen etwas kleinern Durchmeſſer, als die Röhren, worin ſie hinauf ſteigen. Auf ihre flache Seite legt man eine oder zwey lederne Scheiben, deren Durchmeſſer grade ſo groß iſt, als der Durchmeſſer der Röhre. Auf dieſe lederne Scheiben wird wiederum eine eiſerne Platte gelegt, welche dazu dienet, die Leder vermittelſt eines kleinen Schließ-Riegels deſto feſter auf einander zu preſſen.

542 §.

Dafern die ledernen Scheiben ſo genau an die innere Fläche der Steigröhre anſchlieſſen, daß ſie keine Luft durchlaſſen, ſo ſteigt das Waſſer in die untere Mündung der Saugröhre nach eben den Geſetzen hinauf, wie es in den Stiefel eines Pumpwerks hinauf ſteigt, indem der Kolben gehoben wird: es

wird theils durch den Druck des äuſſern Waſſers, worin die Steigröhre ſteht, hinaufgetrieben, theils durch den Druck der Atmoſphäre; und dies letzte beſonders alsdenn, wenn die Entfernung einer Scheibe von der andern gröſſer iſt, als die Tiefe, um welche die untere Mündung der Steigröhre unter Waſſer ſteht. Um alſo dieſer Vorausſetzung gemäß den Widerſtand zu finden, welchen die Scheiben der Bewegung der Maſchine entgegen ſetzen, müſte man folgendes erwegen. Es ſey die Entfernung einer jeden Scheibe von der nächſtfolgenden $= b$, ſo ſtehet über einer jeden Scheibe, ſo lange ſie ſich der höchſten Mündung der Steigröhre noch nicht bis auf eben dieſe Entfernung genähert hat, eine Waſſerſäule in der Höhe $= b$; und dieſe Waſſerſäule muß die hinauf ſteigende Scheibe mit in die Höhe heben. Hiezu wird nun zwar eine Kraft erfordert, die das Gewicht dieſer Waſſerſäule übertrift: wenn indeſſen die Bewegung nicht überaus ſchnell ſeyn ſoll, ſo darf dieſe Kraft die erwähnte Waſſerſäule nur um etwas ſehr weniges übertreffen (371 §.). Der unterſten von den Scheiben, die in der Steigröhre jedesmahl zugleich ſteigen, folgt das Waſſer vermöge des äuſſern Drucks: und ſo lange die unterſte Scheibe noch nicht über den Waſſerpaß des aus der Tiefe zu hebenden Waſſers herauf geſtiegen iſt; ſo lange drückt das unter derſelben befindliche Waſſer dieſe Scheibe aufwärts. Gewöhnlich ſind die Scheiben nicht über $2\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß von einander entfernt: alſo wird auch die unterſte Scheibe noch nicht ſonderlich über den Waſſerpaß erhaben ſeyn, wenn die nächſtfolgende Scheibe in die untere Mündung der Steigröhre eintritt. Nimmt man dies alles zuſammen,

ſo wird dadurch folgende gewöhnliche Vorausſetzung gerechtfertiget: die Laſt, welche der Bewegung des Roſenkranzes widerſtehet, ſey einerley mit dem Gewicht der in der Steigröhre befindlichen Waſſerſäule, die ſich von der Oberfläche des zu hebenden Waſſers bis an die oberſte Mündung der Steigröhre erſtreckt.

Von dieſem Gewicht muß jedoch bey einer genauen Rechnung ſo viel abgehen, als das Waſſer wägen würde, welches den Raum einnehmen könnte, ſo die Kunſtkette in der Röhre ausfüllt. Um dieſen Abzug gleich mit in Rechnung zu bringen, muß man wiſſen, wie viel ein Theil der Kunſtkette von beſtimmter Länge am Gewicht im Waſſer verliert. Um die Prüfung anzuſtellen, wählt man am bequemſten ein Stück, das ſo lang iſt, als die Entfernung der Scheiben von einander, wenn eine von den Scheiben daran hängt. Das im Waſſer verlohrne Gewicht iſt ſo groß, als das Gewicht einer Menge Waſſer, die mit dieſem Theil der Kunſtkette einerley Raum einnimmt. Wenn man nun den körperlichen Inhalt dieſes Raums ſucht, und denſelben mit der Länge des geprüften Theils der Kunſtkette dividirt, ſo giebt der Quotient den Inhalt der Grundfläche einer eben ſo hohen Waſſerſäule, die einen gleichen Inhalt hätte. Vermindert man nun den Quadrat-Inhalt der Mündung der Steigröhre, um den Inhalt dieſer gefundenen Grundfläche; ſo kan der Reſt die reducirte Mündung der Steigröhre heiſſen, welche man bey der Berechnung des Widerſtandes ſtatt der wahren Mündung brauchen muß.

543 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche eine lothrecht ſtehende Püſchel oder Scheibenkunſt binnen gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe bringen kann, wenn die Kraft beſtimmt iſt, welche die Maſchine treiben ſoll.

Aufl. Die Umlaufszeit der Kunſtwelle, oder des Bocks, ſey $=\vartheta$, ihr Umfang $=p$, ſo ſteigt die Laſt K binnen der Zeit ϑ um eine Höhe $=p$, und man hat, wie bey allen Maſchinen, $F\alpha = \frac{p}{\vartheta} K$. Wenn nun die reducirte Fläche eines jeden Querſchnitts der Steigröhre $=h^2$ iſt, und f die Höhe des Gußrohrs über das aus der Tiefe zu hebende Waſſer, ſo iſt $K=h^2 f$, und $F\alpha = \frac{p}{\vartheta} . h^2 f$. Aber binnen der Zeit ϑ hebt die Maſchine eine Menge Waſſer $=h^2 p$, und wenn M die in der Zeit T gehobene Menge bedeutet, ſo iſt $\vartheta : T = h^2 p : M$, alſo $\frac{h^2 p}{\vartheta} = \frac{M}{T}$. Dies giebt $F\alpha = \frac{Mf}{T}$, und $M = \frac{F\alpha T}{f}$, wie bey den übrigen Waſſerkünſten.

Geſetzt, die Kunſt ſoll von 4 Menſchen getrieben werden, ſo iſt nach dem 317 §. $F\alpha = 3$ Cub. Fuß. Hebt nun die Kunſt das Waſſer 8 Fuß hoch, ſo iſt für eine Stunde die Waſſermenge $= \frac{3}{8} 3600 = 3 \times 450 = 1350$ Cub. Fuß. Statt deſſen hebt, nach Belidors Rechnung, ein ſolcher am Canal de Picardie erbaueter Roſenkranz 2780 Cubicſchuh

auf

auf dieſe Höhe von 8 Schuh, obgleich derſelbe nur von 4 Menſchen getrieben wird. Allein es ſcheint, daß ein Rechnungsfehler eingeſchlichen ſey. Die Kunſtkette läuft um eine Walze, die mit ſechs Gabelförmigen Armen verſehen iſt, welche die Scheiben des Kunſtkranzes faſſen. Dieſe Arme ſchlieſſen Winkel von 60 Graden ein, und nach dem der Zeichnung beygefügten Maaßſtab ſowohl, als auch nach dem 744 §. a. a. O. ſind dieſe Arme von der Axe der Welle bis dahin, wo ſie deu Kunſt-Kranz ergreifen, 10 Zoll lang. Alſo iſt auch die Zwiſchenweite von einer Gabel zur andern, nemlich an demjenigen Ort, wo die Kunſtkette aufliegt, nur 10 Zoll anſtatt 13 Zoll, die im 742 §. a. a. O. angenommen ſind. Demnach legt die Kette bey jedem Umlauf der Gabelwalze nur einen Weg von 5 Füſſen zurück, ſtatt 6½ Fuß nach Belidors Rechnung, und in einer Minute 55 × 5 = 275 Fuß ſtatt 357½ F., (weil die Kurbel in einer Minute 55mahl umläuft). Die Steigröhre hat 5 Zoll im Durchmeſſer, alſo iſt die Fläche ihrer Mündung ¼ × 3,14 × 25 = 19,625 Qu. Zoll. Ein Stück der Kunſtkette 30 Zoll lang verlohr im Waſſer 1¼ Pf. am Gewicht, und ſo viel Waſſer füllet einen Raum von ohngefehr 31 Cubic-Zoll. Die Grundfläche einer 30 Zoll hohen Säule von dieſem Inhalt iſt 1,03 Qu. Zoll groß, alſo wird die reducirte Mündung der Steigröhre 18,595 oder faſt 18,6 Qu. Zoll. Dies mit 275 × 12 Zoll multiplicirt, giebt 61380 Cub. Zoll für die Waſſermenge in einer Minute, alſo 3682800 Cub. Zoll, oder 2131 Cub. Fuß in einer Stunde, welches die anfangs gefundene Waſſermenge von 1350 Cubic-Fuß doch noch um ein anſehnliches übertrifft.

Hiebey iſt aber zu bemerken, daß dies wohl das äuſſerſte ſey, was man von ſolchen Arbeitern erwarten könne. Sie wurden zwar alle Stunden abgelöſet, jedoch ſcheint die Arbeit immer noch zu ſtark zu ſeyn, wegen der groſſen Geſchwindigkeit der Kurbel. Dieſe hatte 15 Zoll Bug, alſo durchlief der angegriffene Punkt einen Kreis von $30 \times 3{,}14 = 94{,}2$ Zoll, und dies 55mahl in einer Minute. Es war alſo ſeine Geſchwindigkeit $= \frac{94{,}2 \times 55}{60} =$ 86 Zoll, oder etwa 7 Fuß in einer Secunde; da man ſtatt deſſen für Menſchen gewöhnlich nur 2 bis 3 Fuß rechnet, wenn ſie die Arbeit eine zeitlang aushalten ſollen. Dagegen war die Laſt einer Waſſerſäule von $18{,}6 \times 96 = 1785$ Cub. Zoll, die alſo 72 Pf. wiegt; weil dieſe nun 10 Zoll, die Kraft aber 15 Zoll von der Bewegungs-Axe entfernt war, ſo erforderte dieſe Laſt am Umfang der Kurbel eine Kraft $= \frac{2}{3} \cdot 72 =$ Pf. $= 48$ Pf. Alſo würkte jeder Arbeiter mit einer Kraft von 12 Pf. in die Kurbel. Wollte man ſich dieſe Erfahrung in andern Fällen zur Richtſchnur dienen laſſen, ſo würde man das Bewegungs-Moment $F\alpha$ für einen Menſchen auf 84 Pf. ſchätzen können, da man es ſtatt deſſen gewöhnlich nur auf 50 bis 54 Pf. ſchätzt. Hr. Belidor meldet nicht, daß er die von der Maſchine gehobene Waſſermenge würklich gemeſſen habe; alſo könnte noch der Zweifel entſtehen, ob man ſich auf die Rechnung ſo gänzlich verlaſſen könne, weil ſie vorausſetzt, daß die Zwiſchen-Räume zwiſchen den Scheiben in der Steigröhre ſich allemahl ganz mit Waſſer angefüllet haben. Wäre dies vielleicht nicht geſche-

geſchehen, ſo wäre würklich die gehobene Menge Waſſer nicht ſo groß geweſen, auch hätten die Arbeiter mit geringerer Kraft in die Kurbel gewürkt.

544 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung einer lothrecht ſtehenden Püſchel-Kunſt anzugeben, wenn die Art der Kräfte gewählt iſt, welche die Maſchine treiben ſoll.

Aufl. Man ſuche zuförderſt die Menge Waſſer, welche die Maſchine heben kan, aus der Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{f}$. Ferner ſey ϑ die Umlaufszeit der Welle, ſo hat man $\vartheta = \frac{ph^2 f}{F\alpha}$ (543 §.) $= \frac{ph^2 T}{M}$. In dieſer Gleichung kan man von den dreyen Gröſſen ϑ, p, h^2, zwey willkührlich annehmen. Es iſt hiebey zu bemerken, daß p hier den Umfang des regulären Polygons bedeute, welche die graden Linien von einer Gabel zur andern einſchlieſſen würden, wenn die Kunſtwelle, wie bey den vorhingedachten franzöſiſchen Roſenkränzen eine Gabelwalze iſt. Nimmt man die Länge der Gabel alſo willkührlich an, ſo iſt p beſtimmt, und wenn auch ϑ beſtimmt iſt, ſo hat man $h^2 = \frac{M\vartheta}{pT}$ für die reducirte Mündung der Steigröhre, woraus diejenige Mündung gefunden wird, die man ihr eigentlich geben muß. Weil nun übrigens die Geſchwindigkeit α des angegriffenen Punkts durch die Natur der an-

gebracht n Kraft beſtimmt wird, ſo iſt dadurch die Einrichtung der Maſchine beſtimmt. Weil nemlich die Geſchwindigkeit der Laſt $\beta = \frac{p}{\vartheta}$ iſt, ſo hat man $\beta = \frac{M}{h^2 T}$, und das Verhältniß $\beta : \alpha$ beſtimmt die Einrichtung des ſo genannten Zwiſchen-Geſchirres.

545 §.

12 Fig. Wenn das Paternoſterwerk gegen den Horizont ſchief liegt, ſo wie es die 12 Fig. vorſtellt; ſo wird gewöhnlich ſtatt der cylindriſchen eine vierſeitige priſmatiſche Steigröhre gebraucht. Die Kunſtkette wird alsdenn ſtatt der Püſchel oder Scheiben mit viereckten Brettern verſehen, die auch Paletten oder Schaufeln genannt werden, und die Maſchine heiſt von ihnen ein Schaufelwerk. Gewöhnlich haben die Schaufeln die Geſtalt eines Rechtecks, wovon die mit dem Horizont parallele Seite, die andere an Länge übertrift. Die ganze Fläche der Schaufel wird etwas kleiner gemacht, als die Querſchnitte der Steigröhre ſind, damit am Umfang der Schaufeln ein Spielraum übrig bleibe, und ihre Bewegung durch die Friction an der innern Fläche der Steigröhre nicht zu ſehr gehemmet werde. Wegen dieſes Spielraums kan nicht der ganze körperliche Raum zwiſchen jeden zwoen Schaufeln CD und EF voll Waſſer bleiben, wenn die Schaufeln von A nach B hinaufſteigen. Geſetzt, daß auch die Zelle CDFE in dem Augenblick, da ſie die unterſte Stelle einnimmt, ganz oder beynahe voll Waſſer wäre, ſo wird doch das Waſſer über den obern Rand C der Schau-

Schaufel wieder zurück laufen, indem die Schaufel CD aufwärts ſteigt. Wenn alſo CD in EF gerückt, und der obere Rand E ſchon etwas über den Waſſerpaß YZ des zu hebenden Waſſers erhaben iſt; ſo wird die Zelle FFGI nur noch bis an die Horizontalfläche EH mit Waſſer angefüllt ſeyn. Die in der Zelle enthaltene Waſſermenge füllt demnach alsdenn einen priſmatiſchen Körper aus, deſſen Grundfläche das Trapezium EFGH, und deſſen Höhe die horizontale Breite der Schaufeln iſt.

Die übrige Einrichtung der Kunſtkette iſt folgende. Auf der Mitte jeder Schaufel bey M werden zu beyden Seiten ſenkrechte Stäbe MK, MN, befeſtiget, welche die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi haben, und die äuſſerſten Enden K und N werden mit den nächſtfolgenden Stäben dieſer Art durch Gewinde verbunden, damit ſich dieſe Gelenke der Kunſtkette beym Umlauf der Walze zwiſchen ihren Armen, wie bey R und S, gehörig anlegen können. Man findet eine umſtändlichere Beſchreibung davon, nebſt beygefügten Zeichnungen, in Leupolds Theatro machinar. Hydraul. I. Theil V. Cap. 84 u. f. §§.

546 §.

Es ſind alle Zellen eben ſo, wie *EFGI*, mit Waſſer angefüllt, und eine bey *R* mit der ſchiefliegenden Ebene *AB* parallel angebrachte Kraft *V* ſtrebt die Schaufeln aufwärts zu ziehen: man fragt, wie groß *V* ſeyn müſſe, damit alles im Gleichgewicht bleibe.

Aufl. Das in der Zelle EFGI enthaltene Waſſer drückt ſenkrecht gegen EF und HG, und dieſe bei-

den Preſſungen ſind es allein, die hier in Betrachtung kommen, weil der Druck gegen den Boden, und gegen die verticalen Seitenwände der Steigröhre von dieſer Röhre völlig aufgehalten wird. Die
11 Fig. ſchiefe Ebene, oder die Steigröhre, ſey gegen den Horizont unter dem Winkel BAL $= \eta$ geneigt, ſo iſt FEH $= 90° - \eta$. Man ſetze ferner EP $= x$, und ziehe PQ vertical, ſo iſt PQ $= x \cos \eta$. Ueberdem ſey die horizontale Breite der Schaufeln $= b$, ihre Höhe EF $= a$, ſo iſt ihr Flächen-Inhalt $= ab$, und der Inhalt des Theils, dem die Höhe EP zugehört, $= bx$. Wächſt nun EP um das Element P$\pi = dx$, ſo wächſt die Fläche bx um das Element bdx, und der Waſſerdruck gegen dies Element iſt $= bdx . x \cos \eta$ $= bx\,dx \cos \eta$, folglich der Druck gegen den Theil der Schaufel, der ſich von E bis P erſtreckt, $=$ $\frac{1}{2} bxx \cos \eta$, und gegen die ganze Schaufel iſt derſelbe $= \frac{1}{2} aab \cos \eta$.

Gegen eben die Schaufel EF drückt auch das in der Zelle CDFE befindliche Waſſer, jedoch iſt nur der Theil FO dieſem Druck ausgeſetzt: und es erhellet, wie vorhin, daß dieſer Druck $= \frac{1}{2} FO^2 . b \cos \eta$ ſey. Die mittlere Richtung dieſes Drucks iſt mit der mittlern Richtung des vorigen parallel, und derſelben entgegen geſetzt. Demnach iſt der geſamte Druck $= \frac{1}{2} b \cos \eta (aa - FO^2)$. Es iſt aber FO $=$ GH $= a - $ FG $\tan g \eta$; wird alſo der Abſtand der Schaufeln von einander FG $= c$ geſetzt; ſo hat man $aa - FO^2 = 2ac . \tan g \eta - cc \tan g \eta^2$, und der Druck des Waſſers gegen die Schaufel nach der Richtung BA wird $= \frac{1}{2} bc \cos \eta \tan g \eta (2a - c \tan g \eta)$, oder $=$ $\frac{1}{2} bc \sin \eta (2a - c \tan g \eta)$. Wenn demnach die Anzahl aller Schaufeln, die dem Druck zugleich ausgeſetzt

geſetzt ſind, $=n$ iſt, ſo muß die geſuchte Kraft $V = \frac{1}{2} bnc \sin\eta (2a - c \tan\eta)$ ſeyn.

Wegen der Art, wie die Schaufeln vermittelſt der Kunſtgelenke verbunden werden, muß, wenn man alles genau nehmen will, von dieſem Druck noch ein kleiner Theil abgerechnet werden. Ein Theil der Fläche der Schaufeln bey M, ſo groß als die Querſchnitte der Kunſtkette, wird keinen Druck leiden. Es ſey die horizontale Breite dieſer kleinen Fläche $=e$, und in der 12 Fig. ſey Mm ihre Höhe: Man ſetze $EM=q$, $Em=p$; ſo wäre der Druck auf dieſe Fläche $= \frac{1}{2} e(p^2 - q^2) \cos\eta = \frac{1}{2} e(p+q)(p-q) \cos\eta$. Es iſt aber $e(p-q)$ der Quadrat-Jnhalt dieſer Fläche, und $p+q=a$. Wenn alſo $e(p-q)=hh$ geſetzt wird, ſo wäre dieſer Druck $= \frac{1}{2} ahh \cos\eta$. Nun wird es übrigens auf die Gröſſe des Winkels η ankommen, ob die Zellen ſo viel Waſſer faſſen, daß $FO > \frac{1}{2} a$ wird. Jn dieſem Fall würde von dem aufwärts gerichteten Druck gegen die Schaufel EF ebenfalls ein Theil abgehen. Es ſtehe, wie in der 13 Fig. das Waſſer bis an O, und es ſey $OM=z$, ſo wäre der Druck gegen die kleine Fläche bey $M = zhh \cos\eta$. Aus beyden zuſammen entſtünde nach unten der Druck $(\frac{1}{2} a - z) hh \cos\eta$. Weil nun dieſer Druck von dem vorhin berechneten abgehet, ſo wird eigentlich

$$V = \frac{1}{2} bnc \sin\eta (2a - c \tan\eta) - (\frac{1}{2} a - z) nhh \cos\eta.$$

Dieſe Kraft wird zum Gleichgewicht erfordert, und man wird leicht ermeſſen, daß der Widerſtand, welchen der Waſſerdruck gegen die Schaufeln verurſacht, alsdenn nicht völlig derſelbe ſeyn werde, wenn die Schaufeln mit einer gegebenen Geſchwindigkeit

von A nach B hinauf ſteigen. Dieſe Unterſuchung verſtattet aber, ſo viel ich bisher abnehmen kan, keine gröſſere Schärfe. Deswegen werde ich bey der folgenden Anwendung auf die Ausübung annehmen, daß der Widerſtand, welchen eine an der Kunſtkette nach der Richtung AB angebrachte Kraft überwinden muß, dem berechneten Druck gleich ſey, wenn gleich der Kunſtkranz in Bewegung iſt.

547 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche ein ſchiefliegendes Schaufelwerk binnen gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe bringen kan; wenn es feſtgeſetzt iſt, welche Art der Kräfte die Maſchine treiben ſoll.

Aufl. Die in jeder Zelle, wie EFGI, enthaltene Waſſermenge wird gefunden, wenn man das Trapezium EFGH mit der horizontalen Breite der Schaufeln multiplicirt. Weil nun $EFGH = \frac{1}{2} FG . (EF + GH) = \frac{1}{2} c (2a - c \tang\eta)$, ſo wird die Waſſermenge in jeder Zelle $= \frac{1}{2} bc (2a - c \tang\eta)$. Weil aber das Stück der Kunſtkette MV, deſſen Länge $= \frac{1}{2} a \cot\eta$ iſt, den Raum $\frac{1}{2} ahh \cot\eta$ wegnimmt, ſo iſt die Menge Waſſer in jeder Zelle $= \frac{1}{2} bc . (2a - c \tang\eta) - \frac{1}{2} ahh \cot\eta$. Stünde das Waſſer höher als M, wie in der 13 Fig., ſo wäre der Raum, den die Kunſtkette in jeder Zelle ausfüllt, $= (\frac{1}{2} a - z) hh \cot\eta = hhc$, und die Zelle enthielte eine Menge Waſſer $= \frac{1}{2} bc (2a - c \operatorname{tg}\eta) - (\frac{1}{2} a - z) hh \cot\eta$. Es ſey nun die Zeit, worin die unterſte Schaufel CD die ganze Länge der Steigröhre durchläuft, $= t$, und die Anzahl aller Schaufeln, die zugleich ſteigen, $= n$, ſo hebt die Maſchine binnen der Zeit t die Waſ-

ſermenge $\frac{1}{2}bnc(2a - c\,\mathrm{tang}\,\eta) - (\frac{1}{2}a - z)\,nhh\cot\eta$. In Fällen, wo $\frac{1}{2}a\cot\eta$ nicht $> c$ iſt, wird alsdenn $z = 0$. Man hat nemlich $\frac{1}{2}a\cot\eta : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a\cot\eta - c : z$, alſo wird $z = \frac{\frac{1}{2}a\cot\eta - c}{\cot\eta}$, folglich iſt $z = 0$, wenn $\frac{1}{2}a\cot\eta = c$ iſt, wie die Natur der Sache erfordert. Wenn $\frac{1}{2}a\cot\eta < c$ iſt, ſo wird z negativ, und dies iſt geometriſch richtig, weil nun $c = (\frac{1}{2}a + z)\cot\eta$ wird: allein in der Anwendung auf das Schaufelwerk kan der negative Werth von z nicht gebraucht werden, weil der Theil der Künſtkette, deſſen Länge $z\cot\eta$ iſt, nun keinen Raum im Waſſer wegnimmt. Die in der Zeit T gehobene Waſſermenge ſey $= \mathrm{M}$, ſo erhält man $\mathrm{M} = (\frac{1}{2}bnc(2a - c\,\mathrm{tang}\,\eta) - (\frac{1}{2}a - z)\,nhh\cot\eta) \times \frac{\mathrm{T}}{t}$.

Der Widerſtand, welchen alle Schaufeln zuſammen der Bewegung entgegen ſetzen, ſey $= \mathrm{K}$, der Schaufeln Geſchwindigkeit $= \beta$, die angebrachte Kraft $= \mathrm{F}$, ihre Geſchwindigkeit $= \alpha$; ſo iſt $\frac{\mathrm{F}\alpha}{\beta} = \mathrm{K} = \frac{1}{2}bnc\sin\eta\,(2a - c\,\mathrm{tang}\,\eta) - (\frac{1}{2}a - z)\,nhh\cos\eta$ (546 §.). Ferner ſey die Länge der Steigröhre $= \mathrm{L}$, alſo $\beta = \frac{\mathrm{L}}{t}$, ſo wird $\mathrm{F}\alpha = \frac{\frac{1}{2}bnc\mathrm{L}\sin\eta\,(2a - c\,tg\,\eta)}{t} - \frac{(\frac{1}{2}a - z)\,nhh\mathrm{L}\sin\eta\cot\eta}{t}$, wo $\sin\eta\cot\eta$ ſtatt $\cos\eta$ geſetzt iſt. Es war aber $\frac{\frac{1}{2}bnc(2a - c\,\mathrm{tang}\,\eta)}{t} - \frac{(\frac{1}{2}a - z)\,nhh\cot\eta}{t} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}}$,

alſo

alſo wird $F\alpha = \frac{M}{T} L \sin\eta$. Die ſenkrechte Höhe der obern Mündung B der Steigröhre über die untere A, ſey $= f$, ſo iſt $f = L \sin\eta$, und man erhält $F\alpha = \frac{Mf}{T}$, alſo $M = \frac{F\alpha T}{f}$, wie bey allen andern hydrauliſchen Maſchinen.

548 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung eines ſchiefliegenden Schaufelwerks anzugeben, wenn die Art der Kräfte beſtimmt iſt, welche die Maſchine treiben ſoll.

Aufl. Nachdem für die Zeit T die Waſſermenge $M = \frac{F\alpha T}{f}$ gefunden iſt, nehme man die Gleichung $M = (\frac{1}{2} bnc\,(2a - c \tan\eta)$
$- (\frac{1}{2} a - z) nhh \cot\eta) \times \frac{T}{t}$ zu Hülfe, da dann überdem $L \sin\eta = f$ iſt, ſo daß η durch L und umgekehrt beſtimmt wird, wenn man f als gegeben annimmt. Ueberdem kan man M als gegeben anſehen, oder doch als eine Gröſſe, die durch F, α und f beſtimmt iſt, wenn F gegeben wäre: und die Dicke der Schaufeln nebſt dem Querſchnitt hh der Kunſtkette muß nach Beſchaffenheit der Laſt, die ſie tragen ſollen, angenommen werden. Die Dicke der Schaufeln ſey $= k$, ſo muß $n(c+k) = L$ ſeyn, und man kan c und k leicht ſo annehmen, daß $n = \frac{L}{c+k}$ eine ganze Zahl wird, ſo daß auch n und c einander beſtimmen,

wenn

wenn L beſtimmt iſt. Ferner war $L = \beta t$, und man kan t oder β willkührlich nehmen. Eine ſehr langſame Bewegung der Schaufeln iſt deswegen nicht rathſam, weil ſie alsdenn durch den Spielraum viel Waſſer verlieren, und bey einer ſehr ſchnellen Bewegung würde die Kunſtkette zu viel leiden, auch würde bey einer ſehr beträchtlichen Geſchwindigkeit der Schaufeln der Widerſtand weit gröſſer ſeyn, als der Vorausſetzung des 546 §. gemäß iſt. Deswegen macht man gewöhnlich die Einrichtung ſo, daß β zwiſchen 2 und 3 Fuß fällt, da dann durch β zugleich das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ beſtimmt iſt. Hiernächſt ſind noch die beyden Gröſſen a und b übrig, und wenn man noch a willkührlich annimmt, ſo hat man auch $z = \frac{\frac{1}{2} a \cot\eta - c}{\cot\eta} = \frac{1}{2} a - c \tan\eta$ beſtimmt; die Gleichung für die Waſſermenge aber giebt alsdenn $b = \frac{M \times (t:T) + (\frac{1}{2} a - z)\, nhh \cot\eta}{\frac{1}{2} nc(2a - c \tan\eta}$.

Hiebey iſt noch zu bemerken, daß es nicht ganz willkührlich ſey, wie groß man a nehmen will, wenn c und η ſchon beſtimmt ſind. Denn die Rechnung ſetzt voraus, daß in jeder Zelle eine Menge Waſſer enthalten ſey, die einen priſmatiſchen Körper füllt, wovon das Trapezium EFGH die Grundfläche, und b die Höhe iſt. Man ſiehet aber wohl, daß die Seitenlinie GH des Trapezii von dem Winkel η abhänge, und vermöge der Gleichung $GH = a - c \operatorname{tg}\eta$ wird $GH = 0$, wenn $\tan\eta = \frac{a}{c}$ iſt, d. i. wenn die

Hori-

Horizontallinie EH durch G gehet. In dieſem Fall alſo verwandelt ſich das Trapezium in ein Dreyeck. Wollte man a, c und η ſo annehmen, daß tangη $> \frac{a}{c}$ würde, ſo würden die obigen Formuln die Waſſermenge nicht mehr richtig ausdrücken. Deswegen müſſen die drey Gröſſen a, c und η ſo angenommen werden, daß tangη nicht gröſſer als $\frac{a}{c}$ wird.

549 §.

Wenn man in der Gleichung für die Waſſermenge den Theil beyſeit ſetzt, um welchen ſie wegen des Raums, den die Kunſtkette füllt, vermindert werden muß, und alsdenn B ſtatt $\frac{nc}{t}$ ſchreibt; ſo hat man $M = \frac{1}{2} b\mathrm{BT}(2a - c\,\mathrm{tang}\eta)$. Drückt man dieſe Gleichung ſo aus:

$$M = \tfrac{1}{2} ab\mathrm{BT} + \tfrac{1}{2} b\mathrm{BT}(a - c\,\mathrm{tang}\eta),$$

ſo iſt der erſte Theil dieſer Formul unveränderlich, wenn ſich gleich η ändert, der zweyte Theil aber ändert ſich mit η, wenn alles übrige einerley bleibt. Ueberdem ergiebt dieſer Ausdruck, daß dieſe Waſſermenge nie kleiner ſey, als $\frac{1}{2} ab\mathrm{BT}$, weil tang$\eta$ nicht gröſſer als $\frac{a}{c}$ genommen werden muß: für $\eta = 0$, wäre $M = ab\mathrm{BT}$. Dies alles ergiebt ſich auch leicht aus Betrachtung der beygefügten Zeichnung.
11 Fig. Die Waſſermenge ändert ſich mit dem Trapezio EFGH in einerley Verhältniß, und es iſt EFGH = EFH + FGH. Das Dreyeck EFH bleibt unverändert,

dert, ſo lange $\text{tang}\,\eta < \frac{a}{c}$ bleibt, aber FGH nimmt ab, wenn η wächſt. Für die Zeit t iſt die Waſſermenge $= nb.(\text{EFH} + \text{FGH})$, und für die Zeit $\text{T} = \frac{nb\text{T}}{t}(\text{EFH} + \text{FGH})$. Weil nun $\text{EFH} = \frac{1}{2}at$, und $\text{FGH} = \frac{1}{2}\text{GH}.\text{FG} = \frac{1}{2}(a - c\,\text{tang}\,\eta)c$ iſt, ſo wird dieſe Waſſermenge

$$= \frac{\frac{1}{2}abnc}{t}\text{T} + \frac{\frac{1}{2}bnc}{t}(a - c\,\text{tang}\,\eta)\text{T} =$$

$\frac{1}{2}ab\text{BT} + \frac{1}{2}b\text{BT}(a - c\,\text{tang}\,\eta)$, wie vorhin. Macht man ſich nun die Vorſtellung, daß die Länge AB der Steigröhre, und die ganze übrige Anordnung des Schaufelwerks unverändert bleibe, der Winkel BAL aber abnehme, ſo nimmt die Waſſermenge zu, die in der Zeit t gehoben wird, wenn t allemahl diejenige Zeit bedeutet, binnen der die untere Schaufel die Länge der Steigröhre durchläuft: dagegen nimmt die Höhe ab, auf welche das Waſſer gehoben wird. Für $\eta = 0$ wäre die Waſſermenge $= ab\text{BT}$ für die Zeit T, aber der Effect der Maſchine $= 0$, weil f alsdenn $= 0$ wird. Wächſt η, ſo nimt zwar die Waſſermenge ab: dagegen aber wächſt $f = \text{L}\sin\eta$; und wenn $\text{tang}\,\eta = \frac{a}{c}$ wird, ſo iſt die Waſſermenge $= \frac{1}{2}ab\text{BT}$, und $f = \frac{\text{L}.a}{\sqrt{(aa+cc)}}$, alſo der Effect der Maſchine $= \frac{\frac{1}{2}aab\text{BLT}}{\sqrt{(aa+cc)}}$. Ueberhaupt aber iſt der Effect

$$Mf = \tfrac{1}{2} bBL \sin\eta (2a - c \tang\eta) T,$$

und dieſer Ausdruck wächſt anfangs mit η, nimmt aber hiernächſt wieder ab, und verſchwindet aufs neue, wenn $\tang\eta = \frac{2a}{c}$ iſt. Zwiſchen den Werthen $\tang\eta = 0$, und $\tang\eta = \frac{2a}{c}$ muß alſo ein Werth fallen, der, ſtatt $\tang\eta$ gebraucht, für Mf einen gröſten Werth giebt. Und wofern dieſer Werth von $\tang\eta$ nicht gröſſer als $\frac{a}{c}$ iſt, ſo wird es vortheilhaft ſeyn, den Winkel η demſelben gemäß anzunehmen. Fiele aber dieſer Werth gröſſer, als $\frac{a}{c}$ aus, ſo könte er nicht gebraucht werden.

Wenn die Dicke der Kunſtkette ſo geringe wäre, daß der Raum, welchen ſie im Waſſer einnimmt, als ganz unbeträchtlich angeſehen werden könnte, ſo wäre es verſtattet, in der Formul für die Waſſermenge (548 §.) $hh = 0$ zu ſetzen, und alsdenn würden dieſe Schlüſſe ohne alle Einſchränkung ihre Anwendung finden. Eine genauere Rechnung giebt

$$Mf = \tfrac{1}{2} bBL \sin\eta (2a - c \tang\eta) . T - \frac{T}{t}$$

$\times (\frac{1}{2} a - z) nhhL \cos\eta$. Der negative Theil dieſer Formul ändert ſich ebenfalls mit η: wollte man alſo ſuchen, wie groß η ſeyn muß, damit Mf am gröſten werde, ſo müſte man bey einer ganz genauen Rechnung dieſen negativen Theil nicht weglaſſen. Weil aber dieſer Theil in Vergleichung mit dem poſitiven allemahl nur klein iſt; ſo kan man ihn, um

die

die Rechnung abzukürzen, ohne ſehr zu fehlen, bey dieſer Unterſuchung beyſeit ſetzen.

550 §.

Es ſind alle Abmeſſungen des Schaufelwerks gegeben: man ſucht, unter welchem Winkel es gegen den Horizont geneigt werden müſſe, damit es bey einer gegebenen Geſchwindigkeit der Schaufeln den gröſten Effect leiſten könne.

Aufl. Weil der Effect

$$Mf = \tfrac{1}{2} bBL \sin\eta\,(2a - c\,\text{tang}\,\eta)\,T$$

angenommen werden kann (539 §.), ſo ſuche man den gröſten Werth des Factors $\sin\eta\,(2a - c\,\text{tang}\,\eta)$ in Rückſicht auf die Erinnerungen des vor. §. Das Differential dieſes Factors, nach dem 343 § Mech. $=0$ geſetzt, giebt $d\eta \cos\eta\,(2a - c\,\text{tang}\,\eta) - \dfrac{c\,d\eta \sin\eta}{\cos\eta^2}$ $= 0$, alſo $\cos\eta^3\,(2a - c\,\text{tang}\,\eta) - c\sin\eta = 0$, oder $2a\cos\eta^3 - c\cos\eta^2 \sin\eta - c\sin\eta = 0$. Setzt man $1 - \sin\eta^2$ ſtatt $\cos\eta^2$, ſo wird

$$2a\,(1 - \sin\eta^2)\,\surd(1 - \sin\eta^2) = c\sin\eta\,(2 - \sin\eta^2),$$

alſo ferner

$$4aa\,(1 - \sin\eta^2)^2\,(1 - \sin\eta^2) = cc\sin\eta^2\,(2 - \sin\eta^2)^2.$$

Man ordne alles nach den Potenzen von $\sin\eta$, und ſetze Kürze halber $\dfrac{cc}{aa} = m^2$, ſo erhält man

$$\sin\eta^6 - \frac{4m^2 + 12}{m^2 + 4}\sin\eta^4 + \frac{4m^2 + 12}{m^2 + 4}\sin\eta^2 - \frac{4}{m^2 + 4} = 0;$$

und wenn S ſtatt $\sin\eta^2$ geſetzt

wird,

wird, $S^3 - \frac{4m^2+12}{m^2+4} S^2 + \frac{4m^2+12}{m^2+4} S - \frac{4}{m^2+4}$ $= 0$. Nun muß man vorläufig wiſſen, daß jede Gleichung ſo viele Wurzeln habe, als der Exponent der höchſten Potenz der unbekannten Gröſſe eins enthält, worunter jedoch unmögliche ſeyn können. Hier würde es alſo überhaupt ſechs Werthe von ſin η geben, für welche das Moment Mf am gröſten würde. Doch könnten wohl einige davon unmöglich ſeyn, und unter den möglichen müſten vermöge der Natur der Aufgabe, nicht allein diejenigen ausgeſchloſſen ſeyn, die tang $\eta > \frac{a}{c}$ geben würden; ſondern auch die etwa darunter befindlichen negativen Werthe, weil η nicht negativ, auch nicht gröſſer, als 180° ſeyn kan. Die völlige Auflöſung der Aufgabe würde nun darauf ankommen, daß man die drey Wurzeln der cubiſchen Gleichung

$$S^3 - \frac{4m^2+12}{m^2+4} S^2 + \frac{4m^2+12}{m^2+4} S - \frac{4}{m^2+4} = 0$$

ſuchen müſte.

Um eine Probe zu geben, wie man ſich dabey zu verhalten hätte, will ich $m = 1$ annehmen, (in jedem beſondern Fall iſt $m = \frac{c}{a}$ gegeben.) Dies giebt

$$S^3 - 3{,}2 \, . \, S^2 + 3{,}2 \, . \, S - 0{,}8 = 0.$$

Um dieſe Gleichung noch mehr abzukürzen, ſetze man $S = x + \frac{3{,}2}{3}$, ſo wird

$$S^3 = x^3 + 3{,}2 \,.\, x^2 + 3 \,.\left(\frac{3{,}2}{3}\right)^2 .\, x + \left(\frac{3{,}2}{3}\right)^3$$

$$-3{,}2 \,.\, S^2 = -3{,}2 \,.\, x^2 - \frac{2 \,.\, 3{,}2^2}{3} .\, x - \frac{3{,}2^3}{9}$$

$$+3{,}2 \,.\, S = \quad + \quad 3{,}2 \,.\, x + \frac{3{,}2^2}{3}$$

$$-0{,}8 = \qquad\qquad -0{,}8$$

alſo $x^3 - 0{,}213333 \,.\, x + 0{,}186074 = 0.$

Wenn man nun $x = -0{,}6938607$ annimmt, und dieſen Werth in die letzte Gleichung ſtatt x ſetzt, ſo heben die drey Glieder vor dem Gleichheitszeichen einander beynahe auf, und dies iſt ein Beweis, daß der angenommene Werth von x beynahe mit einer Wurzel dieſer Gleichung übereinkomme. Die übrigen beyden Wurzeln dieſer Gleichung ſind unmöglich, welches ich hier ohne weitern Beweis annehme. Wer mit der allgemeinen Theorie von den höhern Gleichungen, die ich in den vorhergehenden Theilen dieſes Lehrbegrifs noch nicht vorgetragen habe, ſchon bekannt iſt, der weiß, daß eine cubiſche Gleichung, die unter der Form $x^3 = ax + b$ begriffen iſt, alsdenn zwey unmögliche Wurzeln habe, wenn $\sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3)}$ eine mögliche Gröſſe iſt. Hier hat man $a = 0{,}213333$; $b = -0{,}186074$, und die Gleichung ergiebt, daß $\frac{1}{4}bb > \frac{1}{27}a^3$ ſey. Nun war $S = x + \frac{3{,}2}{3}$; wird alſo der gefundene Werth von x gebraucht, ſo findet man $S = 0{,}372806$. Endlich war $\sin\eta = \pm\sqrt{S}$, und der negative Werth wird hier nicht gebraucht; alſo wird $\sin\eta = 0{,}610578$

und $\eta = 37^\circ\ 38'$. Der gefundene Werth von ſinη iſt ſehr wenig von dem Brnch $\frac{3}{5}$ unterſchieden. Deswegen kan man annehmen, für $m = 1$, oder $a = c$ müſſe ſin$\eta = \frac{3}{5}$ ſeyn, wenn der Effect am gröſten ſeyn ſoll. Dies giebt coſ$\eta = \sqrt{(1 - \frac{9}{25})} = \frac{4}{5}$, und tang$\eta = \frac{3}{4}$, alſo tang$\eta < \frac{a}{c}$. Weil dies der Natur des Schaufelwerks gemäß iſt, ſo hat man für den beſondern Fall $\frac{a}{c} = 1$ die geſuchte Auflöſung richtig gefunden, und das giebt folgende Regel. **Wenn die Entfernung der Schaufeln von einander ſo groß, als ihre Höhe iſt; ſo muß das Schaufelwerk unter einem Winkel von 37° 38′ gegen den Horizont geneigt ſeyn, wenn es den möglichſt gröſten Effect leiſten ſoll: oder welches einerley iſt, die Höhe f muß ohngefehr $\frac{3}{5}$ der Länge L enthalten.**

551 §.

Hr. Belidor trägt in ſeiner oft angeführten Archit. Hydraul. I. Theil II. Buch 4 Cap. 729 u. f. §§. die Theorie von den Schaufelwerken vor, und komt im 735 und 736 §. ebenfalls auf die Frage von der vortheilhafteſten Anordnung der Schaufelwerke. Er gründet die dortigen Unterſuchungen auf eine andre, die er ſchon vorher im 391 - 393 §. angeſtellet hatte, und wenn man dieſe Stellen mit den hieſigen Schlüſſen im vor. §. vergleichen will; ſo wird man finden, daß H. Belidor daſelbſt dieſelbe Aufgabe, und in eben der Einſchränkung $a = c$, aufzulöſen ſuche. Das Reſultat ſeiner Rechnung iſt

aber von dem hieſigen verſchieden, denn er findet $\eta = 24^\circ 21'$, und $f = \frac{2}{5}$L. Die Urſache dieſer Verſchiedenheit liegt in einem Verſehen, welches Hr. Belidor begeht, wenn er die Formul ſucht, deren Differential $= 0$ geſetzt werden muß, um das maximum zu finden. Im 549 §. iſt ſchon bemerkt worden, daß für die Zeit t die Waſſermenge $= nb$.EFH $+ nb$.FGH ſey. Das Dreyeck EFH bleibt unveränderlich, wenn ſich gleich η ändert, ſo lange tangη nicht gröſſer als $\frac{a}{c}$ wird: aber FGH nimmt ab, wenn η wächſt. Blos dieſen veränderlichen Theil der Waſſermenge multiplicirt Hr. Belidor mit $f =$ AB ſinη, und ſucht alsdenn, wie groß η ſeyn müſſe, damit das Product na.AB.FGH ſinη am gröſten werde. Allein dies iſt nicht der ganze Effect der Maſchine, und man ſiehet wohl, daß Hr. Belidor den übrigen Theil des Effects, der $= nb$.EFH.ABſinη iſt, als beſtändig betrachtet habe, weil der dazu gehörige Theil der Waſſermenge von η nicht abhängt. Hiebey hat er nicht bedacht, daß gleichwohl die Höhe $f =$ AB ſinη ſich mit η ändre. Wenn man L ſtat AB und $\frac{1}{2}c(a - c\,\text{tang}\eta)$ ſtatt FGH ſchreibt, ſo wird $\frac{1}{2}ncb$L ſinη $(a - c\,\text{tang}\eta) = nb$.AB.FGH ſin$\eta$, und für $a = c$, wird eben dieſer Ausdruck $=$ $\frac{1}{2}abnc$L ſinη $(1 - \text{tang}\eta)$. Der veränderliche Factor ſin$\eta(1 - \text{tang}\eta)$ iſt $= \text{ſin}\eta - \frac{\text{ſin}\eta^2}{\text{coſ}\eta}$, und wenn man das Differential dieſer Formul $= 0$ ſetzt, ſo kommt man auf Hrn. Belidors Gleichung a. a. O. 392 §. (Bey ihm iſt ſin$\eta = x$, und der Halbmeſſer $= a$, der hier $= 1$ angenommen wird.) Man

ſiehet hieraus, daß dieſe Stelle beym Belidor, und was er im 735 §. u. f. §§. darauf bauet, ſo verbeſſert werden müſſe, wie es den im vor. §. vorgetragenen Rechnungen gemäß iſt.

542 §.

Man findet beym Belidor a. a. O. eine Beſchreibung und Zeichnungen zweyer zu Straßburg verfertigten Schaufelwerke, davon das eine daſelbſt beym Stadtbau, das andre beym Fortifications-Bau gebraucht wird. Das erſte iſt ſo eingerichtet, daß die Entfernung der Schaufeln von einander ihrer Höhe gleich iſt, und die Abmeſſungen ſind folgende: $a = c = \frac{1}{2}$ Fuß $= 6$ Zoll, $b = 9\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{19}{24}$ Fuß, $L = 20$ Fuß, $n = 34$, alſo $nc = 17$, $L - nc = nk = 3$ Fuß, und die Dicke der Schaufeln $k = \frac{36}{34}$ Zoll $= 1\frac{1}{17}$ Zoll. Für die Zeit t giebt Hr. Belidor folgende Beſtimmung an. Die Walze Q hat 10 Arme, ſo daß ſich bey jedem Umlauf 10 Schaufeln anlegen, und die Schaufeln in der Steigröhre binnen der Umlaufszeit der Walze $7\frac{1}{17} \times 10$ Zoll zurücklegen. Ferner wird angenommen, daß die Walze, an deren Axe eine Kurbel befindlich iſt, die von Menſchen gedrehet wird, binnen einer Stunde 1500 mahl umlaufe. Demnach iſt es ſo viel, als wenn die Schaufeln binnen einer Stunde einen Weg von $7\frac{1}{17} \times 10 \times 1500$ Zoll, d. i. 8823,525 Fuß zurück legen: folglich wird $\beta = \frac{8823,525}{3600} =$ 2,451 Fuß $= \frac{L}{t}$, und weil $L = 20$ Fuß iſt, ſo wird $t = \frac{20000}{2451} = 8,16$ Sec. und dieſer Werth

ſtatt

ſtatt t gebraucht, giebt $\frac{nT}{t} = \frac{34 \times 3600}{8,16}$ $= 15000$. Dies letztere iſt zugleich eine Probe von der Richtigkeit der Rechnung. Weil nemlich n Schaufeln in der Zeit t gehoben werden, ſo iſt $\frac{nT}{t}$ die Anzahl der Schaufeln, welche in der Zeit T gehoben werden, und ſo viel Zellen voll Waſſer ſchüttet die Maſchine in der Zeit T, wie die Formul

$$M = (\tfrac{1}{2}bc(2a - c\,\mathrm{tang}\,\eta) - (\tfrac{1}{2}a - z)\,hh\,\mathrm{cot}\,\eta) \times \frac{nT}{t}$$

(548 §.) richtig ausweiſet.

Man nehme nun aus dem 550 §. $\mathrm{tang}\,\eta = \frac{3}{4}$ an, alſo $\mathrm{cot}\,\eta = \frac{4}{3}$, ſo wird $\frac{1}{2}a\,\mathrm{cot}\,\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ Fuß $=$ 4 Zoll, alſo iſt $\frac{1}{2}a\,\mathrm{cot}\,\eta < c$, und man muß in der Formul für die Waſſermenge $z = 0$ ſetzen (547 §.). Die Kettengelenke ſind 2 Zoll dick und eben ſo breit, alſo hat man $hh = \frac{1}{36}$ Quad. Fuß, und es wird die Waſſermenge für eine Stunde

$$M = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{4}{3}\right)$$

$$\times 15000 = \left(\frac{95}{768} - \frac{1}{108}\right) 15000 = 1716$$

Cub. Fuß. So viel Waſſer wird ſtündlich auf die Höhe von $\frac{3}{5}$ L $= 12$ Fuß gebracht.

Nach H. Belidor wäre der Effect am gröſten, wenn man $\mathrm{ſin}\,\eta = \frac{2}{5}$ ſetzte. Dies würde $\mathrm{coſ}\,\eta =$ $\sqrt{\left(1 - \frac{4}{25}\right)} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{4,582}{5}$, alſo $\mathrm{tang}\,\eta$

$= \frac{2}{4,582}$ geben, und $\cot\eta = \frac{4582}{2000}$, alſo $\frac{1}{2} a \cot\eta$ $= \frac{1}{4} . \frac{4582}{2000} = \frac{4582}{8000}$ Fuß. Weil dies mehr als $c = \frac{1}{2}$ Fuß beträgt, ſo wird $(\frac{1}{2} a - z) \cot\eta = c$ (547 §.), und man erhält M $=$

$$\left(\frac{1}{2} . \frac{19}{24} . \frac{1}{2} . \frac{3582}{4582} - \frac{1}{2} . \frac{1}{36}\right) \times 15000$$

$= (0,1408335 \times 15000 = 2112\frac{1}{2}$ Cub. Fuß. Die Höhe, worauf dieſe Waſſermenge gehoben würde, wäre $\frac{2}{5}$L $= 8$ Fuß, alſo der Effect der Maſchine $= 2112\frac{1}{2} \times 8 = 16900$. Bey der Vorausſetzung $\sin\eta = \frac{3}{5}$ wird aber dieſer Effect $= 1716 \times 12 = 20592$ beträchtlich gröſſer, als der vorige, wodurch alſo die Richtigkeit der Erinnerungen des 551 §. völlig beſtätiget wird.

Im 738 §. a. a. O. berechnet Hr. Belidor in der Vorausſetzung $\sin\eta = \frac{2}{5}$ die Waſſermenge zu 2647 Cub. Fuß für eine Stunde, allein dabey liegt ein Rechnungsfehler zum Grunde. Mit Beyſeitſetzung des Raums, den die Kunſtkette füllt, faſſet jede Zelle die Waſſermenge $\frac{1}{2} bc (2a - c \tan\eta)$, und wenn man *a*, *b*, *c*, in Zollen ausdrückt, ſo ſind dies

$$\frac{1}{2} . 9\frac{1}{2} . 6 \left(12 - \frac{6 . 2000}{4582}\right) = 267,361 \text{ Cub.}$$

Zoll. Statt deſſen giebt Hr. Belidor 329 Cub. Zoll an, welches unſtreitig zu viel iſt: ein Priſma, welches das ganze Viereck CDFE zur Grundfläche, und *b* zur Höhe hätte, würde nur 342 Cub. Zoll faſſen. Ein Stück der Kunſtkette, 6 Zoll lang, füllet einen Raum von 24 Cub. Zoll, und wenn

dieſe von der richtigen Zahl abgezogen werden, ſo bleiben 243,361 Cub. Zoll. Demnach iſt für eine Stunde die Waſſermenge $= 243,361 \times 15000 =$ 3650415 Cub. Zoll, und dieſe Zahl mit 1728 dividirt, giebt $2112\frac{1}{2}$ Cub. Fuß, wie vorhin.

553 §.

Um die Kraft F zu berechnen, welche das Schaufelwerk im Beharrungsſtande mit der angenommenen Geſchwindigkeit zu treiben erfordert würde, muß man noch wiſſen, daß die Kurbel 18 Zoll Bug habe; alſo iſt ihr Umfang $= \frac{36 \cdot 355}{113} = 113,1$ Zoll. Ihre Umlaufszeit war $= \frac{3600}{1500} = 2,4$ Sec., alſo wäre $\alpha = \frac{113,1}{2,4} = 47,125$ Zoll $=$ 3,927 Fuß, wenn die Kraft beſtändig nach der Richtung der Tangente des Kreiſes würkte, worin die Kurbel umläuft. Allein die Arbeiter greifen bey dieſem Schaufelwerk die Kurbel nicht unmittelbar an, (weil deren Bug von 18 Zoll zu groß iſt, als daß die Arbeiter ohne groſſe Beſchwerde drehen könnten.) Auf jeder Seite der Walze iſt eine Kurbel angebracht, und jede dieſer Kurbeln wird von 2 Perſonen, vermittelſt ſo genannter Krückſtangen, herum getrieben, indem die Leute dieſe Stangen nach horizontaler Richtung hin und her ſchieben. Demnach legt eigentlich die Kraft binnen der Umlaufszeit der Kurbel einen Weg zurück, der dem doppelten Durchmeſſer des Kreiſes gleich iſt, worin die

Kurbel umläuſt, und man muß $\alpha = \frac{6}{2,4} =$ $2\frac{1}{2}$ Fuß annehmen, alſo $\alpha T = 9000$. (Man vergleiche den 335 §.). In der Vorausſetzung $\sin\eta = \frac{3}{5}$ war $Mf = 20592$, alſo wird $F = \frac{Mf}{\alpha T} =$ 2,288 Cub. Fuß, und wenn Pariſer Maaß verſtanden, alſo ein Cub. Fuß 70 Pfund ſchwer gerechnet wird, ſo beträgt dies 160 Pfund, und dafern vier Menſchen die Kurbel drehen, ſo hat ein jeder 40 Pf. Kraft anzuwenden. Nach Hrn. Belidors Vorausſetzung $\sin\eta = \frac{2}{5}$ wird $Mf = 16900$, und $F = \frac{16900}{9000} = 1,878$ Cub. Fuß, welches $131\frac{1}{2}$ Pf. beträgt, und auf jeden Arbeiter 33 Pf. ausmacht. Hr. Belidor aber a. a. O. 737 §. findet nur 82 Pf., und für jeden Arbeiter $20\frac{1}{2}$ Pfund, weil er ſo rechnet, als wenn die Kraft an der Kurbel nach der Richtung der Tangente würkte. Bey dieſer Vorausſetzung wäre $\alpha = 3,927$ Fuß, und $\alpha T = 3,927 \times 3600 = 14137$ Fuß, alſo $F = \frac{16900}{14137} =$ 1,195 Cub. Fuß, welches $1,195 \times 70 = 83\frac{2}{3}$ Pf. oder faſt 84 Pf. beträgt. Dies kommt zwar mit dem Belidorſchen Reſultate beynahe überein, jedoch muß ich noch etwas dabey erinnern. Der hier berechnete Werth $F = 84$ Pf. giebt $\frac{F\alpha}{\beta} = \frac{84 \cdot 3927}{2451} = 134$ Pf. $= K$ (547 §.), und ſtatt

deſſen

deſſen findet Hr. Belidor a. a. O. 737 §. 147 Pf. Seine Rechnung gründet ſich auf die Sätze des 546 §, allein er läſt den Theil des Drucks aus der Acht, der deswegen abgezogen werden muß, weil die Schaufeln in der Mitte bey M, wo ſie mit der Kunſtkette verbunden ſind, keinen Druck leiden. Dieſer Theil iſt

$$= (\tfrac{1}{2}a - z)\, nhh \operatorname{coſ}\eta = (\tfrac{1}{2}a - z) \cot\eta\, nhh \sin\eta,$$

und hier iſt $(\frac{1}{2}a - z) \cot\eta = c$, alſo wird dieſer Theil des Drucks $= nchh \sin\eta = 34 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{5}$ $= \frac{34}{180}$ Cub. Fuß, oder $\frac{34 \cdot 70}{180} = 13$ Pf. Dieſe von den Belidorſchen 147 Pf. abgezogen, geben 134 Pfund, grade ſo, wie es hier gefunden iſt, und dies iſt eine neue Beſtätigung davon, daß hier die Waſſermenge richtig berechnet worden. Hr. Belidor findet nun aus ſeinen 147 Pf. die Kraft an der Kurbel ſo. Die Speichen oder Arme der Walze Q ſind 10 Zoll lang, und die Kurbel hat 18 Zoll Bug. Deswegen ſetzt Hr. Belidor $F = \frac{147 \cdot 10}{18} =$ 82 Pf. Allein die Kunſtkette krümmt ſich um die Walze nicht in einem Kreis, ſondern nimmt die Geſtalt eines regulären Polygons an; deswegen iſt das ſtatiſche Moment des Widerſtandes veränderlich. Wenn der Arm der Walze r, der Polygonwinkel φ heiſt, ſo fällt dies Moment zwiſchen den Grenzen $r.K$, und $K.r \operatorname{coſ}\frac{1}{2}\varphi$; und man überzeugt ſich leicht durch ähnliche Schlüſſe, wie oben im 335 §. bey der Kurbel, daß man nicht $F = \frac{K.r}{\varrho}$ ſetzen müſſe, wenn ϱ den Kurbelbug bedeutet, ſondern vielmehr

F =

$F = \frac{K\beta}{\alpha}$, und ſo hätte Herr Belioor $F = \frac{147 \cdot 2451}{3927} = 91\frac{3}{4}$ Pf. ſtatt 82 Pfund gefunden. Dieſe Kraft aber müßte am Umfange der Kurbel nach der Richtung der Tangente angebracht ſeyn. Um die Kraft an der Krückſtange zu haben, müßte ſie noch in dem Verhältniß des Durchmeſſers zum halben Umfang vergröſſert werden.

554 §.

Der allgemeine Ausdruck für den Effect des Schaufelwerks $Mf = \frac{1}{2} bBL \sin\eta\,(2a - c \tan g\eta)\,T$ (349 §, dasjenige, was von der Dicke der Kunſtkette abhängt, beyſeite geſetzt), läßt ſich auch ſo verändern: $Mf = \frac{1}{2} abBL \sin\eta\,(2 - m \tan g\eta)\,T$, wo m ſtatt $c:a$ geſetzt iſt; und alsdenn hängt der veränderliche Factor $\sin\eta\,(2 - m \tan g\eta)$ auch von m ab, wenn man annimmt, daß a einerley bleibe. Weil es bisher willkührlich geblieben iſt, wie groß man m nehmen will, und die obige Vorausſetzung $m = 1$ auch geändert werden kann, ſo würde nun noch die Frage übrig ſeyn, wie groß m angenommen werden müſſe, damit der Effect am gröſten werde. Wenn man η als unveränderlich und m allein als veränderlich betrachtet, ſo iſt durch η die Höhe $f = L \sin\eta$, auf welche das Waſſer gehoben wird, ſchon beſtimt, und es kan ſich nichts weiter, als die Waſſermenge ändern, wenn man c ändert. Es war aber für die Zeit t die Waſſermenge $= \frac{1}{2} bnc(2a - c \tan g\eta)$, und n bedeutet die Anzahl der Schaufeln, die ſich ebenfalls ändern muß, wenn man c ändert, vorausgeſetzt,

ſetzt, daß die Länge L der Steigröhre, nebſt der Dicke der Schaufeln einerley bleibe. Es war nemlich $n = \frac{L}{c+k}$, wo k die Dicke der Schaufeln iſt; (548 §.); alſo wird die erwehnte Waſſermenge

$$= \tfrac{1}{2}\, ab\, L \frac{c}{c+k}\left(2 - \frac{c}{a}\, \text{tang}\, \eta\right);$$

und wenn man η und k als unveränderlich betrachtet, ſo wird der Factor $\frac{c}{c+k}\left(2 - \frac{c}{a}\,\text{tang}\,\eta\right)$ zweymahl $=0$, nemlich wenn $c=0$, und wenn $c = \frac{2a}{\text{tang}\,\eta}$ iſt. Demnach wird es auch einen Werth geben, der ſtatt c geſetzt für die Waſſermenge den gröſten Werth giebt, wenn man η nebſt den übrigen Gröſſen als unveränderlich betrachtet. Der Werth $c = \frac{2a}{\text{tang}\,\eta}$ dürfte zwar nicht gebraucht werden, weil $\text{tang}\,\eta < \frac{a}{c}$, alſo $c < \frac{a}{\text{tang}\,\eta}$ ſeyn muß. Fiele indeſſen der Werth von c, welcher für M den gröſten Werth giebt, nur nicht gröſſer als $\frac{a}{\text{tang}\,\eta}$ aus, ſo würde es vortheilhaft ſeyn, wegen der gröſſern Waſſermenge dieſen Werth zu gebrauchen.

555 §.

Die Länge der Steigröhre iſt nebſt ihren übrigen Abmeſſungen und dem Neigungswinkel

winkel η gegen den Horizont gegeben: man ſucht, wie groß die Zwiſchenweite der Schaufeln angenommen werden müſſe, damit die möglichſt gröſte Waſſermenge gehoben werde.

Aufl. Man ſetze $\frac{c}{a} = m$, und $\frac{k}{a} = n$, ſo iſt für die Zeit t die Waſſermenge

$$= \tfrac{1}{2} ab\, L. \frac{m}{m+n}(2 - m \tan\eta).$$

Weil ſich nun m mit c ändert, n aber unveränderlich bleibt, ſo ſetze man das Differential des Factors $\frac{2m - m^2 \tan\eta}{m+n} = 0$, ſo giebt die Differential-Rechnung $\frac{2 - 2m \tan\eta}{m+n} - \frac{2m - m^2 \tan\eta}{(m+n)^2} = 0$. Daraus folgt

$$(m+n)(2 - 2m \tan\eta) - (2m - m^2 \tan\eta) = 0,$$

alſo $(m^2 + 2mn)\tan\eta = 2n$, und $m^2 + 2n.m = 2n \cot\eta$, woraus man $m = \pm\sqrt{(n^2 + 2n\cot\eta)} - n$ erhält. Die negative Wurzel kan aber der Natur der Sache nach nicht gebraucht werden. Stellt man nun die Werthe $m = \frac{c}{a}$, und $n = \frac{k}{a}$ wieder her, ſo wird $c = \sqrt{(k^2 + 2ak\cot\eta)} - k$.

Weil k in Vergleichung mit a nur klein ſeyn wird, ſo ergiebt dieſe Gleichung, daß auch c in Vergleichung mit a nur klein ſeyn müſſe, wenn die Waſſermenge am gröſten ſeyn ſoll, es müſte denn η ſehr klein ſeyn, damit $\cot\eta$ ſehr groß ausfalle. Wäre z. E.

$\eta =$

$\eta = 45^\circ$, alſo $\cot\eta = 1$, und man nähme $k = 1$ Zoll, $a = 6$ Zoll an, ſo müſte $c = \sqrt{13} - 1 = 2,6$ Zoll ſeyn.

556 §.

Oben im 550 §. ward folgende Gleichung gefunden: $2a\cos\eta^3 - c\cos\eta^2\sin\eta - c\sin\eta = 0$, die ſich ſo ausdrücken läſt, $2\cos\eta^2 = m(1+\cos\eta^2)\tan\!g\,\eta$, und dieſe beſtimmt, wie groß η ſeyn muß, damit der Effect am gröſten werde, wenn $m = \frac{c}{a}$ gegeben iſt. Die im vor. §. gefundene Gleichung beſtimmt, wie groß in eben der Abſicht $m = \frac{c}{a}$ ſeyn muß, wenn η gegeben iſt. Beyde Gleichungen zuſammen beſtimmen alſo, wie groß η und m ſeyn müſſen, damit der Effect am gröſten werde, und man findet nun dieſe beyden Werthe von η und m, wenn man zuförderſt η aus beyden Gleichungen wegſchaft. Es war nemlich im 555 §. $\tan\!g\,\eta = \frac{2n}{m(m+2n)}$, alſo wird

$\sec\eta^2 = 1 + \tan\!g\,\eta^2 = \frac{m^2(m+2n)^2 + 4n^2}{m^2(m+2n)^2}$, und

$\cos\eta^2 = \frac{1}{\sec\eta^2} = \frac{m^2(m+2n)^2}{m^2(m+2n)^2+4n^2}$; folglich

$1 + \cos\eta^2 = \frac{2m^2(m+2n)^2+4n^2}{m^2(m+2n)^2+4n^2}$. Weil nun

$m\tan\!g\,\eta = \frac{2n}{m+2n}$ war, ſo erhält man

$$m(1+\cos\eta^2).\text{tang}\,\eta = \frac{2m^2(m+2n)^2+4n^2}{m^2(m+2n)^2+4n^2}$$

$\times \dfrac{2n}{m+2n}$. Ueberdem war $2\cos\eta^2 = \dfrac{2m^2(m+2n)^2}{m^2(m+2n)^2+4n^2}$, und beyde Werthe gleich geſetzt, geben

$$(2m^2(m+2n)^2+4n^2) \times \frac{n}{m+2n} = m^2(m+2n)^2$$

oder $2m^2n(m+2n)^2+4n^3 = m^2(m+2n)^3$.
Man ordne dieſe Gleichung nach den Potenzen von m, ſo wird

$$m^5 + 6n.m^4 + 12n.m^3 + 8n^3.m^2 - 4n^3 = 0.$$
$$\quad -2n. \quad -8n. \quad -8n^3.$$

oder $m^5 + 4n.m^4 + 4n^2.m^3 - 4n^3 = 0$.

Wenn nun a und k, alſo auch $n = \dfrac{k}{a}$ gegeben ſind, ſo muß man aus dieſer Gleichung m ſuchen. Um eine Probe davon zu geben, ſey $\dfrac{k}{a} = n = \frac{1}{6}$, ſo wird

$$m^5 + \tfrac{2}{3}m^4 + \tfrac{1}{9}m^3 - \tfrac{1}{54} = 0.$$

Man ſetze $m = \dfrac{1}{x}$, ſo wird

$$\frac{1}{x^5} + \tfrac{2}{3}.\frac{1}{x^4} + \tfrac{1}{9}.\frac{1}{x^3} - \tfrac{1}{54} = 0, \text{ oder}$$

$\frac{1}{54}x^5 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$, oder auch
$x^5 - 6x^2 - 36x - 54 = 0$.

Eine Wurzel dieſer Gleichung iſt beynahe = 2,913, wovon man ſich überzeugen kan, wenn man $x = 2{,}913$ ſetzt, und die Rechnungen, welche die Gleichung verlangt, vornimmt: alsdenn heben die Glieder der Gleichung einander beynahe auf. Nach Vorſchrift des 496 §. könnte man, wenn es nöthig wäre, dieſe Wurzel noch genauer finden. Hier iſt keine ſo groſſe Schärfe nöthig, und man kan zufrieden ſeyn, wenn man weiß, daß m beynahe $= \frac{1}{2{,}913}$, alſo nur etwas weniges gröſſer, als $\frac{1}{3}$ ſeyn müſte, damit der Effect des Schaufelwerks am gröſten werde. Demnach müſte ohngefehr $\text{tang}\,\eta = \frac{3}{2}$, und $\eta = 56°\,18'$ angenommen werden, um den gröſten Effect zu erhalten.

557 §.

Für die Zeit T iſt die Waſſermenge

$$M = \tfrac{1}{2}\, ab\beta T \frac{c}{c+k}\left(2 - \frac{c}{a}\,\text{tang}\,\eta\right),$$ weil

$\frac{L}{t} = \beta$ war, und der Effect $Mf =$

$$\tfrac{1}{2}\, ab\beta LT . \frac{c\,\text{ſin}\,\eta}{c+k}\left(2 - \frac{c}{a}\,\text{tang}\,\eta\right).$$

Nimmt man nun $a = 6$ Zoll, und $k = 1$ Zoll, alſo $\frac{k}{a} = \frac{1}{6}$; ſo muß dem vorigen §. gemäß $\text{tang}\,\eta = \frac{3}{2}$, alſo $\text{ſin}\,\eta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, und $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ angenommen werden. Dies giebt $\frac{c}{c+k}$

$$\frac{c}{c+k} = \frac{m}{m+n} = \tfrac{1}{3} : (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}) = \tfrac{2}{3}, \quad \text{und}$$

$$\frac{c \sin\eta}{c+k}\left(2 - \frac{c}{a}\,\text{tang}\,\eta\right) = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot (2 - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{2})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \tfrac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \tfrac{30}{36} = \tfrac{5}{6}.$$ Setzt man aber die Bedingungen des 550 §. zum Grunde, und nimmt $a = c = 6$ Zoll, $k = 1$ Zoll, und $\text{tang}\,\eta = \frac{3}{4}$, $\sin\eta = \frac{3}{5}$; ſo hat man $\frac{c}{c+k} = \frac{6}{7}$, und es wird

$$\frac{c \sin\eta}{c+k}\left(2 - \frac{c}{a}\,\text{tang}\,\eta\right) = \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{14}.$$

Der vorige Werth dieſes Factors war $\frac{5}{6} = \frac{11\frac{2}{3}}{14}$, alſo beſtätiget die Rechnung, daß der Effect bey jenen Vorausſetzungen gröſſer ſey, als wenn man die Bedingungen des 550 §. zum Grunde legt. Es wäre demnach ohne Zweifel am vortheilhafteſten, wenn man die Regeln des 556 §. bey Verfertigung eines Schaufelwerks befolgte, wenn es nicht für die Ausübung unbequem wäre, der Kunſtkette ſo viele Schaufeln zu geben, als die Vorausſetzung $m = \frac{1}{3}$ erfordern würde, oder auch ſonſt eine andre, die den Gleichungen des 556 §. gemäß wäre. Deswegen ſcheint Belidors Regel a. a. O. 735 §. allerdings für die Ausübung die beſte zu ſeyn, man ſolle die Zwiſchenweite der Schaufeln ihrer Höhe gleich machen, alſo $a = c$ annehmen, damit die Kettengelenke ſich deſto beſſer und regelmäſſiger an den Umfang der Kunſtwelle anlegen. Man verliert

auf ſolche Art ohngefehr $\frac{1}{5}$ des Effects, vorausgeſetzt, daß man dem 550 §. gemäß $\sin\eta = \frac{3}{5}$ annimmt: wogegen aber der Gang der Maſchine deſto regelmäſſiger erhalten, und viel Friction vermieden wird, die deſto gröſſer ſeyn muß, je gröſſer die Anzahl der Schaufeln iſt. Auch wird die Kunſtkette wohlfeiler, weil man nur ohngefehr um den dritten Theil ſo viel Schaufeln nöthig hat.

558 §.

Nunmehro läſt ſich die Anwendung der allgemeinen Regeln des 548 §, nach welchen eine vortheilhafte Anordnung eines Schaufelwerks gefunden werden kan, vollſtändig in einem Exempel zeigen, wenn die Vorſchriften des 557 §. damit verbunden werden. Ich will annehmen, das Waſſer ſoll 8 Fuß hoch gebracht werden, ſo iſt $f = 8$ Fuß, und weil $\sin\eta = \frac{3}{5}$ ſeyn muß, ſo wird $L = \frac{f}{\sin\eta} = \frac{40}{3} =$ $13\frac{1}{3}$ Fuß, und es muß überdem $a = c$ angenommen werden. Um nun zuförderſt die Waſſermenge zu finden, will ich annehmen, die Maſchine ſoll von 4 Perſonen vermittelſt einer Kurbel an der Axe der mit den Fangarmen verſehenen Welle bewegt werden: ich will überdem die Vorausſetzung beybehalten, daß jeder Arbeiter mit einer Kraft von ohngefehr 33 Pf. bey einer Geſchwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Fuß in die Kurbel würken könne. Dieſe Vorausſetzung giebt für einen Arbeiter $F = \frac{33}{70}$ Cub. Fuß, alſo für 4 Arbeiter $F = \frac{66}{35}$ Cub. Fuß, wenn Pariſer Maaß verſtanden wird, und $\alpha = 2\frac{1}{2}$ Fuß; alſo

$$M = \frac{F\alpha T}{f} = \frac{\frac{66}{35}.2\frac{1}{2}.3600}{8} = 2121\tfrac{3}{7}\ \text{C.F.}$$

Man nehme ferner $a = c = 6$ Zoll an, ſo wäre $c + k = 7$ Zoll, wenn man $k = 1$ Zoll nimmt. Da nun $L = 160$ Zoll iſt, ſo wird $n = \frac{160}{7} = 22\frac{6}{7}$, beynahe $= 23$. Damit n genau $= 23$ werde, muß $k = \frac{L - nc}{n} = \frac{160 - 23.6}{23} = \frac{22}{23}$ Zoll ohngefehr $11\frac{1}{2}$ Linien angenommen werden. Will man nun die Einrichtung mit 10 Speichen für die Welle behalten, ſo muß man, um die Länge der Speichen zu finden, erwegen, daß jedes Kettengelenke $6\frac{22}{23}$ Zoll lang ſey, und daß dies die Seite eines regulairen Polygons abgebe, wozu man nach dem 442 §. Geom. den Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes ſuchen muß. Hier wäre nun das Polygon ein Zehneck, der Polygonwinkel $\varphi = 144°$, $\frac{1}{2}\varphi = 72°$, die Polygonſeite $a = \frac{160}{23}$ Zoll, $\frac{1}{2}a = \frac{80}{23}$ Zoll, und man findet

$$\begin{array}{rl} l\,80 = & 1{,}9030900 \\ l\,23 = & 1{,}3617278 \\ \hline l\,\tfrac{1}{2}a + l\,\text{ſin.tot.} = & 10{,}5413622 \\ -\,l\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\varphi = & 9{,}4899824 \\ \hline & 1{,}0513798 \end{array}$$

Die zugehörige Zahl iſt 11,255 Zoll, und dies wäre die geſuchte Länge der Speichen. Wegen der Dicke der Kunſtkette muß aber noch 1 bis $1\frac{1}{4}$ Zoll abgehen, ſo daß etwa 10 Zoll übrig bleiben. Bey jedem

dem Umlauf der Kurbel wickelt ſich nun ein Stück der Kunſtkette auf, das $6\frac{22}{23} \times 10 = 69\frac{13}{23}$ Zoll, oder 5,7971 Fuß lang iſt, und dies iſt der Umfang des Polygons der Speichwalze. Setzt man denſelben $= p$, und den Umfang des Kreiſes, den die Kurbel beſchreibt, $= P$, ſo hat man $\beta : \alpha = p : P$. Man nehme $\beta = 2\frac{1}{2}$ Fuß an, ſo wird $\beta = \alpha$, alſo $P = p = 5{,}7971$, und der Durchmeſſer dieſes Kreiſes wird $= 1{,}845$ Fuß, oder beynahe $= 22$ Zoll, ſo daß der Bug der Kurbel 11 Zoll ſeyn müſte. Die Abmeſſungen der Speichwalze würde alſo ohngefehr mit denjenigen einerley bleiben, die man bey dem Straßburgiſchen Schaufelwerk (553 §.) angenommen hat. Statt der Kurbel von 18 Zoll Bug aber, die nicht wohl ohne Handkrücken umgetrieben werden kan, würde eine viel kleinere Kurbel von 11 Zoll Bug, welche die Leute unmittelbar angreifen könnten, eben das ausrichten.

Es iſt noch übrig b zu ſuchen. In ſolcher Abſicht ſucht man nach dem 548 §. zuförderſt $z = \frac{1}{2}a - c\,\mathrm{tang}\,\eta$, welches hier $(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4})$ Fuß, alſo für z einen negativen Werth geben würde. Deswegen muß man $z = 0$, und

$$b = \frac{M \times (t:T) + \frac{1}{2}anhh\cot\eta}{\frac{1}{2}nc(2a - c\,\mathrm{tang}\,\eta)}$$

annehmen. Nun war $L = 13\frac{1}{3}$ Fuß; $\beta = 2\frac{1}{2}$ Fuß, alſo wird $t = \frac{13\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}} = \frac{80}{15} = 5\frac{1}{3}$ Secunden, und

$\frac{M.t}{T} = 3{,}13$. Es ſey $hh = 4$ Quad. Zoll $= \frac{1}{36}$ Quad. Fuß, ſo wird

 $\frac{1}{2}anhh$

$\frac{1}{2} anhh \cot\eta = \frac{1}{4} \cdot 23 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{4}{3} = \frac{23}{108} = 0{,}213,$

alſo $\frac{M.t}{T} + \frac{1}{2} anhh \cot\eta = 3{,}343$. Ueberdem erhält man $\frac{1}{2} nc(2a - c \tan\eta) = \frac{1}{4} \cdot 23 \cdot \frac{5}{8} = 3{,}6$, und jene Zahl durch dieſe dividirt, giebt $b = 0{,}93$ Fuß $= 11\frac{1}{6}$ Zoll.

Dieſe Einrichtung dürfte, wie mich dünkt, vor derjenigen, die Hr. Belidor ſeiner Theorie gemäß für die Höhe von 8 Fuß angiebt, verſchiedene Vortheile voraus haben. Die Steigröhre iſt kürzer und ihre Länge beträgt nur $\frac{2}{3}$ der Belidorſchen, alſo kan auch die Kunſtkette ſo viel kürzer ſeyn, und die ganze Kunſtkette hat 22 Schaufeln weniger, als die Belidorſche. Weil die Schaufeln bey beyden Anordnungen nach der Richtung der Steigröhre ohngefehe gleich ſchnell ſteigen, die Röhre hier aber um den dritten Theil kürzer iſt, ſo langen ſie ſo viel ehe bey der obern Mündung an, und es wird unterweges durch den Spielraum nicht ſo viel Waſſer verſchüttet.

559 §.

Man wird die bisherigen Lehren nun auch leicht auf ſolche Fälle anwenden, wenn man ſich anderer als Menſchen Kräfte bedienen wollte, die Maſchine zu treiben. Beym Belidor a. a. O. 729 §. findet man eine kurze Beſchreibung nebſt beygefügter Zeichnung von einem Schaufelwerk, das durch ein paar Pferde getrieben wird. Der horizontalliegende Wellbaum, deſſen Durchſchnitt in der 12 Fig. Q war, wird nun 10 bis 12 Fuß lang gemacht, an dem andern Ende ebenfalls gehörig unterſtützt, und daſelbſt mit einem Trilling verſehen, worin ein horizontal-

liegendes Kammrad greift, deſſen Welle vertical ſtehet. An eben dieſer verticalen Welle werden die Zugbäume für die Pferde befeſtiget, die, wie gewöhnlich umlaufen, vermittelſt der Zugbalken die verticale Welle mit dem Kammrade drehen, welches in den horizontalliegenden Trilling greift, und auf ſolche Art die horizontal liegende Welle mit der Speichwalze umtreibt. Weil die Schaufeln hier nach Proportion der angebrachten Kraft eine viel gröſſere Menge Waſſer faſſen müſſen, ſo müſſen Steigröhre, Schaufeln und Kunſtgelenke viel gröſſer und ſtärker gemacht werden, als bey den vorhin angegebenen Schaufelwerken, die durch Menſchen getrieben wurden. Deswegen braucht man ſtatt der einfachen Kunſtgelenke, womit die Schaufeln bey der vorigen Anordnung in der Mitte verbunden waren, hier doppelte Kunſtgelenke, wie es die 14 Figur vorſtellt, damit die Schaufeln beym hinauf ſteigen deſto ſicherer in der rechten Lage erhalten werden.

Der

Der XL. Abſchnitt.

Allgemeine Eintheilung der üblichſten Maſchinen in ihre verſchiedene Claſſen.

560 §.

Wenn man diejenigen Maſchinen eigentlich hydrauliſche nennen will, welche dazu dienen ſollen, das Waſſer auf eine verlangte Höhe, oder doch wenigſtens von einem Ort zum andern mit Vortheil zu bringen, ſo wird die Benennung von dem Effect hergenommen, den die Maſchine leiſten ſoll, und eine hydrauliſche Maſchine iſt alsdenn mit einer Waſſerkunſt (312 §.) einerley. Will man aber hydrauliſche Maſchinen ſolche nennen, die durch Waſſerräder getrieben werden; ſo nimmt man die Benennung von der Kraft her, welche die Maſchine treibt. Mich dünkt, es ſey am natürlichſten, wenn man die gebräuchlichſten Maſchinen in Claſſen abtheilen will, daß man den Grund der Eintheilung von dem Effect hernehme, den die Maſchinen leiſten ſollen: denn daraus entſpringt eigentlich die Verſchiedenheit ihrer innern Structur, und es iſt nur ein äuſſerer Umſtand, wenn man ſich grade dieſer und nicht einer andern Kraft bedient, die Maſchine zu treiben. Nehme ich dieſen Grund der Eintheilung an, ſo machen die Waſſerkünſte eine eigene Haupt-Claſſe der Maſchinen aus, die wohl am füglichſten hydrauliſche Maſchinen heiſſen können, und

es iſt übrigens gleichgültig, ob die Maſchine durch Menſchen, Thiere, Waſſer, Wind, oder noch andere Arten der Kräfte getrieben wird. Alsdenn könnte man zur zweyten Haupt-Claſſe alle diejenigen rechnen, welche einen Zug der Luft von einem Ort zum andern verurſachen ſollen. Ich würde ſie wegen der Aehnlichkeit ihres Effects mit dem Effect der erſten Claſſe pneumatiſche, oder Luftwechſelmaſchinen nennen. Die nun bald vorzutragende Pneumatik, oder Aeromechanik, wird davon mehr Unterricht geben. Ferner könnten alle Arten von Mühlen die dritte Haupt-Claſſe ausmachen. Es heiſſen nemlich faſt alle ſolche Maſchinen überhaupt Mühlen, die vermittelſt einer geſchickten Verbindung von Rad und Getriebe mit andern mechaniſchen Werkzeugen ſo angeordnet ſind, daß dadurch allerhand Sachen, die zu einem gewiſſen beſondern Gebrauch beſtimmt ſind, in kürzerer Zeit, und in gröſſerer Menge zubereitet werden können, als wenn es durch Menſchen-Hände allein ausgerichtet werden ſollte. Endlich könnte man zur vierten Haupt-Claſſe alle Heb- und Zug-Maſchinen rechnen, die dazu beſtimmt ſind, Laſten zu heben, oder doch von einem Ort zum andern mit Vortheil zu bewegen. Ich weiß bisher für dieſe Claſſe keinen eigenen Nahmen, der völlig anpaſſend und dabey doch allgemein genug wäre; wie ich denn überhaupt auch die von mir vorgetragene Eintheilung nicht für ganz vollſtändig ausgeben will. Der Redegebrauch iſt hier ſehr unbeſtimmt, und die Effecte ſind ſo mannigfaltig, die man durch allerley Arten von Maſchinen zuwege bringen will, daß es ſchwerlich möglich ſeyn dürfte, eine ſo genaue Eintheilung zu machen,

wodurch eine jede Claſſe von den übrigen zulänglich unterſchieden würde. Es iſt auch eben nicht nothwendig, daß man bey dieſer Eintheilung der Maſchinen ſo ängſtlich verfahre. Genug, wenn die Abtheilung nur ſo beſchaffen iſt, daß man im allgemeinen überſehen kan, wie mannigfaltig die Abſichten ſind, welche man durch die üblichſten Maſchinen zu erreichen ſucht. Indeſſen muß ich doch noch folgendes hiebey erinnern. Alle Maſchinen, die zu den erwehnten vier Haupt-Claſſen gehören, kommen darin überein, daß man mit möglichſter Erſparung der Zeit und Koſten etwas ausrichten will, was ſonſt weit mehr Zeit und Aufwand erfordern würde, ja vielleicht ohne Verſtärkung der gebrauchten Kräfte vermittelſt mechaniſcher Verrichtungen gar nicht durch Menſchen Kräfte ausgerichtet werden könnte. Es giebt andere Arten von Maſchinen, die durch ihre Bewegung nur dienen ſollen, die während der Bewegung verflieſſende Zeit, oder auch wohl den Weg zu meſſen, den entweder die ganze Maſchine, oder auch nur ein Theil von ihr, während der Bewegung zurück gelegt hat. Ein jeder weiß, daß ſolche Maſchinen, welche die Zeit anzuzeigen dienen, **Uhrwerke** heiſſen, und es iſt genug, daß ich ihrer hier blos erwehnt habe: unten werde ich umſtändlicher von ihnen handeln, wenn ich auf die Wiſſenſchaften komme, wo eine genaue Abmeſſung der Zeit unumgänglich nöthig iſt.

561 §.

Herr **Eberhard** rechnet in ſeinen **Beyträgen zur Matheſi Applicata** 12 S. zu den zuſammengeſetzten Maſchinen hauptſächlich zwey Arten, 1.) Müh-

Mühlen- und 2.) Bergwerks-Maſchinen. Ich will dieſe Eintheilung keinesweges tadeln, weil Hr. Eberhard ſo wenig, als ich, eine vollſtändige Abtheilung hat machen wollen. Ich will nur den Grund anzeigen, weswegen ich nicht eben die Eintheilung beybehalten habe: und dies um ſo mehr deswegen, weil es ſonſt das Anſehen haben mögte, als wenn ich ſo wichtige Maſchinen, wie die Bergwerks-Maſchinen ſind, vergeſſen hätte. Mir ſchien es am beſten zu ſeyn, den Grund der Eintheilung aus der Verſchiedenheit des Effects herzunehmen, den die Maſchinen leiſten ſollen, und alsdenn war es nicht nöthig, eine ganze Claſſe für ein beſondres Gewerbe zu machen, und ihr davon den Namen zu geben. Sonſt müſte man auch Oeconomiſche, Architectoniſche Maſchinen, u. ſ. f. als beſondere Claſſen betrachten. Es iſt beynahe keine Maſchine in Bergwerken gebräuchlich, die nicht auch bey andern Geſchäften des gemeinen Lebens nur mit zufälligen Veränderungen üblich wäre. Die ſo genannte **Kunſt** führt Hr. **Eberhard** als eine Art der Bergwerksmaſchinen an (52 §. 79 S.): allein könte ſie nicht mit eben dem Recht zu den Salzwerkmaſchinen hingerechnet werden? Das **Pochwerk** (54 §. 84 S.) iſt an ſich nichts anders, als eine Stampfmühle, und das **Gebläſe** (56 §. 86 S.) brauchen auch Künſtler, wenn ſie Metalle verarbeiten, welche die Bergwerke längſt verlaſſen haben. Das **Treibwerk** (53 §. 82 S.) iſt eine Winde oder Haſpel, die in tauſend andern Fällen gebraucht wird, nur daß ſie ſich hier in zufälligen Vorrichtungen unterſcheidet. Mit andern Bergwerksmaſchinen, deren Hr. **Eberhard** nicht erwehnt, hat es eben die Bewand-

wandniß, dahin z. E. die Luftwechſelmaſchinen gehören, die böſen Wetter (ſchädliche Luft und Dünſte) aus den Stollen wegzuſchaffen, wovon man auch auf Schiffen, in Hoſpitälern, Gefängniſſen, Magazinen, u. ſ. f. einen ähnlichen Gebrauch macht.

562 §.

Von den hydrauliſchen Maſchinen hat die bisher vorgetragene Hydraulik einen umſtändlichen Unterricht gegeben; und die pnevmatiſchen Maſchinen lernt man in der Wiſſenſchaft, wovon ſie den Nahmen führen, näher kommen. Von den Hebe- und Zug-Maſchinen, welche nach meiner Abtheilung zur vierten Claſſe gehören, umſtändlich zu handeln, verſtattet die Abſicht dieſes Buchs nicht. Die allgemeinen theoretiſchen Gründe, wonach ſich alle Maſchinen dieſer Claſſe beurtheilen laſſen, ſind in der Statik und Mechanik vorgetragen, und viele davon nahmhaft gemacht, zum Theil auch näher beſchrieben worden. Vornemlich gehören hieher alle Arten von Haſpeln und Winden, Flaſchenzüge, ſowol einfache, als auch zuſammengeſetzte, und durch Haſpel verſtärkte, die ſo genannten **Kraniche** und andere Hebezeuge, die beym Bau- und Schifsweſen groſſe Laſten, als Holz, Steine und Waaren, zu heben gebraucht werden. Ihrer iſt im 396 §. Mechan. bereits Erwehnung geſchehen, und man kan die daſelbſt angeführten Schriftſteller zu Rath ziehen. Ich habe eben daſelbſt unter andern des **Lauf- oder Tret-Rades**, das bey dieſer Art Maſchinen, beſonders beym **Kran**, noch häufig üblich iſt, nur mit wenigen Worten erwehnt. Zur Vollſtändigkeit des Vortrags wäre aber wohl nöthig geweſen, die Grün-

de

de der theoretiſchen Berechnung näher zu entwickeln. Um dieſen Mangel zu erſetzen, habe ich am Ende dieſes ſechſten Theils einen Zuſatz zur Mechanik beygefügt, und in demſelben die theoretiſchen Gründe näher aus einander geſetzt, nach welchen man Maſchinen, die mit Lauf- oder Tret-Rädern verſehen ſind, beurtheilen muß.

563 §.

Die Claſſe der Mühlen (561 §.) begreift eine groſſe Menge der nützlichſten Maſchinen unter ſich, und der eigentliche Unterſcheid der Mühlen von den Heb- und Zugmaſchinen beſtehet darin, daß der vornehmſte Zweck einer Mühle nicht ſo ſehr darin beſtehet, Laſten zu bewegen, als vielmehr allerley Sachen, welche die Natur hervorbringt, ſo zu bearbeiten und zu verändern, daß ſie hiernächſt allerhand Bedürfniſſe, der Menſchen zu befriedigen, auch Werke der Kunſt daraus zu verfertigen, dienen können. Die bekannteſten ſind die Kornmühlen, welche Beyer im Schauplatz der Mühlenbaukunſt eigentliche Mühlen nennt: die übrigen Arten, welche beym Bayer uneigentlich ſo genannte Mühlen heiſſen, erhalten von dem Effect, den ſie leiſten, ihre beſondere Nahmen. Man kann mit Hr. Eberhard in den Beyträgen zur Matheſi Applicata die hauptſächlichſten Arten von Mühlen füglich in fünf Claſſen bringen. Zur erſten Claſſe rechnet er diejenigen, wodurch etwas zerrieben, zur zweyten, wodurch etwas zerſtoſſen oder geſtampft wird, zur dritten, wodurch etwas zerſchnitten, zur vierten, wodurch etwas gebohrt, und zur fünften, wodurch etwas geſchliffen wird. Zur erſten Claſſe gehören

die Kornmühlen, wovon die Mehl- Graupen- und Grützmühlen beſondere Arten ſind. Die übrigen vier Claſſen heiſſen Stampfmühlen, Schneidemühlen, Bohrmühlen, und Schleif- oder Poliermühlen. Von Mehl-Mühlen iſt im XXVI Abſchn. der Mech. und im VII Abſchn. der Hydraul. ſchon umſtändlich gehandelt worden, und ich will hier nur kurz etwas von Graupen- und Grützmühlen beyfügen.

564 §.

Bey den Graupen wird erfordert, daß die Gerſte von ihren groben Hülſen befreyet, und zugleich rund werde. Dies erhält man durch einen einzigen Mühlſtein, der mit einer Einfaſſung umgeben iſt, die, wie bey Mehmühlen, der Lauft heiſt. Mit dem Mühlſtein wird die Gerſte herum getrieben, und an dem Umfang des Steins zwiſchen demſelben und dem Lauft ſo lange gerieben, bis ſie nach und nach rund wird. Die daraus entſtandenen Graupen müſſen alsdenn vom Mehl geſäubert und zugleich die kleinen ſo genannten Perl-Graupen von den groſſen abgeſondert werden. Dies letztere geſchicht durch das ſo genannte Sichter- und Windwerk. An der Axe des Mühlſteins befindet ſich oberhalb deſſelben ein Kammrad, das in den Trilling einer horizontalliegenden Welle greift, woran drey ſo genannte Windräder befindlich ſind. Ueber dieſen Windrädern ſind drey etwas ſchief geſtellte Siebe angebracht, und über den Sieben ein Rumpf, wie bey Kornmühlen. In den Rumpf werden die Graupen geſchüttet, aus demſelben fallen ſie in das erſte Sieb, das die gröſten Löcher hat: durch dies Sieb fallen die kleinern Graupen in das zweyte, die gröbſten aber auf das

erſte

erſte Windrad. Durch das zweyte Sieb fallen feinere Graupen in das dritte Sieb, und die mittlern Arten auf das zweyte Windrad: das dritte Sieb läſt alsdenn die feinſten Graupen auf das dritte Windrad fallen, das Mehl aber, welches durchfällt, in ein darunter ausgeſpanntes Tuch. Durch die Windräder wird das übrige Mehl von den Graupen abgeſchlagen, und die Siebe werden durch eine dazu dienliche Vorrichtung geſchüttelt, die von einem zweyten an der Axe des Mühlſteins angebrachten Kammrade in Bewegung geſetzt wird. Weil dergleichen Graupenmühlen an vielen Orten befindlich ſind, ſo hat man Gelegenheit genug, alles ſelbſt in Augenſchein zu nehmen. Beym Eberhard a. a. O. und in Bayers Mühlen-Schauplatz auf der XXX und XXXI. Kupfertafel findet man Zeichnungen davon.

Wenn Grütze aus der Gerſte gemacht werden ſoll, ſo wird zuförderſt von derſelben auf einer Stampfmühle die grobe Schale abgeſtoſſen, und alsdenn wird ſie auf einer gewöhnlichen Mehlmühle geſchroten. Der Widerſtand, welchen die ſchon geſtampfte Gerſte nunmehro der Bewegung des Läufers entgegen ſetzt, dürfte vielleicht von demjenigen nicht ſonderlich verſchieden ſeyn, den die Mühle beym Mehlſchroten zu überwinden hat. Ich habe im 423 §. Mech. Belidors Regel vorgetragen, dieſen Widerſtand zu berechnen, ſo wie er ſie ſeinen Erfahrungen gemäß befunden hat. Bey der Graupen-Mühle läſt ſich dieſelbe Regel wohl nicht ſo ſchlechthin anbringen. Die Reibung geſchicht hier nicht zwiſchen zweyen Mühlenſteinen, ſondern zwiſchen dem äuſſern Umfang des Mühlſteins und der innern Fläche des

Laufts. Ein Verſuch, den von dieſer Reibung abhängenden Widerſtand zu finden, lieſſe ſich ſo anſtellen. Im 382 §. Mech. war $\nu = \frac{E}{2\pi q Q}$, und E der Effect der Maſchine, welcher allemahl dem mechaniſchen Moment der angebrachten Kraft nach Abzuge der Friction gleich iſt. Wenn man nun beobachtet, wie vielmahl das Hauptrad der Maſchine in einer gewiſſen Zeit herumläuft, ſo hat man die Zahl μ (380 §. Mechan.), alſo auch ν, wenn die Einrichtung der Maſchine bekannt iſt. Daraus ergiebt ſich alsdenn $qQ = \frac{E}{2\pi\nu}$, und $Q = \frac{E}{2\pi\nu q}$, welches hier der von der Reibung herrührende Widerſtand iſt, wenn man für q den Halbmeſſer des Läufers annimmt. Weil das Wind- und Sichtwerk den Widerſtand vermehrt, ſo müſte man bey dem Verſuch die Einrichtung ſo machen, daß daſſelbe während der Zeit des Verſuchs ruhig bliebe.

565 §.

Die Claſſe der Stampfmühlen begreift wieder eine ziemliche Anzahl beſondrer Arten unter ſich, und man kan füglich zuforderſt zwey Hauptarten derſelben von einander unterſcheiden: die eine Art führt eigentlich ſo genannte Stämpfer, die andere Art aber Hammer. Die Stämpfer ſind vertical ſtehende bewegliche Pfoſten, unter welchen in einer ſtarken hölzernen Schwelle Gruben befindlich ſind, worin die Materie liegt, welche von den Stämpfern zerſtoſſen wird, indem die Maſchine ſie wechſelsweiſe

auf-

aufhebt, und wieder fallen läſt. Man ſtampft auf ſolche Art den Lein- und Rieben-Saamen zu einen Teig, woraus hiernächſt durch eine beſondre Vorrichtung das Oel gepreſt wird, und dies geſchicht in den **Oel-Mühlen.** In den **Loh-Mühlen** wird auf ähnliche Art die Rinde von Eichen- und Tannen-Holz zerſtoſſen, und daraus die Werklohe zum Gebrauch der Gerber zubereitet. Die Maſſe, woraus man Schießpulver macht, und welche aus Salpeter, Schwefel und Kohlen beſtehet, wird in den **Pulvermühlen** eben ſo zerſtoſſen. Wenn in Bergwerken das aus den Gruben gebrachte Erz, nachdem dem es auf der Scheidebank mit breiten Hammern zerſchlagen worden, noch mit zu vielen Geſtein vermiſcht iſt, ſo wird daſſelbe auf das ſogenannte **Pochwerk** oder **Puchwerk** geliefert. Dieſe Maſchine iſt nichts anders, als eine Stampfmühle, wodurch das Geſtein, in welchem ſich das Erz befindet, ſo klein als möglich zerſtoſſen, und hernach von demſelben durchs Schlemmen abgeſondert wird. Man ſ. **Calvörs** Acta Hiſtorico-Chronologico-Mechanica circa metallurgiam in Hercynia ſuperiori, II. Th. V. Cap. 2 Abtheil. 3 u. f. §§. Noch gehören hieher die **holländiſchen Walkmühlen**, worin Leder, Leinwand, Tuch, und allerhand wollene Zeuge durch das Stampfen zum bequemern Gebrauch gelinde und dichte gearbeitet werden. Die **deutſchen Walkmühlen** ſind ſtatt der Stämpfer in eben der Abſicht mit Hammern verſehen. Dieſe Hammer ſind ſtarke und ſchwere Klötze, die mit einem proportionirlich langen Stiel verſehen ſind. Die Klötze haben die Geſtalt eines Kreisbogens, wozu der Stiel den Halbmeſſer abgiebt. Der Stiel iſt

am äuſſerſten Ende um einen Polzen beweglich, damit die Maſchine vermittelſt einer ähnlichen Einrichtung, wie bey Stampfmühlen, den Kloß wechſelsweiſe heben und fallen laſſen kan. In den Papiermühlen dienen die Hammer dazu, daß die Lumpen, aus welchen das Papier gemacht wird, völlig zermalmet und aufgelöſt werden.

566 §.

Schneidemühlen ſollen vermittelſt einer oder mehrerer gehörig dazu eingerichteter Sägen entweder groſſe Bäume zu Breter, oder auch Steine zum Bau groſſer Häuſer, Marmor zu Tafeln, auch wohl gar Eiſen zerſchneiden: und daher giebt es Holz- Stein- und Eiſen-Schneidemühlen. Die Bohrmühlen dienen, die Röhren zu Brunnen- und Pumpenkünſten zu verfertigen, auch allerhand Geſchüß auszubohren. Vermittelſt der Schleifmühlen, wenn ſie im groſſen gebauet, und durch Waſſerräder getrieben werden, will man walzenförmige Schleifſteine in Bewegung ſeßen, um Glas und allerhand aus Stein oder Metall verfertigte Sachen zu ſchleifen, und ihnen hiernächſt auch die nöthige Politur vermittelſt der Polier-Scheiben zu geben, die theils aus bloſſem Holz verfertiget, theils mit Leder überzogen werden. Man kann dieſe und alle übrige bisher angeführte Arten von Mühlen ziemlich gut und vollſtändig aus Beyers Schauplaß der Mühlen-Baukunſt kennen lernen: auch giebt Herr Eberhard in den ſchon angeführten Beyträgen zur Matheſi Applicata kurze Beſchreibungen davon. Modelle ſind indeſſen unſtreitig beſſer, als die ſauberſten Zeichnungen; und wer ſich recht practiſch brauch-

brauchbare Kenntniſſe davon erwerben will, der muß Gelegenheit ſuchen, dergleichen Maſchinen im groſſen ſelbſt zu ſehen, und mit Mühlenbauverſtändigen ſowohl, als auch ſolchen Fabricanten und Profeſſions-Verwandten umzugehen, welche ihren Erwerb von denjenigen Sachen haben, die auf den Mühlen zubereitet werden. Die Abſicht dieſes Buchs verſtattet nicht, viele Zeichnungen und umſtändliche Beſchreibungen von allen dieſen Maſchinen beyzufügen. Ich kan hier nur das allgemeine davon vortragen, wodurch man in den Stand geſetzt wird, in vorkommenden beſondern Fällen die allgemeinen Lehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften richtig darauf anzuwenden, und dergleichen Werke nach theoretiſch-mechaniſchen Gründen richtig zu beurtheilen. Will man ſich recht vollſtändige practiſche Kenntniſſe vom Maſchinen-Weſen erwerben, ſo muß man auſſer **Leupolds, Belidors, Calvörs** und **Beyers** ſchon oft angeführten Werken, auch Herrn L. C. Sturms Mühlenbaukunſt, Augſp. 1718. Deſſ. vollſtändige Anweiſung zu den Waſſerkünſten. **Ramelli** Schatzkammer mechaniſcher Künſte, Leipzig 1620. **Böcklers** Schauplatz der Mechaniſchen Künſte, Nürnb. 1673. **Zeiſings** Theatrum Machinarum, Leipz. 1708. (Die erſte Ausgabe iſt von 1646.) u. a. m. zu Rath ziehen. Doch wollen dieſe ältern Schriftſteller ſchon mit Beurtheilung geleſen ſeyn, weil ſie viel ſchlechtes und unbrauchbares haben. Unter den neuern, beſonders ausländiſchen Werken, iſt das folgende vorzüglich zu empfehlen: Machines & Inventions approuvées par l'Academie Royale des Sciences, Paris 1755. Sechs Theile in 4. Von den Holländiſchen Mühlen hat man des

Pet. Limpergh Moole-Boek. Amſterd. 1690, und *Joh. van Zyl* Groot allgemen Moolen-Boek. Amſterd. 1734.

Der XLI. Abſchnitt.

Theorie der Stampf-Mühlen.

567 §.

15 Fig. Alle Arten von Stampfmühlen haben folgende Einrichtung mit einander gemein. An der Welle BC des Waſſerrades A befindet ſich ein Sternrad D, welches in das Getriebe E eingreift, deſſen Welle FG eine Reihe Stämpfer HI, KL, u. ſ. f. vermittelſt der Daumen M, N, u. ſ. f. auf folgende Art
16 Fig. in Bewegung ſezt. In der 16 Fig. ſtellt der Kreis A einen Durchſchnitt dieſer Welle vor, an ihrem Umfang werden die Zapfen B, C, D, E, welche hier Daumen heiſſen, eingeſezt, und jeder Stämpfer wie FG wird ebenfalls mit einem Zapfen HI verſehen, den die Daumen, indem die Welle umläuft, unten anfaſſen, vermittelſt deſſelben den Stämpfer in die Höhe heben, und wenn ſie den Zapfen verlaſſen,
15 Fig. wieder fallen laſſen. Wenn hinlängliches Waſſer vorhanden iſt, ſo kann das Sternrad D auf jeder Seite in ein Getriebe wie E greifen, und zwey verſchiedene Daumenwellen zugleich in Bewegung ſezen. Was die Geſtalt und Einrichtung der Stämpfer und Gruben betrift, ſo iſt dieſelbe nach der Verſchiedenheit der zu ſtampfenden Maſſe ebenfalls verſchie-

ſchieden. Bey den Oelmühlen ſind die Stämpfer unten rund, mit Eiſen beſchlagen, und gemeiniglich aus Ahorn oder Weißbüchenholz gemacht. Die in der unter den Stämpfern liegenden Schwelle, oder dem ſo genannten Grubenſtock PQ befindlichen Gruben ſind am Boden nach der Oberfläche einer Kugel gerundet, und es iſt unten in denſelben eine eiſerne Platte angebracht. In Pulvermühlen ſind die Stämpfer nicht mit Eiſen, ſondern mit Meßing beſchlagen, jedoch ſo, daß das Holz vor dem Meſſing hervorrage, und in den Gruben ſind unten Spiegel von Meßing befindlich, oder welches noch beſſer iſt, von harten und glatten Holz. Dieſe Einrichtung iſt der Gefahr der Entzündung wegen nöthig. In den Lohmühlen aber ſind die Stämpfer unten mit Eiſen beſchlagen, und haben drey oder vier ſcharfe Ecken, damit ſie die Baumrinde deſto beſſer zerſtoſſen können. In den Pochwerken heiſſen die Stämpfer Pochſtempel, und ſind unten mit ſehr ſtarken eiſernen Schuhen beſchlagen, die hier Poch-Eiſen heiſſen, und wohl 50 und mehr Pfunde ſchwer ſeyn müſſen.

568 §.

Hr. Belidor trägt in der Architect. Hydraul. I. Th. II. Buch III. Cap. das theoretiſche von den Stampfmühlen vor, und macht davon die Anwendung auf die Pulvermühlen. Er beſchreibt zugleich eine zu la Fere befindliche Pulvermühle, die ich hier ebenfalls als ein Beyſpiel gebrauchen will, um die Rechnung darauf anzuwenden. Das Sternrad an der Welle des Waſſerrades greift in zwey verſchiedene Trillinge, die zu beyden Seiten deſſelben liegen, und zu jeden Trilling gehört eine eigene Daumen-

Welle, daran jede 24 Daumen führt, die eben ſo viel Stämpfer treiben. Der Grubenſtock hat 24 Zoll Dicke, und 20 Zoll Breite, und die Gruben ſind unten im Boden mit einem Loch durchbohret, welches 6 Zoll im Durchmeſſer weit, und wie ein umgekehrter abgekürzter Kegel geſtaltet iſt. Dies wird mit einem von Apfelbaum-Holz gemachten Zapfen, dem ſo genannten Spiegel wieder verſtopfet. Hiedurch wird der Grubenſtock geſchonet, der ſonſt ſehr bald durch die heftigen Stöſſe würde von einander geſpalten werden, und der, um dies zu verhindern, überdem noch mit eiſernen Bänden umgeben iſt. Die Stämpfer ſind 10 Fuß hoch, $3\frac{1}{2}$ Zoll breit, und 3 Zoll dick; unten ſind ſie mit einem meſſingenen Schuh beſchlagen, und ihr Gewicht beträgt ohngefehr 65 Pfund. Die Heb-Zapfen an jedem Stämpfer ſind, von der Mittellinie des Stämpfers angerechnet, 14 Zoll lang, und die Daumen ſind hier kurze Stücken zerſchnittener Latten, von 40 Zoll Länge, die man durch die Daumenwelle grade durchgeſteckt hat, ſo daß bey jedem Umlauf der Welle jeder Stämpfer zweymahl gehoben wird. Die Daumen ſelbſt ſind alſo von der Mitte der Welle angerechnet, 20 Zoll lang. Der halbe Durchmeſſer des Waſſerrades beträgt $8\frac{1}{2}$ Fuß bis an den Mittelpunkt des Waſſerſtoſſes gerechnet, und der halbe Durchmeſſer des Sternrades 4 Fuß; der Halbmeſſer eines jeden der beyden Getriebe aber, worin das Sternrad greift, beträgt 20 Zoll. Das Sternrad hat 48 Zähne, und jedes Getriebe 20 Triebſtecken. Auf jeden Umlauf des Waſſerrades kommen alſo $\frac{48}{20} = 2\frac{2}{5}$ Umläufe jeder Daumenwelle, und auf 5 Umläufe des Waſſerrades 12 Umläufe der Daumenwellen;

wellen; ſo daß binnen der Zeit jeder Stämpfer 24 mahl niederſchlägt.

569 §.

Damit der Widerſtand, welchen die Maſchine zu überwinden hat, beſtändig wenigſtens beynahe einerley bleibe, muß die Einrichtung ſo gemacht werden, daß in dem Augenblick, da eine Tangente ihren Stämpfer fallen läſt, eine andre dagegen den ihrigen ſogleich wieder zu heben anfange, damit beſtändig einerley Anzahl Stämpfer der Bewegung der Daumenwelle widerſtehe. Um dies in die Wege zu richten, werden die Daumen nach folgendem Geſetz eingeſetzt. Wenn man ſich durch die Mittel-Linie eines jeden Daumen, und durch die Axe der Welle Ebenen vorſtellt, ſo müſſen ſich dieſe unter einem gleichen Winkel ſchneiden. Bey der franzöſiſchen Mühle ſteht jedem Daumen ein andrer grade entgegen, und zu jeder Welle gehören 12 Stämpfer, wovon jeder zweymahl während eines Umlaufs der Welle gehoben wird: alſo muß die Welle 24 Daumen heben, und es müſſen die erwehnten Ebenen einander unter Winkeln von $\frac{360}{24} = 15^\circ$ ſchneiden. Sollen nun beſtändig 4 Stämpfer zugleich ſich der Bewegung der Daumenwelle widerſetzen, ſo muß jeder Daumen, der jetzt einen Stämpfer ergreiſt, denſelben nicht fallen laſſen, bevor er einen Winkel von $4 \times 15 = 60^\circ$ durchlaufen hat. Indem nemlich der erſte Daumen um 15° fortgerückt iſt, ergreiſt der zweyte Daumen den zugehörigen Stämpfer; und wenn der erſte Daumen die Winkel von

30°, 45°, zurück gelegt hat, ſo wird der dritte und vierte Stämpfer ergriffen. Nachdem der erſte Daumen ſich alſo um 60° gedrehet hat, wird der fünfte Stämpfer ergriffen, und in demſelben Augenblick muß der erſte Stämpfer niederfallen.

Nach ähnlichen Gründen wird man leicht eine jede andre Vertheilung der Daumen anordnen können, wobey es denn allemahl zuerſt darauf ankommt, wie vielmahl jeder Stämpfer bey einem Umlauf der Daumenwelle gehoben werden ſoll. Bey der franzöſiſchen Pulvermühle geſchicht dies zweymahl, und bey einer deutſchen Oelmühle, ſo wie ſie Beyer im Schauplatz der Mühlen-Baukunſt XIV Cap. 81 u. f. S. beſchreibt, ſoll es dreymahl geſchehen. Wenn man ſich demnach bey einer Mühle dieſer letztern Art durch den erſten Daumen auf der cylindriſchen Oberfläche der Welle einen Kreis vorſtellt, in deſſen Ebene der erſte Daumen umläuft, ſo müſſen auf dem Umfang dieſes Kreiſes noch zwey andre Daumen ſo geſetzt werden, daß die Bogen zwiſchen dieſen Daumen 120° betragen. Sollen nun zwey Stämpfer in einer Grube arbeiten, die alsdenn ohngefehr um einen Fuß von einander abſtehen, ſo müſſen die zu dem zweyten Stämpfer gehörigen Daumen in einem beſondern Kreiſe eben ſo wie die vorigen drey eingeſetzt werden. Hiebey wird nun die Einrichtung ſo gemacht, daß der erſte Stämpfer in dem Augenblick niederfällt, da der zweyte gehoben wird. Deswegen müſſen die Ebenen, die man ſich dnrch alle ſechs Daumen, und die Axe der Welle vorſtellen kann, einander unter Winkeln von 60° ſchneiden. Im Grubenſtock ſind 8 Gruben, alſo muß die Welle 16 Stämpfer treiben, und weil zu jedem Stämpfer

drey Daumen gehören, ſo muß die Welle 48 Daumen haben, und die Ebenen durch dieſe Daumen, und die Axe der Welle müſſen einander unter Winkeln von $\frac{360}{48} = 7\frac{1}{2}$ Grad ſchneiden. Dafern hier nun beſtändig 8 Stämpfer ſich der Bewegung der Welle widerſetzen ſollen, ſo muß der erſte Daumen einen Winkel von 60 Grad zurück gelegt haben, bevor er ſeinen Stämpfer fallen läſt, weil in dieſem Augenblick der neunte Stämpfer ergriffen wird.

570 §.

Es ſey nun AB der Stämpfer, der Kreis um C 17
ein Durchſchnitt mit der Daumenwelle durch eine Fig.
Tangente DH, und GD die Heblatte; ſo muß die Einrichtung ſo gemacht ſeyn, daß jeder Daumen ſeine Hebelatte ergreift, wenn derſelbe in die horizontale Lage CF kommt. Man nehme an, ECD ſey der Winkel, um welchen ſich der Daumen gedrehet hat, in dem Augenblick, da er ſeinen Stämpfer fallen läſt, ſo kan ECD der **Erhebungswinkel** heiſſen, weil von demſelben die Höhe DE abhängt, um welcher der Stämpfer gehoben wird. Es ſey die Anzahl aller Daumen $= m$, und die Anzahl aller Stämpfer, die der Bewegung der Welle zugleich widerſtehen, $= n$, der Erhebungswinkel, $= \eta$, ſo iſt $\eta = \frac{n}{m} 2\pi$. Ferner ſey die Höhe DE $= a$, die Länge der Daumen, vom Mittelpunkt der Welle angerechnet, CD $= b$, die Länge der Hebelatten, DG $= c$, die Entfernung CF der Stämpfer von der Axe

der

der Welle, $= e$; ſo hat man $a = b \sin\eta$, und $c = e - b\cos\eta$. Bey der Pulvermühle zu la Fere war $\eta = 60^\circ$, und $b = 20$ Zoll, alſo iſt $a = 20 \times 0{,}866 = 17{,}32$ Zoll, und $e - c = 20 \times \frac{1}{2} = 10$ Zoll. Ferner war $c = 14$ Zoll, alſo $e = 24$ Zoll.

571 §.

Es ſind die Abmeſſungen aller Theile einer Stampfmühle und ihre ganze Anordnung bekannt; man ſucht, wie groß im Beharrungsſtande der Bewegung das Verhältniß zwiſchen dem Waſſerdruck gegen die Radſchaufeln, und dem Gewicht der Stämpfer ſeyn würde, wenn die Maſchine ohne alle Friction gebauet werden könnte.

Aufl. Wenn F den Waſſerdruck und α die Geſchwindigkeit der Schaufeln im Beharrungsſtande bedeutet, ſo ſey K das Gewicht aller Stämpfer, die zugleich ſteigen, und β ihre Geſchwindigkeit. Ueberdem ſey t die Umlaufszeit der Daumenwelle, ſo iſt $\frac{n}{m} t$ die Zeit, worin jeder Stämpfer um die Höhe $a = b \sin\eta$ ſteigt, und es wird $\beta = \frac{mb \sin\eta}{nt}$. Weil nun $F\alpha = K\beta$ ſeyn muß, ſo erhält man $F\alpha nt = mbK\sin\eta$. Es ſey r der Halbmeſſer des Waſſerrades, und ϑ die Umlaufszeit deſſelben; ſo hat man $\alpha = \frac{2\pi r}{\vartheta}$, alſo $2\pi r\, nt\, F = m\vartheta b K \sin\eta$, und K $= \frac{2\pi r}{b \sin\eta} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{t}{\vartheta} \cdot F$. Es war aber n die Anzahl

der

der zugleich ſteigenden Stämpfer; wenn alſo das Gewicht eines Stämpfers $= Q$ geſetzt wird, ſo hat man $K = nQ$, und es wird $Q = \frac{2\pi r}{mb \sin\eta} \cdot \frac{t}{\vartheta} \cdot F$, folglich $F = \frac{mb \sin\eta}{2\pi r} \cdot \frac{\vartheta}{t} \cdot Q$.

Bey der Pulvermühle zu la Fere iſt jeder Stämpfer 65 Pf. ſchwer, und dies iſt das Gewicht von $\frac{65}{70} = \frac{13}{14}$ Cub. Fuß Waſſer. Das Sternrad an der Hauptwelle hat 48 Zähne, und jeder Trilling 20 Triebſtecken; alſo wird $\frac{\vartheta}{t} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$. Für jede der beyden Daumenwellen iſt $m = 24$, und das Waſſerrad hat 17 Fuß im Durchmeſſer. Werden alle dieſe Werthe gebraucht, und $b = 20$ Zoll $= \frac{5}{3}$ Fuß, $\sin\eta = 0,866$ (560 §.) geſetzt; ſo findet man

$$F = \frac{24 \cdot \frac{5}{3} \cdot 0,866}{17 \cdot \pi} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{13}{14} \text{ Cubic-Fuß } = \frac{7 \cdot 4 \cdot 0,866 \cdot 6 \cdot 13}{17 \cdot 11 \cdot 7} = 1,45 \text{ Cub. Fuß},$$

welche $101\frac{1}{2}$ Pf. wägen. Für beyde Daumenwellen zuſammen iſt alſo $F = 2,9$ Cub. Fuß, oder $F = 203$ Pf. Wenn man für Q das doppelte Gewicht eines Stämpfers annimmt, ſo geben obige Formuln die Kraft F für beyde Daumenwellen zuſammen.

Es iſt aber das lebendige Gefälle des Waſſers, welches dieſe Pulvermühle treibt, (nach H. Belidor a. a. O. 721 §.) 6 Fuß 8 Zoll 9 Linien $= \frac{969}{144}$ Fuß; alſo die zugehörige Geſchwindigkeit

$$= 2\sqrt{\frac{969 \cdot 15,1}{144}} = \sqrt{\frac{969 \cdot 15,1}{36}} = 20,16 \text{ Fuß}.$$

Fuß. Das Waſſerrad läuft in einer Minute $10\frac{1}{2}$ mahl um, und binnen dieſer Zeit durchlaufen die Schaufeln einen Weg von $10\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \pi = 560,8$ Fuß, ſo daß ihre Geſchwindigkeit $\frac{560,8}{60} =$ 9,35 Fuß beträgt. Demnach wird die reſpective Geſchwindigkeit des Waſſers $= 10,63$ Fuß. Die Fläche der Schaufeln iſt $2\frac{1}{2}$ Quad. Fuß groß; dies giebt den Waſſerſtoß $= 2\frac{1}{2} \cdot \frac{10,63^2}{4 \cdot 15,1} = 4,64$ C. Fuß, und dieſe wägen $4,64 \times 70 = 324,8$ Pfund. Vergleicht man dieſe Zahl mit der vorhin gefundenen von 203 Pfund, ſo erhellet, daß ein ſehr beträchtlicher Theil von der angebrachten Kraft zur Ueberwindung der Friction erfordert werde, zu deſſen Berechnung nun die nähere Anleitung folgen ſoll.

572 §.

18 Fig. Es ſey AB der Stämpfer, GD die Hebelatte, HV der Daumen, welcher den Stämpfer hebt. Ferner ſey GQ eine Verticallinie durch den Schwerpunkt des Stämpfers, und VG horizontal; ſo erhellet, daß der Stämpfer, wenn ihn gleich der Daumen, den ich in dieſer Lage ruhend betrachte, in V unterſtützt, dennoch in dieſer Lage nicht frey ruhen könne. Es entſteht von dem Gewicht Q des Stämpfers ein Moment, $= GV \cdot Q$, womit daſſelbe den Stämpfer um den Punkt V zu drehen ſtrebt. Um dieſe Umdrehungsbewegung zu verhindern, und den Stämpfer während des Steigens in verticaler Lage zu erhalten, werden ſowohl oberwärts bey M, *m*, als auch unterwärts bey N, *n*, ein paar Zwerghölzer,

die hier Scheidelatten heiſſen, ſo angebracht, daß die Stämpfer zwiſchen denſelben auf und nieder ſpielen können. Wenn nun der Stämpfer zwar in V unterſtützt iſt, übrigens aber frey hängt, ſo lehnt ſich das obere Ende gegen M, das untere aber gegen N, und die Scheidelatten leiden an dieſen Stellen einen Druck, der ſich ſo berechnen läſt, wie dazu ſchon im 158 §. Stat. die Anleitung gegeben iſt. Wenn man ſich nemlich durch den Schwerpunkt des Stämpfers und durch V eine verticale Ebene vorſtellt, ſo hat man den am Ende des 158 §. Stat. betrachteten Fall. Durch M und N ſey MR und NS horizontal gezogen, VX aber und VY vertical. Man betrachte ſtatt des Stämpfers die erwehnte Ebene, und den Schwerpunkt K des Stämpfers als den Schwerpunkt dieſer Ebene; ſo würden die Puncte X und Y, wenn ſie unterſtützt wären, nach MR und NS den Druck $\frac{VG.Q}{XY}$ leiden, übrigens aber beyde zuſammen das ganze Gewicht Q des Stämpfers tragen. Bey dieſer Vorſtellung müſten nun X und Y ſo gehalten werden, daß ſie weder nach verticaler, noch nach horizontaler Richtung weichen könten. Statt deſſen könnte auch ein andrer Punkt V der Verticallinie XY zu ſinken verhindert werden, und alsdenn würden X und Y nur noch die horizontalen Preſſungen leiden, nach XR und YS. Eben dieſen horizontalen Druck würde alsdenn jeder Punkt M oder N leiden, der in XR oder YS liegt, wenn derſelbe nach der entgegen geſetzten horizontalen Richtung aufgehalten würde. Dies letztere bewerkſtelligen nun die Scheidelatten, wenn man ſich ſtatt der

bisher

bisher betrachteten Ebene wieder den Stämpfer vorſtellt, da dann übrigens V ſein ganzes Gewicht trägt.

573 §.

Daß dieſe Schlüſſe hier ihre richtige Anwendung finden, läſt ſich auch ſo überſehen. Man verlängere VG nach Z, und ſtelle ſich in einem willkührlichen Punkt Z dieſer verlängerten Linie eine Kraft $P = \frac{VG.Q}{VZ}$ vertical aufwärts vor, ſo wird der Stämpfer von dieſer Kraft im Gleichgewicht erhalten, und V leidet nur den Druck $Q-P$ (40 §. Stat.). Statt dieſer Kraft P aber kan man auch an M und N nach Mr und Ns ein paar Kräfte R und S anbringen, deren Moment in Anſehung des Punkts V eben ſo groß iſt, und dieſer Bedingung geſchicht ein Genüge, wenn $VX.R + VY.S = VG.Q$ iſt: alsdenn aber leidet V den verticalen Druck Q, und nach horizontaler Richtung den Druck $R-S$ (158 §. Stat.). Sollen demnach die Kräfte R und S das Gleichgewicht völlig herſtellen, ſo daß V nur verhindert werden darf, nach verticaler Richtung zu ſinken, ſo muß $R-S=0$, alſo $R=S$ ſeyn, und dies giebt $(VX + VY)R = VG.Q$, alſo

$$R = \frac{VG.Q}{VX+VY} = \frac{VG.Q}{XY} = S,$$

wie im vorigen §.

Hr. Belidor trägt eben dieſe Unterſuchung in der Architect. Hydraul. I Buch II Cap. 230 §. vor, nach ſeiner Rechnung aber wäre der Druck gegen $M = \frac{VG.Q}{VX}$, und der Druck gegen $N = \frac{VG.Q}{VY}$.

Allein

Allein dies iſt ein Verſehen, denn jede von dieſen Preſſungen für ſich allein würde ſchon mit Q im Gleichgewicht ſeyn, wenn V gehindert würde, nach horizontaler Richtung fortzugehen, und das Moment beyder Kräfte zuſammen wäre doppelt ſo groß, als das Moment VG . Q, da es doch offenbar nur eben ſo groß ſeyn muß, wenn keine Umdrehungsbe-Bewegung um V entſtehen ſoll: deſſen zu geſchweigen, daß beyde Kräfte nur in dem Fall gleich groß wären, wenn VX = VY iſt, und alſo V nach horizontaler Richtung einen Druck litte, welches nicht ſeyn muß, weil V nach dieſer Richtung fortzugehen nicht verhindert wird. Demnach fallen auch die Folgen weg, welche Hr. Belidor im 231 u. f. §§. aus ſeinen Formuln herleitet.

574 §.

Die in den vorigen beyden §§. erwieſenen Formuln für den Druck gegen die Scheidelatten finden bey dem allen doch auch eigentlich nur ſo lange ihre Anwendung, als der Stämpfer auf dem Daumen ruhig hängt. Wenn aber die Daumenwelle umläuft, ſo vermindert die zwiſchen dem Daumen und der Scheidelatte bey V vorfallende Friction den Druck R gegen die obere Scheidelatte M, und vermehrt dagegen den Druck S gegen die untere N. Die Verminderung des Drucks gegen M kan ſo weit gehen, daß ſich der Druck in den entgegen geſetzten verwandelt, ſo daß das obere Ende nun nicht gegen M, ſondern *m* gedruckt wird. Um nun für dieſen Fall die Preſſungen gegen *m* und N zu finden, ſchlieſſe ich ſo. Jener Druck ſey = R, dieſer = S, das Verhältniß der Friction zum Druck = $\mu : 1$; ſo entſteht

 daher

daher bey *m* und N die Friction $\mu(R+S)$, wenn die Welle umläuft. Demnach leidet V alsdenn den verticalen Druck $Q+\mu(R+S)$, und daraus entſteht bey V nach der Richtung VG die Friction $\mu Q + \mu^2(R+S)$. Damit nun V während der Bewegung keinen horizontalen Druck leide, muß $R+S = \mu Q + \mu^2(R+S)$ ſeyn, und weil die Momente der Kräfte R und S einander nun entgegen geſetzt ſind, ſo hat man auch $VY.S - VX.R = VG(Q+\mu(R+S))$. Dieſe Gleichung giebt $\frac{VY.S - VX.R}{VG}\mu = \mu Q + \mu^2(R+S)$, und weil eben der Werth hinter dem Gleichheitszeichen auch $=R+S$ war, ſo erhält man $\mu VY.S - \mu VX.R = VG.R + VG.S$, folglich wird $R = \frac{(\mu VY - VG)S}{VG+\mu VX}$. Dieſen Werth ſetze man in die erſte Gleichung, ſo wird

$$\frac{(\mu VY - VG)S}{VG+\mu VX} S + S = \mu Q + \frac{\mu^2(\mu VY - VG)S}{VG+\mu VX} + \mu^2 S,$$

und daraus folgt $\mu(VY+VX)S = \mu VG.Q + \mu^2 VX.Q + \mu^3 VY.S + \mu^3 VX.S$, alſo $(VY+VX-\mu^2(VY+VX))S = (VG+\mu VX)Q$, und $S = \frac{(VG+\mu VX)Q}{(1-\mu^2)(VY+VX)}$. Dies ſtatt S in die Gleichung für R geſetzt, giebt $R = \frac{(\mu VY - VG)Q}{(1-\mu^2)(VY+VX)}$.

Wenn die Friction wegfällt, alſo $\mu = 0$ iſt, ſo geben dieſe Formuln $R = -\frac{VG.Q}{VY+VX}$, und

S =

$S = \frac{VG.Q}{VY + VX}$, wie im 572 und 573 §. Uebrigens erhellet, daß R ſo lange poſitiv bleibe, als $\mu VY > VG$ iſt, und ſo lange iſt auch die Summe $R + S$ von beſtändiger Gröſſe, und hängt nicht von VG ab. Es wird nemlich $R + S = \frac{\mu Q}{1 - \mu^2}$, wie der Gleichung $R + S = \mu Q + \mu^2 (R + S)$ gemäß iſt.

575 §.

In den Fällen, wo $\mu VY > VG$ iſt, alſo R negativ wird, laſſen ſich die gefundenen Formuln nicht weiter anwenden. Nun iſt im Fall des Gleichgewichts $VY.S + VX.R = VG(Q + \mu(R + S))$, denn es bleibt die Friction an beyden Scheidelatten zuſammen $= \mu(R + S)$, wenn gleich nicht *m*, ſondern M den Druck R leidet. Ueberdem wird nun $S - R = \mu Q + \mu^2(R + S)$, und man findet $\frac{VY.S + VX.R}{VG} . \mu = S - R$, alſo $(VG + \mu VX) R = (VG - \mu VY) S$, und $R = \frac{(VG - \mu VY) S}{VG + \mu VX}$. Alſo wird ferner

$$S - \frac{(VG - \mu VY) S}{VG + \mu VX} = \mu Q + \frac{\mu^2 (VG - \mu VY) S}{VG + \mu VX}$$

$+ \mu^2 S$, und daraus folgt $\mu VX . S + \mu VY . S = \mu Q (VG + \mu VX) + 2\mu^2 VG . S + \mu^3 (VX - VY) S$; alſo erhält man

$$S = \frac{(VG + \mu VX) Q}{VX + VY - 2\mu VG - \mu^2 (VX + VY)},$$ und

$$R = \frac{(VG - \mu VY) Q}{VX + VY - 2\mu VG - \mu^2 (VX - VY)}.$$

Wenn man $VG = \mu VY + \delta$ ſetzt, ſo hat man $VG - \mu VY = \delta$, und $2\mu VG = 2\mu^2 VY + 2\mu\delta$. Braucht man dieſe Werthe in den eben gefundenen Gleichungen, und ſetzt $VX + VY = XY = f$, ſo erhält man

$$R = \frac{\delta . Q}{(1-\mu^2)f - 2\mu\delta}, \text{ und } S = \frac{(\delta + \mu f) Q}{(1-\mu^2)f - 2\mu\delta}.$$

Daraus folgt $R + S = \frac{(2\delta + \mu f) Q}{(1-\mu^2)f - 2\mu\delta}$, oder $R + S = \frac{(\mu + 2\delta : f) Q}{1 - \mu^2 - 2\mu\delta : f}$. Bey dem im vor. §. betrachteten Fall war $R + S = \frac{\mu Q}{1 - \mu^2}$, und die Vergleichung ergiebt, daß dieſer Ausdruck kleiner, als der vorige ſey. Weil nun die Friction an den Scheidelatten allemahl $= \mu (R + S)$ iſt, ſo iſt dieſe Friction bey einerley Gewicht der Stämpfer am kleinſten, wenn man die Einrichtung ſo macht, daß μVY nicht kleiner als DG ſey, damit VG nicht gröſſer als μVY werden könne. Hievon hat man überdem auch noch den Vortheil, daß die Friction beſtändig von einerley Gröſſe bleibt, da ſie im gegenſeitigen Fall mit δ wächſt, und eben deswegen veränderlich iſt, weil ſich δ beym Umlauf der Welle ändert.

576 §.

Das Geſetz, nach welchem ſich $\delta = VG - \mu VY$ ändert, kann man ſo überſehen. Im Anfang der Bewegung iſt $GV = e - b$, wenn die Buchſtaben die

die Bedeutung des 570 §. behalten, und überhaupt hat man $GV = e - b + b \, \text{ſinv} . FCV$. Wenn überdem im Anfang der Bewegung $VY = g$ iſt, ſo hat man überhaupt $VY = g + b \, \text{ſin} \, FCV$. Sollen demnach die Formuln des 574 §. ihre Anwendung finden, ſo muß $e - b + b \, \text{ſinv} FCV$ nicht gröſſer, als $\mu (g + b \, \text{ſin} FCV)$ werden. Wenn aber η der gröſte Werth von FCV iſt, und es iſt $e - b + b \, \text{ſinv} \eta$ nicht gröſſer, als $\mu (g + b \, \text{ſin} \eta)$, ſo kann man verſichert ſeyn, daß eben daſſelbe auch für kleinere Werthe von FCV wahr ſeyn werde. Es iſt nemlich anfangs ſinvη in Vergleichung mit ſinη ſehr klein, und wenn μ einen eigentlichen Bruch bedeutet, ſo kann man allemahl einen Winkel γ angeben, welcher der Gleichung $\text{ſinv} \gamma = \mu \, \text{ſin} \gamma$ ein Genüge leiſtet. Denn es iſt $\text{ſin} \gamma^2 = (2 - \text{ſinv} \gamma) \, \text{ſinv} \gamma$, alſo giebt die angenommene Gleichung $\text{ſinv} \gamma^2 = \mu^2 (2 - \text{ſinv} \gamma) \, \text{ſinv} \gamma$, und $\text{ſinv} \gamma = \mu^2 (2 - \text{ſinv} \gamma)$, woraus $\text{ſinv} . \gamma + \mu^2 \, \text{ſinv} \gamma = 2 \mu^2$, und $\text{ſinv} \gamma = \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}$ folgt.

Nimmt man ſtatt γ einen gröſſern Winkel η, ſo wird $\text{ſinv} \eta > \mu \, \text{ſin} \eta$. Iſt nun $\mu g + \mu b \, \text{ſin} \eta > e - b + b \, \text{ſinv} \eta$, und man ſetzt $\text{ſinv} \eta = \mu \, \text{ſin} \eta + \nu$, ſo wird $\mu g > e - b + \nu b$, und eben daſſelbe iſt alsdenn auch wahr für alle Winkel, die kleiner als η ſind; denn für dieſe iſt ν kleiner, als für den Winkel η. Wäre $\mu g + \mu b \, \text{ſin} \eta = e - b + b \, \text{ſinv} . \eta$, ſo wäre $\mu g = e - b + \nu b$, für alle kleinere Winkel aber wäre $\mu g > e - b + \nu b$.

Wird die Vorausſetzung $\mu = \frac{1}{3}$ angenommen, ſo hat man $\frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} = \frac{1}{5} = 0,2$, und dieſer Querſi-

nus gehört zum Winkel von $36° 52'$. Wenn alſo $g > 3(e-b)$ iſt, und FCV nicht gröſſer, als $36° 52'$ werden kann, ſo finden gewiß die Formuln des 574 §. ihre Anwendung. Iſt aber der gröſte Werth von FCV, oder der hier ſo genannte Erhebungswinkel $\eta > 36° 52'$, und man hat $\sin v\eta - \frac{1}{3}\sin\eta = v$ gefunden; ſo muß $\frac{1}{3}g > e - b + vb$, oder wenigſtens $\frac{1}{3}g$ nicht kleiner, als $e-b+vb$ ſeyn, wenn die Formuln des 574 §. ihre Anwendung finden ſollen.

577 §.

Man hat, wie es ſcheinet, dieſe Bedingung bey Anlegung der Stampfmühlen bisher nicht genug in Betracht gezogen; denn man legt gewöhnlich die unterſte Scheidelatte ſehr nahe unter der Daumenwelle. Weil indeſſen $e-b$ gewöhnlich nur einige Zolle beträgt, ſo iſt doch wenigſtens $g > 3(e-b)$, wenn gleich nicht darauf geſehen iſt, daß $g > 3(e-b+vb)$ ſeyn muß. Bey der Pulvermühle zu la Fere iſt $e-b=4$ Zoll, $b=20$ Zoll, und $g=16$ Zoll, $\eta=60°$. Man findet aber

$$
\begin{array}{rl}
\sin v\eta = & 0{,}5 \\
\frac{1}{3}\sin\eta = & 0{,}2886751 \\
\hline
\text{alſo } v = & 0{,}2113249 \\
b = & 20 \\
\hline
vb = & 4{,}426498 \\
e-b = & 4 \\
\hline
 & 8{,}226498 \\
 & 3 \\
\hline
3(e-b+vb) = & 24{,}679494
\end{array}
$$

Weil nun g nur 16 Zoll groß iſt, ſo ſiehet man wohl, daß die Friction zum Theil nach dem 575 §. berechnet

net werden müſſe. Hätte man die untere Scheidelatte 9 Zoll niedriger, oder die Daumenwelle 9 Zoll höher gelegt, ſo wäre der Regel des 575 §. ein Genüge geſchehen. Setzt man $\eta = 45°$, ſo findet man

$$\sin v\,\eta = 0{,}2928932$$
$$\tfrac{1}{3}\sin\eta = 0{,}2357023$$
$$v = 0{,}0571909$$
$$b = 20$$
$$vb = 1{,}143818$$
$$e - b = 4$$
$$e - b + vb = 5{,}143818$$
$$3(e - b + vb) = 15{,}431454$$

weniger als 16 Zoll.

Wenn aber von den 4 Daumen, die zugleich heben, der erſte mit dem Horizont den Winkel FCV $= 60°$ einſchlieſt, ſo hat eben dieſer Winkel für die übrigen drey Daumen die Werthe 45°, 30°, 15°, ſo daß man für die zugehörigen drey Stämpfer nach dem 574 §. rechnen kan, für den erſten aber die Friction nach dem 575 §. rechnen muß.

578 §.

Diejenige Kraft zu finden, welche zur Ueberwindung des geſamten Widerſtandes bey einer Stampfmühle im Beharrungsſtande der Bewegung erfordert wird, wenn das Gewicht der Stämpfer nebſt der übrigen Anordnung der Maſchine ſchon bekannt iſt.

I. Aufl. Wenn die Regel des 575 §. bey Anordnung der Stämpfer beobachtet iſt, ſo leiden alle zugleich hebende Daumen beſtändig einerley Wider-

 ſtand.

ſtand. Wenn nemlich eines jeden Stämpfers Gewicht $= Q$ iſt, ſo leidet jeder Daumen vertical unterwärts den Widerſtand $Q + \mu(R+S) = Q + \frac{\mu^2 Q}{1-\mu^2} = \frac{1}{1-\mu^2} Q$, und nach horizontaler Richtung VG den Widerſtand $\mu Q + \mu^2(R+S) = \frac{\mu}{1-\mu^2} Q$. Dafern alſo die Anzahl aller zugleich ſteigenden Stämpfer $= n$ iſt; ſo hat man den geſamten Widerſtand aller dieſer Stämpfer, wenn man das Gewicht $nQ = K$ ſtatt Q braucht. Man ſetze Kürze halber $\frac{1}{1-\mu^2} nQ = Z$, ſo leidet V den verticalen Druck Z, und nach horizontaler Richtung den Widerſtand μZ. Ferner ſey der Halbmeſſer des Trillings an der Daumenwelle $= h$, der Halbmeſſer des zugehörigen Zapfens $= k$, das Gewicht der Daumenwelle $= M$. Weil nun das äuſſerſte Ende V des Daumen in der Zeit $\frac{n}{m} t$ um die Höhe $b \sin \eta$ ſteigt (570 §.), gegen D aber um den Weg $b \sin v \eta$ fortrückt, ſo iſt die verticale Geſchwindigkeit dieſes Punkts $= \frac{mb \sin \eta}{nt}$, und die horizontale $= \frac{mb \sin v \eta}{nt}$. Demnach iſt das Bewegungsmoment der Laſt Z nach VY $= \frac{mb \sin \eta}{nt} Z$, und der Laſt μZ nach VG $= \frac{mb \sin v \eta}{nt} \mu Z$. Eine Kraft p am Um-

Umfang des Trillings angebracht, würde binnen der Zeit $\frac{nt}{m}$ den Bogen $h\eta$ durchlaufen, und ihre Geſchwindigkeit wäre $= \frac{mh\eta}{nt}$, ihr Bewegungsmoment $= \frac{pmh\eta}{nt}$. Für den Beharrungsſtand der Maſchine wäre alſo

$$\frac{pmh\eta}{nt} = \frac{mb\,\sin v\eta}{nt} Z + \frac{mb\,\sin v\eta}{nt} \mu Z, \text{ oder}$$

$$p = \frac{b\,\sin\eta}{h\eta} Z + \frac{b\,\sin v\eta}{h\eta} \mu Z,$$ wenn man anfangs die Friction an den Zapfen der Daumenwelle beyſeit ſetzt. Um dieſe mit in Rechnung zu bringen, ſetze man, am Umfang des Trillings werde auſſer p noch eine Kraft φ erfordert, um die erwehnte Friction zu überwinden, und erwege, daß die Zapfen den verticalen Druck $M+Z+p+\varphi$, und überdem den horizontalen Druck μZ leiden, woraus der mittlere Druck $=\surd((M+Z+p+\varphi)^2+\mu^2Z^2)$ entſteht. Kürze halber ſetze man $M+Z+p=Y$, ſo iſt die am Zapfen vorfallende Friction $= \mu\surd((Y+\varphi)^2+\mu^2Z^2)$, und ihr Moment $\mu k\surd((Y+\varphi)^2+\mu^2Z^2)=h\varphi$. Dies giebt $\mu^2k^2((Y+\varphi)^2+\mu^2Z^2)=h^2\varphi^2$, woraus φ gefunden wird. Hiernächſt betrachte man $p+\varphi$ als eine Laſt am Umfang des Getriebes, ſetze den Halbmeſſer des Sternrades $=\varrho$, den Halbmeſſer des Mühlwellenzapfens $=\varepsilon$, die Kraft am Umfang des Mühlrades $=P$, ſo iſt der Laſt $p+\varphi$ Geſchwin-

digkeit $= \frac{2\pi h}{t}$, und die Geſchwindigkeit der Schaufeln am Waſſerrade $= \frac{2\pi r}{\vartheta}$ (571 §.). Demnach erhält man

$$\frac{2\pi r}{\vartheta} . P = \frac{2\pi h}{t} (p+\varphi)\sqrt{(1+\mu^2)}$$ (406. 407 §. Mech.), alſo

$$P = \frac{h}{r} . \frac{\vartheta}{t} (p+\varphi)\sqrt{(1+\mu^2)}.$$

Wenn nun noch am Umfang des Waſſerrades wegen der an den Zapfen der Mühlwelle vorfallenden Friction die Kraft ψ erfordert wird, ſo wird ψ eben ſo wie vorhin φ gefunden (399 u. f. §§. Mech.), und die geſuchte Kraft iſt alsdenn $= P + \psi$.

Wenn keine Friction die Bewegung der Maſchine verzögerte, ſo wäre $\mu = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, und man hätte $Z = K$, $p = \frac{b \sin \eta}{h\eta} K$, alſo

$$P = \frac{h}{r} . \frac{\vartheta}{t} . \frac{b \sin \eta}{h\eta} . K = \frac{\vartheta}{t} . \frac{b \sin \eta}{r\eta} . K.$$

Es iſt aber $m : n = 2\pi : \eta$, alſo $\eta = \frac{2\pi n}{m}$, und dies ſtatt η geſetzt, giebt

$$P = \frac{\vartheta}{t} . \frac{mb \sin \eta}{2\pi r} . \frac{K}{n} = \frac{\vartheta}{t} . \frac{mb \sin \eta}{2\pi r} . Q,$$

welches der Werth von F im 571 §. war. Wenn alſo F hier eben die Bedeutung behält, ſo hat man $P + \psi - F$ für die Kraft, welche zur Ueberwindung der Friction erfordert wird.

II. Aufl.

II. Aufl. Dafern die Regel des 575 §. bey Anordnung der Stämpfer nicht beobachtet iſt, ſo leiden nicht alle zugleich hebende Daumen einerley Widerſtand. Es ſey die Anordnung ſo beſchaffen, daß $\mu g = e - b + \nu b$ wird, wenn der Winkel FCV $= \gamma$, und $\sin v\gamma = \mu \sin \gamma + \nu$ iſt; ſo wird für diejenigen Daumen, deren Neigungswinkel gegen den Horizont gröſſer als γ iſt, der Unterſcheid ν gröſſer, alſo $\mu g < e - b + \nu b$, und für dieſe Daumen wächſt die Friction mit FCV. Man ſtelle ſich vor, daß von den zugleich hebenden Daumen CD, CE, CF, CG, einer CD eben jetzt im Begrif ſey, die Hebelatte zu verlaſſen, und daß der ihm zugehörige Winkel FCV $= \eta$ ſey. Zählt man nun die übrigen Daumen, ſo wie ſie von CG bis CD nach der Reihe folgen, ſo iſt für den erſten dieſer zugleich hebenden Daumen FCV $= \frac{1}{n}\eta$, für den zweyten FCV $= \frac{2}{n}\eta$, und überhaupt für den $r$ten iſt FCV $= \frac{r}{n}\eta$. In dem Augenblick nun, da ſich alles in dieſem Zuſtande befindet, iſt die Friction am gröſten. So wie aber der höchſte Daumen CD ſeinen Stämpfer fallen läſt, greift ein andrer CH ſeinen Stämpfer an, und wenn man dieſen nun, als den erſten betrachtet, ſo iſt für ihn FCV $= 0$, für den zweyten FCV $= \frac{1}{n}\eta$, für den $r$ten FCV $= \frac{r-1}{n}\eta$, und für den letzten CE iſt FCV $= \frac{n-1}{n}\eta$. Nun iſt die Friction am 19 Fig.

klein-

kleinſten, und wächſt binnen der Zeit, da ſich die Welle in dem Winkel $\frac{1}{n}\eta$ drehet, bis zum gröſten Werth: gleich darauf aber verfällt alles wieder in den vorigen Zuſtand. Man berechnet aber wegen mehrerer Sicherheit die Friction für den Fall, da ſie am gröſten iſt; und in ſolcher Abſicht muß man ſich nun die Welle in einer ſolchen Lage vorſtellen, wo ein Daumen, wie CD, im Begrif iſt, die zugehörige Hebelatte zu verlaſſen. Iſt nun die Anordnung ſo, daß $\mu g = e - b + \nu b$, und $\sin v\gamma = \mu \sin\gamma + \nu$ iſt; ſo werden diejenigen Daumen, deren Neigung gegen den Horizont bey der angenommenen Lage den Winkel γ nicht übertrift, einerley Widerſtand leiden. Für dieſe kan man alſo den Widerſtand wie vorhin berechnen, und $K = rQ$ annehmen, wenn ihre Anzahl $= r$ iſt. Für jeden der übrigen muß man nach dem 575 §. $\mu(R+S)$ beſonders berechnen, und alsdenn den Widerſtand $Q + \mu(R+S)$ noch zu $\frac{1}{1-\mu^2} rQ$ addiren, hiernächſt aber die Summe $= Z$ ſetzen; ſo läſt ſich alsdenn die übrige Rechnung, wie vorhin, anſtellen.

579 §.

Will man von dieſer allgemeinen Auflöſung eine Anwendung auf die Pulvermühle zu la Fere machen, ſo ergiebt die Vergleichung mit dem 577 §, daß man für drey Stämpfer die Rechnung völlig nach der I. Aufl. des vor. §. anſtellen könne; für den vierten aber die Rechnung beſonders anſtellen müſſe, um R+S, den Formuln des 575 §. gemäß,

zu finden. Man ſetze alſo zuerſt $n=3$, ſo hat man $nQ=K=195$ Pfund, und $Z=\frac{1}{1-\mu^2}K=\frac{9}{8}$ $.195=219\frac{3}{8}$ Pf. Ferner ſuche man nach dem 575 §. $\delta=VG-\mu VY$, in der Vorausſetzung, daß $FCV=60°$ ſey, ſo hat man $VG=DG=e-b\cos 60°=24-\frac{1}{2}.20=14$ Zoll, und $VY=g+b\sin 60°=16+20.0{,}866=33{,}32$ Zoll, alſo $\frac{1}{3}VY=11$ Zoll, und $\delta=3$ Zoll. Dies giebt $2\mu\delta=2$ Zoll; und weil $f=6$ Fuß iſt, (Belidor a. a. O. 724 §.) ſo wird $2\mu\delta:f=\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$, und man erhält nach dem 575 §, $\mu(R+S)=\frac{5}{33}Q$, alſo $Q+\mu(R+S)=\frac{38}{33}Q=75$ Pf. Dies zu dem vorigen Werth von Z addirt, giebt den vollſtändigen Werth von $Z=294\frac{3}{8}$ Pfund. Um die übrigen Rechnungen anzuſtellen, muß man noch folgende Abmeſſungen der Maſchine kennen. Es iſt der Halbmeſſer des Waſſerrades $r=8\frac{1}{2}$ Fuß, der Halbmeſſer der Mühlwellen- und Daumenwellen-Zapfen $\varepsilon=k=9$ Linien, der Halbmeſſer des Sternrades $\varrho=4$ Fuß, der Halbmeſſer beyder Getriebe $h=20$ Zoll, das Gewicht M einer jeden Daumenwelle $=1500$ Pf., das Gewicht N des Waſſerrades mit ſeiner Welle und dem Sternrade $=3600$ Pf.

Demnach iſt $b=h$, und man erhält

$$p=\frac{\sin\eta+\mu\sin v\eta}{\eta}Z=\frac{0{,}866+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}}{1{,}0472}.294\frac{3}{8}$$

$=291$ Pf. Um φ zu finden, verwandle man im 578 §. die Gleichung $\mu^2k^2((Y+\varphi)^2+\mu^2Z^2)=h^2\varphi^2$ in folgende $h^2\varphi^2-\mu^2k^2\varphi^2-2\mu^2k^2Y.\varphi=\mu^2k^2(Y^2+\mu^2Z^2)$, woraus man

$$\varphi^2 - \frac{2\mu^2 k^2 Y}{h^2 - \mu^2 k^2} . \varphi = \frac{\mu^2 k^2 (Y^2 + \mu^2 Z^2)}{h^2 - \mu^2 k^2}$$

erhält, und

$$\varphi = \frac{\mu^2 k^2 Y \pm \mu k \surd (h^2 Y^2 + (h^2 - \mu^2 k^2) \mu^2 Z^2)}{h^2 - \mu^2 k^2}.$$

Die negative Wurzel kann nicht gebraucht werden, weil φ allemahl poſitiv ſeyn muß. Wenn man übrigens alles genau nehmen will, ſo muß man die Rechnung für jede von den beyden Daumenwellen beſonders anſtellen, weil das Sternrad den einen Trilling vertical abwärts, den andern aber vertical aufwärts drückt, ſo daß für den letztern p negativ iſt. Für den erſten Trilling erhält man

$M = 1500$ Pf.	Man nehme $\mu = \frac{1}{3}$
$Z = 294$ =	und $k = \frac{1}{16}$
$p = 291$ =	ſo wird $\mu k = \frac{1}{48}$
$Y = 2085$ Pf.	und $\mu^2 k^2 = \frac{1}{2304}$

Ferner hat man $h = \frac{5}{3}$, und $h^2 = \frac{25}{9}$; demnach iſt $\mu^2 k^2$ in Vergleichung mit h^2 ſehr klein, und man kan das, was in $\frac{\mu^2 k^2}{h^2}$ multiplicirt iſt, weglaſſen, ſo hat man beynahe $\varphi = \frac{\mu k}{h} \surd (Y^2 + \mu^2 Z^2)$.

Die fernere Rechnung giebt

$Y^2 + \mu^2 Z^2 = 4356829$, $\surd (Y^2 + \mu^2 Z^2) = 2087$, und $\frac{\mu k}{h} = \frac{1}{48} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{240} = \frac{1}{80}$, alſo $\varphi = 26$ Pf.

Für den zweyten Trilling hat man $Y = M + Z - p = 1503$ Pf., alſo wird $\surd (Y^2 + \mu^2 Z^2) = 1506$ Pf.,

Pf., und $\varphi = 19$ Pf. Beyde Werthe von φ zuſammen, geben 45 Pfund, und für beyde Daumenwellen zuſammen, iſt $p = 582$ Pfund, alſo iſt der vollſtändige Werth $p + \varphi = 627$ Pf.

Nun hat man ferner $\frac{h}{r} = \frac{5}{3} : \frac{17}{2} = \frac{10}{51}$, und $\frac{\vartheta}{t} = \frac{12}{5}$, alſo $\frac{h}{r} . \frac{\vartheta}{t} = \frac{24}{51}$; weil überdem $\sqrt{(1 + \mu^2)} = \frac{19}{18}$ iſt, ſo wird

$$P = \tfrac{24}{51} . \tfrac{19}{18} . 627 = \frac{4 . 19}{51 . 3} 627 = 312 \text{ Pf.}$$

Um endlich noch ψ zu finden, erwege man, daß die Zapfen der Mühlwelle erſtlich den verticalen Druck N, und hiernächſt den horizontalen Druck $P + \psi$ leiden. Was den Druck zwiſchen den Zähnen des Sternrades und den Stöcken des Trillings betrift, ſo iſt zu bemerken, daß derſelbe an der einen Seite vertical unterwärts, an der andern Seite aber vertical aufwärts gerichtet ſey, und daß beyde Preſſungen beynahe gleich groß ſind. Der unterwärts gerichtete Druck übertrift den aufwärts gerichteten ohngefehr um 7 Pfund, und ſo groß iſt der Druck, welcher daher auf die Zapfen entſteht. Der geſamte verticale Druck beträgt alſo 3607 Pfund, und der horizontale iſt $P + \psi$. Ich will jenen $= Y$ ſetzen, ſo entſteht aus beyden der mittlere $\sqrt{(Y^2 + (P + \psi)^2)}$, und es wird $r\psi = \mu k \sqrt{(Y^2 + (P + \psi)^2)}$, oder $r^2 \psi^2 = \mu^2 k^2 (Y^2 + (P + \psi)^2)$; alſo erhält man

$$\psi = \frac{\mu^2 k^2 P + \mu k \sqrt{(r^2 P^2 + (r^2 - \mu^2 k^2) Y^2)}}{r^2 - \mu^2 k^2}.$$

Läſt man auch hier dasjenige weg, was in $\mu^2 k^2$ multi-

multiplicirt iſt, ſo hat man $\psi = \frac{\mu k}{r}\sqrt{(P^2+Y^2)}$, und man findet $\sqrt{(P^2+Y^2)} = 3620$ Pfund, $\frac{\mu k}{r} = \frac{1}{408}$, alſo $\psi = 9$ Pf., und $P+\psi = 321$ Pf. Oben im 571 §. iſt der Waſſerſtoß zu 324,8 Pfund berechnet, und beyde Zahlen kommen einander ſo nahe, als man es bey dieſer Art Unterſuchungen immer erwarten kan.

580 §.

Wenn man die im 571 §. angegebene Geſchwindigkeit des Waſſers mit der Geſchwindigkeit der Schaufeln des Waſſerrades vergleicht, ſo ergiebt ſich, daß die bisher betrachtete Pulvermühle einen noch gröſſern Effect leiſten, und mehr Stämpfer führen könnte. Weil die Geſchwindigkeit des Waſſers 20 Fuß in einer Secunde beträgt, ſo müſten die Schaufeln nur mit einer Geſchwindigkeit von $\frac{1}{3}.20 = 6\frac{2}{3}$ Fuß in einer Secunde umlaufen (113 §.): ihre Geſchwindigkeit beträgt aber $9\frac{1}{3}$ Fuß. Wäre alles der Vorſchrift des 113 §. gemäß eingerichtet, ſo würde die relative Geſchwindigkeit des Waſſers $\frac{2}{3}$ der wahren Geſchwindigkeit deſſelben, und die zugehörige Höhe $\frac{4}{9}$ des lebendigen Gefälles betragen. Dies Gefälle war $\frac{969}{144}$ Fuß, und die Fläche der Schaufeln 2,5 Quad. Fuß; demnach wäre die Kraft des Waſſerſtoſſes $= \frac{4}{9}.\frac{969}{144}.2,5.70 = 523,3$ Pfund. Wollte man nun die übrige Einrichtung der Mühle behalten, ihr aber mehr oder ſchwerere Stämpfer geben, ſo würde das geſamte Gewicht aller Stämpfer, die ſie führen kan, ſo geſucht werden müſſen.

581 §.

581 §.

Der Druck des Waſſers gegen die Schaufeln ſey $=V$, der Theil davon, welcher zur Ueberwindung der Friction an den Zapfen der Mühlwelle erfordert wird, $=\psi$, und $V-\psi=P$, alſo $V=P+\psi$; ſo muß P mit dem Druck zwiſchen den Zähnen des Sternrades und den Triebſtecken, nebſt der daſelbſt vorfallenden Friction im Gleichgewicht ſeyn. Dieſer Druck ſey $=X$, ſo hat man $P=\frac{\varrho}{r}X\surd(1+\mu^2)$ oder $P=\frac{h}{n}\cdot\frac{\vartheta}{t}\cdot X\surd(1+\mu^2)$, weil $\varrho=\frac{h.\vartheta}{t}$ iſt. Der Druck X vertheilt ſich zu beyden Seiten des Sternrades, ſo daß auf der einen Seite der eine Theil vertical unterwärts, der andre auf der andern Seite vertical aufwärts gerichtet iſt. Dafern nun des erſten Ueberſchuß über den letzten $=D$, und das Gewicht der Mühlwelle mit beyden daran befindlichen Rädern $=N$ iſt, ſo leiden die Zapfen der Mühlwelle den horizontalen Druck $P=V-\psi$, und den verticalen Druck $N+D$, da dann aus beiden der mittlere Druck $\surd((V-\psi)^2+(N+D)^2)$ entſteht, und man erhält, vermöge des 579 §, $\psi=\frac{\mu k}{r}\surd((V-\psi)^2+(N+D)^2)$. Dieſe Gleichung würde ψ geben, wenn D bekannt wäre. Wenn man aber aus der Rechnung des 579 §. noch nicht wüſte, daß D nur wenige Pfunde betrüge, ſo würde man dies ohnehin daher ermeſſen können, weil der Widerſtand, welchen das Stern-

rad antrift, ſonſt auf beiden Seiten gleich iſt, und die ganze Ungleichheit nur daher rührt, weil die Friction an den Zapfen der Daumenwelle auf der einen Seite etwas geringer, als auf der andern iſt. Deswegen kan man D beyſeit ſetzen, und $\psi = \frac{\mu k}{r} \surd ((V - \psi)^2 + N^2)$ annehmen, zumal da ſich N ſo ganz genau nicht in Anſchlag bringen läſt. Schaft man das Wurzelzeichen weg, ſo komt man auf eine Quadratiſche Gleichung, woraus ψ gefunden wird. Weil man indeſſen ſchon zum voraus weiß, daß ψ nicht ſonderlich groß ausfallen kan, ſo läſt ſich dieſe etwas weitläuftige Rechnung verkürzen, wenn man anfangs $\psi = \frac{\mu k}{r} \surd (V^2 + N^2)$ annimmt, und hiernächſt den auf dieſe Art gefundenen Werth von ψ unter dem Wurzelzeichen braucht. Alsdenn giebt die Rechnung $\psi = \frac{1}{408} \surd (523^2 + 3600^2) = 9$ Pfund, und dieſer Werth ändert ſich nicht merklich, wenn man bey wiederholter Rechnung die Zahl $523 - 9 = 514$ Pf. ſtatt V braucht. Man erhält demnach ferner $X = \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{1}{\surd (1 + \mu^2)} (V - \psi) = \frac{17}{8} \cdot \frac{18}{19} \cdot 514 = 1035$ Pf. Nun muß man annehmen, daß von dieſer Kraft die Hälfte an jedem der beiden Trillinge angebracht ſey. Wenn alsdenn derjenige Theil, welcher zur Ueberwindung der Friction an den Zapfen der Daumenwellen erfordert wird, mit φ bezeichnet, und $\frac{1}{2} X - \varphi = p$ geſetzt wird, ſo hat man $\varphi = \frac{\mu k}{h} \surd (Y^2 + \mu^2 Z^2)$

(579

(579 §.), und $Y = M + Z + p$. (Für denjenigen Trilling, deſſen Stöcke von den Zähnen des Sternrades aufwärts gedrückt werden, wäre p negativ.) Ueberdem iſt $Z = \frac{\eta}{\sin\eta + \mu\,\sin v\eta}.p$, und wenn man dieſen Werth ſtatt Z, ſo wie $\frac{1}{2}X - \varphi$ ſtatt p, und Kürze halber λ ſtatt $\frac{\eta}{\sin\eta + \mu\,\sin v\eta}$ ſetzt, ſo erhält man $\varphi = \frac{\mu k}{h}\sqrt{((M + (\lambda + 1)(\frac{1}{2}X - \varphi))^2 + \mu^2\lambda^2(\frac{1}{2}X - \varphi)^2)}$. Aus dieſer Gleichung würde man φ finden: man kan aber die Rechnung auf ähnliche Art wie vorhin abkürzen, und anfangs $\frac{1}{2}X$ ſtatt $\frac{1}{2}X - \varphi$ brauchen, und den auf ſolche Art gefundenen Werth von φ nächſtdem weiter berichtigen. Auf dieſem Wege findet man $\varphi = 31$ Pfund. Dies giebt $\frac{1}{2}X - \varphi = 487$ Pf., und $Z = \lambda(\frac{1}{2}X - \varphi) = 1{,}014 . 487 = 494$ Pf. Soll nun die Einrichtung in aller Abſicht die vortheilhafteſte ſeyn, ſo müſſen die Stämpfer und Scheldelatten nach der Regel des 575 §. angeordnet werden, und alsdenn iſt $Z = \frac{1}{1 - \mu^2}.nQ$, alſo $nQ = (1 - \mu^2)Z = \frac{8}{9}Z = 439$ Pf. Soll ferner $n = 4$ bleiben, ſo findet man $Q = 109$ Pf.; und ſo ſchwer könnte jeder Stämpfer ſeyn ſtatt 65 Pf. Weil aber das Gewicht von 65 Pf. für einen Stämpfer groß genug iſt, ſo ſuche man, wie groß n ſeyn könne, wenn die Stämpfer ohngefehr eben ſo ſchwer bleiben ſollen. Nimmt man $n = 6$, ſo kan jeder Stämpfer 73 Pf. ſchwer ſeyn. Jede Daumenwelle kan demnach 6

Q 2 ſtatt

ſtatt 4 Stämpfer zu gleicher Zeit heben, und jeder Stämpfer kan doch noch 8 Pf. ſchwerer ſeyn, als bey der Mühle zu la Fere. Bliebe alſo der Erhebungswinkel $\eta = 60^\circ$; ſo müßten die Ebenen durch die Daumen, und die Axe der zugehörigen Welle einander unter Winkeln von 15 Graden ſchneiden, und jede Welle würde 36 ſtatt 24 Stämpfer führen.

582. §.

Um jedoch die Würkung einer ſolchen Mühle mit der Mühle zu la Fere genauer zu vergleichen, muß man wiſſen, wie viel Schläge die Stämpfer in gegebener Zeit z. E. einer Stunde thun würden. Bey der Mühle zu la Fere läuft das Waſſerrad in einer Minute $10\frac{1}{2}$ mahl, alſo jede Daumenwelle in eben der Zeit $10\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} = 25,2$ mahl um. Binnen einer Stunde läuft demnach jede Daumenwelle 1512 mahl um, und binnen der Zeit ſchlägt jeder Stämpfer doppelt ſo viel mahl nieder. Bey der im vor. §. angegebenen Einrichtung wäre die Geſchwindigkeit der Schaufeln $= 6,72$ Fuß, der Umfang des Waſſerrades $= 53,4$ Fuß, alſo die Umlaufszeit $\frac{53,4}{6,72} = 7,946$ Sec., und die Zahl der Umläufe in einer Stunde $= \frac{6,72}{53,4} \cdot 3600 = 453$. Demnach läuft die Daumenwelle $453 \cdot \frac{12}{5} = 1087$ mahl um, und es verhält ſich beynahe $1087 : 1512$ wie $5 : 7$. Bey der Mühle zu la Fere ſchlägt alſo jeder Stämpfer binnen der Zeit 7 mahl nieder, worin jeder Stämpfer nur 5 mahl niederſchlagen würde, wenn die Anordnung nach dem vor. §. gemacht wäre.

re. Weil aber die Mühle nach der letzten Anordnung $1\frac{1}{2}$ mahl ſo viel Stämpfer, als die Mühle zu la Fere führen würde, ſo ſchlieſt Hr. Belidor (a. a. O. 727 §.) daraus, es ſey das Verhältniß der Effecte $= 5 \times 3 : 7 \times 2 = 15 : 14$. Man muß von der Pulvermacher-Arbeit einige Kenntniß haben, wenn man von dem Effect einer ſolchen Maſchine gehörig urtheilen will: und dafern die Mühle zum Oelſtampfen, oder noch andern dergleichen Abſichten beſtimmt iſt, ſo werden ähnliche Kenntniſſe von denjenigen Sachen erfordert, welche die Mühle zubereiten ſoll. Eine Art der Arbeit erfordert ſchwerere Stämpfer, als die andre, und ſchwerere Stämpfer können nicht wohl ſo ſchnell ſpielen, als leichtere. Wenn ich annehme, daß die Stämpfer bey der Mühle zu la Fere ſo ſchnell ſpielen, als es bey einer Pulvermühle ohngefehr am vortheilhafteſten iſt, ſo läſt ſich die Anordnung des vor. §. leicht ſo verändern, daß die Stämpfer eben ſo ſchnell ſpielen. Bey der Mühle zu la Fere iſt die Umlaufszeit des Waſſerrades $\frac{60}{10\frac{1}{2}} = 5{,}714$ Sec., und die Umlaufszeit der Daumenwelle $= \frac{5}{12} \cdot 5{,}714 = 2{,}4$ Sec. Wenn aber das mechaniſche Moment des Waſſerſtoſſes am gröſten ſeyn ſoll, ſo wird die Umlaufszeit des Waſſerrades $= 7{,}9916$ Sec., oder beynahe 8 Sec. Soll nun hier die Umlaufszeit der Daumenwelle auch 2,4 Sec. betragen, ſo hat man $\frac{\vartheta}{t} = \frac{80}{24} = 3\frac{1}{3}$. Man gebe alſo dem Sternrade 66 ſtatt 48 Zähne, ſo wird der Durchmeſſer deſſelben $e = \frac{66}{48} \cdot 4 = 5\frac{1}{2}$ Fuß, und man erhält ſtatt der Zah-

 len

len des vor. §. folgende. Es wird $X = \frac{4}{5\frac{1}{2}} 1035 = 756$ Pf., $\varphi = 30$ Pf., $\frac{1}{2}X - \varphi = 345$ Pfund, und $Z = \lambda(\frac{1}{2}X - \varphi) = 350$ Pfund; alſo $nQ = \frac{8}{9} . 350 = 311$ Pfund. Nimmt man $n = 5$, ſo wird $Q = 62$ Pf., und obgleich die Stämpfer bey der Mühle zu la Fere 65 Pf. ſchwer ſind, ſo wird es doch auf den geringen Unterſcheid von 3 Pf. wohl nicht ankommen. Statt 4 Stämpfer könnte alſo die Mühle füglich 5 ohngefehr eben ſo ſchwere Stämpfer führen, die eben ſo ſchnell ſpielen, und daraus ſiehet man deutlich, daß der würkliche Effect der Mühle zu la Fere ſich zu dem gröſten Effect, den ſie leiſten könnte, wie 4 zu 5 verhalte. Werden alſo auf der Mühle zu la Fere binnen 24 Stunden 480 Pf. Pulver gemacht, ſo könnten bey veränderter Einrichtung binnen eben der Zeit 600 Pf. verfertiget werden. Und wofern, wie Hr. Belidor a. a. O. 727 §. glaubt, durch öftere Umſetzung des Pulverzeuges aus einer Grube in die andre dieſe Menge um die Hälfte vermehrt werden kan, ſo würden binnen 24 Stunden 900 Pfund verfertiget werden können.

Der XLII. Abſchnitt.

Theorie der Holz-Säge-Mühlen.

583. §.

Wer es angeſehen hat, auf welche Art ein paar Zimmerleute vermittelſt einer groſſen Säge, die ſie wechſelsweiſe auf und nieder ziehen, aus einem Holz-Stamm Bretter ſchneiden, der wird ſich leicht einen Begrif davon machen können, worauf überhaupt die mechaniſche Einrichtung einer Holz-Säge-Mühle beruhe. Wenn der Stamm, dem vorher durch die Zimmer-Axt ſchon die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi gegeben iſt, durch Menſchen ohne Hülfe einer Maſchine blos vermittelſt einer Säge zerſchnitten wird, ſo liegt der Baum, oder der ſogenannte Block, auf zweyen Böcken horizontal, und zwar in einer ſolchen Höhe, daß der eine Arbeiter unter demſelben aufrecht ſtehen kann. Der andre Arbeiter ſteht alsdenn oben auf dem Block, und beide ſetzen die Säge nicht allein in eine verticale Bewegung, die eigentlich zum Zerſchneiden des Holzes erfordert wird; ſondern rücken zugleich mit der Säge nach der Länge des Stammes weiter fort, ſo wie die Säge nach und nach in das Holz tiefer einſchneidet. Die verticale auf und abwärtsgehende Bewegung kan man der Säge ohne groſſe Schwierigkeit vermittelſt einer Maſchine mittheilen: allein es würde mehr Umſtände machen, wenn die Maſchine der Säge auch die horizontale Bewegung nach der Länge des Stammes mittheilen ſollte. Deswegen

gen

gen läſt man in einer Sägemühle die Säge blos vertical auf und nieder ſpielen, und macht übrigens die Einrichtung ſo, daß der Baum nach horizontaler Richtung der Säge entgegen rückt. Wenn auf ſolche Art der Baum nach ſeiner ganzen Länge durchſchnitten iſt, und der Widerſtand aufhört, welchen das Holz bis dahin der Bewegung der Säge entgegen geſetzt hat; ſo würde von dieſem Augenblick an die Maſchine mit weit gröſſerer Schnelligkeit umlaufen, wenn nicht die Einrichtung ſo gemacht würde, daß ihre Bewegung alsdenn aufhören müſte. Dies iſt demnach der dritte Umſtand, worauf man bey Erbauung einer Säge-Mühle Rückſicht nehmen muß, damit bey ſo ſchneller Bewegung der Maſchine, die widrigenfalls erfolgen würde, nicht ein oder der andre Theil davon Schaden leide.

584 §.

20 Fig. Die verticale Bewegung der Säge wird auf folgende Art zuwege gebracht. An der Welle AB des Waſſerrades befindet ſich ein Sternrad C, das in den Trilling D greift, und an der Welle dieſes Trillings befindet ſich die Kurbel E, welche die Säge OP auf eine ähnliche Art auf- und abwärts ſchiebt, wie man ſich bey Pumpenkünſten der Kurbel bedient, vermittelſt der Kolbenſtange den Kolben auf- und abwärts zu treiben. Die Säge iſt nemlich in dem ſo genannten Sägegatter FG befeſtiget, welches in den Falzen oder Nuthen der lothrecht ſtehenden Gatterſäulen HI, KL, auf- und abwärts beweglich iſt. Am unterſten Querriegel des Sägegatters iſt in der Mitte vermittelſt einer eiſernen Gabel M, durch welche ein Bolzen geſteckt wird, der ſogenann-

te Lencker MN (eine eiſerne Stange) befeſtiget; am andern Ende hängt dieſer Lencker mit der Kurbel E zuſammen, und zwar vermittelſt eines Ringes, durch welchen die Kurbel durchgehet. Bey jedem Umlauf der Kurbel wird alſo das ganze Gatter mit der lothrecht darin befeſtigten Säge einmal auf und nieder geſchoben. Auf der andern Seite der Mühlwelle liegt noch ein Trilling, um deſſen Welle QR ein Seil gewunden iſt, vermittelſt deſſen das zum Sägen beſtimte Holz herbey gezogen werden kann. Weil derſelbe nur zu dieſem Gebrauch allein dienen ſoll, ſo wird die Einrichtung ſo gemacht, daß man ihn zurück legen und von den Zähnen des Sternrades entledigen kan, wenn die Säge arbeiten ſoll.

585 §.

Um den Block, welchen die Säge zerſchneiden ſoll, die horizontale Bewegung zu geben, dienet folgende Einrichtung. Auf dem Brett-Boden der Mühle werden zwey horizontal und einander parallel liegende mit Falzen oder Nuthen verſehene Straßbäume befeſtiget. Auf ſelbige wird ein Gatter, der ſo genannte Klotzwagen gelegt, und in die Falzen der Straßbäume ſo eingefuget, daß er ſich auf denſelben vor- und rückwärts ſchieben läſt. An beiden Enden des Klotzwagens befinden ſich die Ruhe-Schemel, wovon der eine beweglich iſt und verſchoben werden kan, um ihn nach Beſchaffenheit der Lage des zu zerſchneidenden Klotzes von dem andern zu entfernen, daher er auch der Richt-Schemel, oder Rück-Schemel heiſt. Auf dieſe beiden Schemel wird der Block gelegt, und gehörig befeſtiget. Unter dem Klotzwagen liegt eine Welle, und dieſe

iſt mit zweyen gleich groſſen Trillingen verſehen, ſo daß unter jedem der beiden Bäume des Klotzwagens einer von dieſen Trillingen liegt. Dieſe Bäume ſind mit Zähnen oder Kämmen beſteckt, welche zwiſchen die Stecken der erwehnten Trillinge greifen, ſo daß die Trillinge, wenn die dazu gehörige Welle umläuft, den Klotzwagen mit dem darauf liegenden Block fortſchieben. Zur Verringerung der Friction wird jeder Wagenbaum von metallenen Rollen getragen, die an demſelben von 4 zu 4 Füſſen ausgetheilt ſind, 4 Zoll im Durchmeſſer haben, und ein Zoll dick ſind: ihr Polzen iſt ½ Zoll dick. Um auch die Friction an den Seitenflächen der Wagenbäume gegen die Falzen der Straßbäume zu vermindern, macht man noch in den nehmlichen Wagenbäumen verſchiedene Seitenrollen, die horizontal umlaufen, im Durchmeſſer 3 Zoll halten, und 1 Zoll dick ſind. Die Welle mit den Trillingen wird auf folgende Art mit der Säge zugleich in Bewegung geſetzt.

586 §.

24 Fig. An der Welle dieſer Trillinge bringt man auf einer Seite des Klotzwagens ein ſo genanntes Sperr-Rad C an, deſſen Zähne die in der Zeichnung vorgeſtellte zackenförmige Geſtalt haben, und dies Rad wird vermittelſt der Stoßſtange DH, die am äuſſern Ende H Klauenförmig geſtaltet iſt, und zwiſchen die Zacken des Sperr-Rades eingreift, auf folgende Art in Bewegung geſetzt. Seitwärts des Sägegatters liegt die Welle E, woran ein Hebelsarm EF befeſtiget iſt, der ſich von E bis oberhalb des Sägegatters G erſtreckt. Am äuſſern Ende deſſelben F wird dieſer Hebel EF vermittelſt der

Lenkſtange FG mit dem obern Quer-Riegel des Säge-Gatters bey G (man vergleiche die 20 Fig.) verbunden, und dieſe Lenkſtange muß bey G und F mit einem Ringe und Zapfen verſehen ſeyn, damit ſie ſich auf die Seite legen kan, wenn das Säge-Gatter ſteigt, und den Hebel EF in die Lage E*f* bringt. Mit der Welle E iſt ein andrer kurzer Arm ED verbunden, der mit EF einen gefälligen Winkel einſchlieſſen kan; mit dieſem Arm ED wird bey D die Stoßſtange DH ſo verbunden, daß ſie ſich um D frey drehen kan. Wenn nun das andre Ende der Stoßſtange auf dem Sperrade gegen den Zahn H liegt, und das Sägegatter ſteigt in die Höhe, ſo drehet es vermittelſt der Lenkſtange GF die Welle, und indem EF in die Lage E*f* kommt, rückt ED in die Lage EC, der Winkel EDH verwandelt ſich in ECH, und DH kommt in die Lage CI. Hiedurch wird der Zahn des Sperr-Rades, der vorhin in H war, bis I fortgeſtoſſen. Wenn ſich nun das Sägegatter wieder ſenkt, ſo kommt alles in die vorige Lage, das Ende I der Stoßſtange rückt zurück nach H, und faßt einen neuen Zahn des Sperr-Rades, der beym wiederholten Steigen des Sägegatters vorwärts geſtoſſen wird. Mit dem Sperr-Rade drehen ſich alsdenn jedesmal die an der Axe deſſelben befindlichen Trillinge, und ſchieben den Klotzwagen ein wenig vorwärts.

Wenn durch den Umtrieb des Sperr-Rades der Klotzwagen um die ganze Länge des Blocks fortgeſchoben iſt, und das Ende deſſelben bey dem Sägegatter anlangt, ſo wird die Bewegung der Maſchine auf folgende Art gehemmet. Mit dem Schutzbrett vor dem Gerinne des Waſſerrades iſt ein Hebebaum

bebaum verbunden, wovon der eine Arm ſich bis in die Mühle hinein erſtreckt. Am Ende dieſes Arms wird ein Strick gebunden, woran ein Ring befeſtiget iſt, den man über einen in einer von den Falz-Säulen des Sägegatters angebrachten Klinkhaaken hängt. Am hintern Ruhe-Schemel des Klotzwagens iſt ein eiſerner Bolzen geſchlagen, der bey ſeiner Annäherung an den Klinkhaaken ſtößt, und den Ring löſet. Sobald dies erfolgt, fällt das Schutzbrett nieder, weil die Einrichtung vermittelſt eines angehängten Gewichts ſo gemacht iſt, daß auf der Seite des Hebebaums, wo das Schutzbrett angehängt iſt, das Uebergewicht ſehr ſtark iſt.

587 §.

Man wird aus dieſer kurzen Beſchreibung der hauptſächlichſten Stücke einer Sägemühle ſchon abnehmen, daß dies eine ziemlich zuſammen geſetzte Maſchine ſey, deren genaue Berechnung mancherley Schwierigkeiten hat. Deſſen zu geſchweigen, daß dabey viele unvermeidliche Frictionen vorfallen, beſtehet die vornehmſte Schwierigkeit darin, eine ſichere Regel ausfindig zu machen, wonach der Widerſtand gefunden werden kann, den das Holz der Bewegung der Säge entgegen ſetzet. Die Gröſſe dieſes Widerſtandes hängt nicht allein von der Feſtigkeit des Holzes, ſondern auch von der Geſtalt und Einrichtung der Säge ſelbſt ab, und der Art, wie ſie in das Holz würkt. So viel weiß jedermann, daß die Säge mit ſpitzigen Zacken oder Zähnen verſehen iſt, welche die Faſern des Holzes zerreiſſen müſſen, wenn die Säge hinein ſchneiden ſoll. Die Säge wird in ſolcher Abſicht vor- und rückwärts,

oder

oder auf- und niederwärts gezogen, zugleich aber etwas gegen das Holz gedruckt. Wenn die Säge nur eine einfache Reihe von Zähnen hat, ſo ſchneidet ſie nur wechſelsweiſe in das Holz ein, und der ſo genannte Rückzug hat keinen Effect. Die groſſen Zimmerſägen haben doppelte Zähne, und jeder Zug ſchneidet tiefer ein. Indeſſen braucht man in den Sägemühlen, ſo viel ich weiß, ſolche Sägen nicht, die doppelt ſchneiden, ſondern der Schnitt geſchicht, indem das Sägegatter abwärts ſinkt, und die Säge arbeitet gar nicht, wenn das Gatter wieder hinauf ſteigt. Um nun einigermaſſen zu überſehen, wie die Säge würkt, ſtelle man ſich zuerſt nur einen Zahn der Säge allein vor, deſſen Würkung darin beſteht, daß er die Fibern des Holzes zerreiſſt, und in demſelben einen Riß von beſtimmter Tiefe macht. Man ſiehet wohl, daß die Gewalt, womit das Holz dieſem Zahn widerſtehet, 1.) von der Feſtigkeit des Holzes, 2.) von der Dicke des Zahns, und 3.) von der Tiefe, um welche der Zahn in das Holz eindringt, abhänge. Damit aber alle Zähne der Säge auf einerley Art in das Holz würken, muß die Säge, wenn ſie, wie bey Sägemühlen gewöhnlich iſt, vertical auf und nieder ſpielen ſoll, folgende Einrichtung haben.

588. §.

Es ſey ABDC die Säge, und AC eine verticale Linie in ihrer Fläche, BD die grade Linie, worin die Spitzen von den Zähnen der Säge liegen. 21 Fig. Dafern dieſe Linie BD mit AC parallel wäre, ſo würde nur allein der unterſte Zahn B in das Holz einſchneiden können, und alle übrige Zähne würden durch

durch den ſchon gemachten Riß ungehindert durchgehen. Weil dies der Abſicht entgegen iſt, und alle übrige Zähne unnöthig machen würde, ſo ſetzt man die Zähne ſo, daß ihre Spitzen in eine grade Linie BD fallen, die unterwärts der Verticallinie AC immer näher kommt, alſo aufwärts ſich immer weiter davon entfernt. Bey einer ſolchen Einrichtung ſinkt jeder Zahn in einer eigenen Verticallinie, und weil alle Zähne einander gleich und ähnlich gemacht werden, ſo iſt der Unterſcheid der Entfernung der Spitzen zweyer zunächſt auf einander folgenden Zähne von AC durchgängig einerley. Demnach kan nun jeder folgende Zahn einen eben ſo tiefen Riß, als der nächſtvorhergehende in das Holz einſchneiden. Es ſey der Spitze des unterſten Zahns B Entfernung $AB = k$, und des nächſtfolgenden Entfernung $= k + \alpha$, ſo ſind $k + 2\alpha$, $k + 3\alpha$ ..... die Entfernungen der Spitzen des dritten, vierten Zahns, u. ſ. f. und wenn die Anzahl aller Zähne $= n$ iſt, ſo wird die Entfernung der Spitze des höchſten Zahns $= k + (n - 1)\alpha$. Die ganze verticale Länge AC der Säge ſey $= f$, ſo erhellet, daß die Linie BD gegen die Verticallinie unter einem Winkel geneigt ſey, deſſen Tangente $= \frac{(n-1)\alpha}{f}$ iſt. Setzt man dieſen Winkel $= \zeta$, ſo hat man $\text{tang}\,\zeta = \frac{(n-1)\alpha}{f}$: alsdenn wird die Tiefe, um welche jeder Zahn ins Holz einſchneidet, nemlich $\alpha = \frac{f\,\text{tang}\,\zeta}{n-1}$; und wofern die Säge um ihre ganze Länge AC auf und niederſpielt, ſo iſt

die

die Tiefe, um welche ſie bey jedem Zuge ins Holz einſchneidet, $= n\alpha = \frac{nf\,tang\zeta}{n-1}$. Gewöhnlich iſt die Zahl der Zähne ziemlich groß, ſo daß beynahe $\frac{n}{n-1} = 1$ angenommen werden kann, und in dieſer Vorausſetzung wird $n\alpha$ beynahe $= f\,tang\zeta$.

589 §.

Wenn man annimmt, daß ein Stamm von einer gewiſſen Art Holz durchgängig von gleicher Feſtigkeit ſey, ſo wird ein einzelner Zahn eben ſo viel Widerſtand leiden, als jeder andre. Es ſey für jeden Zahn der Widerſtand $= \varrho$, und die Anzahl der Zähne, die zugleich einſchneiden, $= \nu$, ſo iſt der geſamte Widerſtand des Holzes $= \nu\varrho$. Man nehme an, daß PQ die Dicke des Holzes ſey, ſo ſchneiden ſo viele Zähne zugleich ein, als zwiſchen den durch P und Q laufenden Horizontallinien liegen. Wenn demnach PQ $= z$ geſetzt wird, ſo hat man $\nu = \frac{nz}{f}$, und der Widerſtand des Holzes iſt $= \frac{nz}{f}\cdot\varrho$. Vorhin war $n\alpha = f\,tang\zeta$, alſo wird $\frac{n}{f} = \frac{tang\zeta}{\alpha}$, und der Widerſtand $= \frac{z\,tang\zeta}{\alpha}\varrho$. Setzt man endlich $f\,tang\zeta = c$, alſo $tang\zeta = \frac{c}{f}$, ſo wird derſelbe Widerſtand

$= \frac{\mathfrak{C}}{\alpha} \cdot \frac{z}{f} \cdot \varrho$. Bey einerley Feſtigkeit des Holzes iſt ϱ einerley, ſo lange α einerley iſt: und wenn allemahl eine gleiche Anzahl Zähne in das Holz einſchneidet, ſo iſt auch $\frac{z}{f} = \frac{\nu}{n}$ einerley, und die Säge leidet beſtändig einerley Widerſtand. Wenn indeſſen die Säge nach ihrer ganzen Länge von Anfang bis zu Ende das Holz durchſchneiden ſoll, ſo wird der Widerſtand nicht beſtändig einerley ſeyn, ſondern anfangs wachſen, ferner eine zeitlang einerley bleiben, und hiernächſt wieder abnehmen. Man ſetze, das Sägegatter werde ſo hoch gehoben, daß es erſtlich um eine gewiſſe Tiefe wieder fallen muß, bevor der unterſte Zahn das Holz trift, ſo wird im erſten Augenblick, da dies erfolgt, nur allein der unterſte Zahn, und ſodann nach und nach immer mehrere in das Holz einſchneiden. Dies wird ſo lange ſo fortgehen, bis der unterſte Zahn unten aus dem Holz wieder hervor tritt. Verſteht man nun durch z die Höhe des Zahns, welcher jetzt in das Holz einſchneidet, über den unterſten Zahn, und durch ν die Anzahl der zugleich ſchneidenden Zähne, ſo iſt nun $\nu = \frac{nz}{f}$ veränderlich, und der geſamte Widerſtand bleibt zwar $= \frac{\mathfrak{C}}{\alpha} \cdot \frac{z}{f} \cdot \varrho$, er wächſt aber mit z. Von dem Augenblick an, da der untere Zahn heraus tritt, bis dahin, da der obere Zahn D ins Holz eindringt, bleiben ν und z unveränderlich, und es iſt alsdenn z mit der Dicke des Holzes

einer=

einerley: der Widerſtand ſelbſt ändert ſich ſo lange ebenfalls nicht. Von dem Augenblick aber, da der letzte Zahn D oben ins Holz eindringt, werden y und z wieder veränderlich, ſie nehmen ab, und mit ihnen der geſamte Widerſtand $\frac{c}{\alpha} \cdot \frac{z}{f} \cdot \varrho$, der alsdenn überall verſchwindet, wenn $z = 0$ wird, d. i. wenn der letzte Zahn unten aus dem Holz austritt.

590 §.

Es ſcheinet, daß es nicht nöthig ſey, dieſe drey Zeit-Perioden bey jedem Schnitt der Säge zu unterſcheiden, wenn die Mühle die im 584 §. beſchriebene Einrichtung hat. Die Säge wird von der Kurbel nicht ſo hoch gehoben, daß der unterſte Zahn anfangs allein in das Holz einzuſchneiden anfängt: auch wird die Säge nicht ſo tief herunter gezogen, daß der oberſte Zahn ganz durch das Holz hindurch gehen, und die unterſte Grenze deſſelben erreichen kan. Gewöhnlich iſt die ganze Länge der Säge um ein beträchtliches gröſſer, als die Höhe, um welche ſie auf und nieder ſpielt, und es ſchneiden beſtändig ſo viele Zähne zugleich in das Holz ein, als an einem Theil der Säge befindlich ſind, deſſen Länge der Dicke des Holzes gleich iſt. Wenn dieſe Dicke $= b$ iſt, ſo wird die Anzahl der zugleich ſchneidenden Zähne $= \frac{nb}{f}$. Es giebt indeſſen auch einige Arten von Sägemühlen, worin die Säge ſtatt der Kurbel vermittelſt einiger an der Mühlwelle befindlichen Daumen eben ſo gehoben wird, wie die Stämpfer in einer Stampfmühle gehoben werden. Das Sä-

gegatter iſt alsdenn unten ſtatt des Lenkers mit einem hinlänglich ſtarken vertical daran hängenden Holz feſt verbunden, und an demſelben iſt wie bey Stämpfern ein ſtarker Hebezapfen angebracht, den die Daumen an der Mühlwelle bis auf eine gewiſſe Höhe heben, und wieder fallen laſſen. Weil die Daumen hier wegen des beträchtlich groſſen Gewichts des Sägegatters ſtärker, als in gewöhnlichen Stampfmühlen ſeyn müſſen; ſo werden zwey Zapfen wie Hebedaumen neben einander geſetzt, und man füget die vorderſten Enden mittelſt eines dritten Holzes, das mit der Axe der Mühlwelle parallel liegt, zuſammen. Eine nähere Beſchreibung davon giebt Belidor in der Architect. Hydraul. 709 §. Bey dieſer Anordnung kommt die Maſchine der Bewegung der Säge, wenn ſie in das Holz einſchneidet, gar nicht zu Hülfe, und es iſt ſonſt keine Kraft vorhanden, welche die Säge durch das Holz treibt, als allein das Gewicht des Sägegatters. Es ſcheint, daß Hr. Euler in ſeiner Abhandlung Sur l'action des Scies, welche in der Hiſtoire de l'Acad. de Berlin A. 1756. p. 267 ſqq. abgedruckt iſt, vornemlich auf dieſe Art von Sägemühlen Rückſicht genommen habe. Wenn man mit ihm die Vorausſetzung annimt, daß die Säge jedesmal nach ihrer ganzen Länge durchſchneiden müſſe; ſo wird es nothwendig, von den im vor. §. unterſchiedenen dreyen Zeit-Perioden bey jedem Sägeſchnitt eine jede beſonders zu betrachten, da dann in der erſten und dritten Periode der Widerſtand, welchen die Säge leidet, veränderlich, in der mittlern aber von beſtändiger Gröſſe iſt. Man kan alsdenn das Sägegatter als eine körperliche Maſſe betrachten, die von ihrem eigenen Gewicht

beſchleu-

beſchleuniget, von dem Widerſtande aber, den das Holz der Säge entgegen ſetzt, verzögert wird, da dann vermittelſt der Fundamental-Gleichungen der Mechanik (117 §. Mechan.) die Geſchwindigkeit der Säge für jeden Theil ihres zurück gelegten Weges, nebſt der verfloſſenen Zeit, gefunden werden kan. Hr. Euler hat in der angeführten Abhandlung auf dieſe Art die Unterſuchung über die Würkung der Sägen angeſtellet, und ich werde hier zur Probe einige dahin gehörige Aufgaben vortragen.

591 §.

Die Geſtalt und Gröſſe der Säge, nebſt dem Gewicht Q des Sägegatters, und der Widerſtand, den jeder einzelne Zahn leidet, ſind gegeben; überdem iſt noch am Sägegatter eine äuſſere unveränderliche Kraft $= K$ angebracht, die daſſelbe abwärts zieht: man ſucht die Geſchwindigkeit der Säge, nachdem der vorderſte Zahn B um eine gegebene Tiefe $GB = z$ eingedrungen iſt. 22 Fig.

Aufl. Man ſetze die der geſuchten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= v$, und behalte übrigens die Bezeichnungen des vor. §. bey; ſo wird der Widerſtand, welchen die Säge leidet, $= \frac{c\varrho}{\alpha} \cdot \frac{z}{f}$: und wenn man, um abzukürzen, den Factor $\frac{c\varrho}{\alpha . f} =$ N ſetzt, ſo iſt der Widerſtand $=$ Nz, alſo die dadurch gewürkte Verzögerung der Säge $= \frac{Nz}{Q}$ (54 §. Mech.). Die von dem Gewicht Q des Sägegat-

ters, und der damit vereinigten Kraft K herrührende Beſchleunigung iſt $= \frac{K+Q}{Q}$, und dieſe will ich $= p$ ſetzen: alſo wird $dv = dz \left(p - \frac{Nz}{Q}\right)$; (117 §. Mech.) und die Integration giebt $v = pz - \frac{1}{2} \cdot \frac{Nzz}{Q} + C$. Wenn nun die Höhe, von welcher die Säge herabfällt, bevor der erſte Zahn B das Holz erreicht, $= a$ iſt, ſo iſt die Geſchwindigkeit der Säge $= \sqrt{ap}$ in dem Augenblick, da der erſte Zahn das Holz ergreift: dies giebt $v = ap$ für $z = 0$, und man erhält $v = p(a+z) - \frac{Nzz}{2Q}$.

Wenn demnach die Dicke des Holzes $= b$ iſt, ſo iſt in dem Augenblick, da der untere Zahn das Holz verläſt, die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $v = p(a+b) - \frac{Nbb}{2Q}$.

592 §.

Es bleiben die im vor. §. gegebenen Stücke, man ſucht die während der Bewegung verfloſſene Zeit.

Aufl. Es iſt $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$; wenn alſo $\frac{Q}{N} = e$ geſetzt wird, ſo hat man

$$dt = \frac{dz \sqrt{2e}}{\sqrt{(2aep + 2epz - zz)}}.$$

Man ſetze $z - ep = y$, ſo wird $2epz - zz = e^2p^2 - yy$, und $dt =$

$= \frac{dy\sqrt{2e}}{\sqrt{(2aep+e^2p^2-yy)}}$. Ferner dividire man im Zähler und Nenner durch $\sqrt{(2aep+e^2p^2)}$, und um noch mehr abzukürzen, ſchreibe man E ſtatt ep; ſo wird $dt = \sqrt{2e} . \frac{dy:\sqrt{(2aE+EE)}}{\sqrt{(1-yy:(2aE+EE))}}$, alſo $t = C + \sqrt{2e} . A\sin\frac{y}{\sqrt{(2aE+EE)}}$. Für $z = 0$ wird $t = 0$, $y = -E$, alſo $C = \sqrt{2e} . A\sin\frac{E}{\sqrt{(2aE+EE)}}$, und wenn man wieder $z - E$ ſtatt y ſetzt, ſo hat man $t =$

$$\left(A\sin\frac{z-E}{\sqrt{(2aE+EE)}} + A\sin\frac{E}{\sqrt{(2aE+EE)}}\right)\sqrt{2e},$$

oder

$$t = \left(A\sin\frac{E}{\sqrt{(2aE+EE)}} - A\sin\frac{E-z}{\sqrt{(2aE+EE)}}\right)\sqrt{2e}.$$

Setzt man in dieſer Formul $z = b$, ſo hat man die Zeit bis dahin, wenn der unterſte Zahn B das Holz zu verlaſſen anfängt; und bey der würklichen Berechnung müſte man, wie bekannt iſt, noch mit $2\sqrt{g}$ dividiren, wenn g die Höhe des freyen Falles für die erſte Secunde bedeutet.

593 §.

Die Länge der Säge übertrift die Dicke des Holzes, und der unterſte Zahn B, welchen jetzt das Holz zu verlaſſen anfängt, legt noch den Weg $HB = z$ zurück: man ſucht die Geſchwin- 23 Fig.

 digkeit

digkeit der Säge für den Augenblick, da B in H anlangt.

Aufl. Weil jetzt alle Zähne arbeiten, die zwiſchen G und H liegen, und GH$=b$ iſt, ſo iſt nun das $=b$, was im 591 §. $=z$ war, und der Widerſtand des Holzes iſt $= \frac{c\varrho}{\alpha f} \cdot b = Nb$. Man ſetze wiederum die der geſuchten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $=v$, ſo wird $dv = dz\left(p - \frac{Nb}{Q}\right)$, oder $dv = dz\left(p - \frac{b}{e}\right)$, alſo $v =$ $C + \left(p - \frac{b}{e}\right)z$. Wenn man nun annimmt, die Säge ſey im Anfang dieſer Bewegung noch in Ruhe geweſen, als der unterſte Zahn noch in H war, ſo wird C$=0$, und $v = \left(p - \frac{b}{e}\right)z$.

Dieſe Vorausſetzung ſcheint der Anordnung der im vorigen Abſchnitt beſchriebenen mit der Kurbel verſehenen Sägemühlen gemäß zu ſeyn. Dafern man aber annimmt, daß die Säge ſchon von einer gewiſſen Höhe a über dem Holz frey herabgefallen ſey, ſo wie die Sache im 591 und 592 §. betrachtet iſt; ſo hat man $v = p(a+b) - \frac{Nbb}{2Q} = p(a+b) - \frac{bb}{2e}$ (591 §.), wenn hier $z=0$ iſt, und alsdenn wird $v = p(a+b) - \frac{bb}{2e} + \left(p - \frac{b}{e}\right)z$. In dem

Augen-

Augenblick, wenn der oberſte Zahn D einzuſchneiden anfängt, wird alsdenn $z=f-b$, und das gäbe $v=ap+\frac{bb}{2e}+f\left(p-\frac{b}{e}\right)$.

594 §.

Die Säge erſtreckt ſich im Anfang der Bewegung durch die ganze Dicke des Holzes, und der unterſte Zahn hat den Weg $HB=z$ zurück gelegt; man ſucht die verfloſſene Zeit.

Aufl. In dieſer Vorausſetzung iſt $v=\left(p-\frac{b}{e}\right)z$ (593 §.), und $dt=\frac{dz}{\sqrt{v}}=\frac{dz\sqrt{e}}{\sqrt{(ep-b)z}}$, alſo wird $t=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{(ep-b)}}\sqrt{z}$, und es iſt keine beſtändige Gröſſe nöthig, weil t und z zugleich verſchwinden.

Wenn man die zweyte Vorausſetzung des vor. §. annehmen will, daß die Säge ſchon von einer gewiſſen Höhe herabgefallen ſey, bevor der unterſte Zahn in das Holz einzuſchneiden anfängt; ſo muß man

$v=p(a+b)-\frac{bb}{2e}+\left(p-\frac{b}{e}\right)z$ annehmen,

und die Integration wird nicht ſchwerer: nur komt man auf einen weitläuftigern Ausdruck. Weil ich davon für die Ausübung bisher keinen beſondern Nutzen abſehe, ſo ſetze ich ihn nicht her. Man findet ihn in der Eulerſchen Abhandlung im XI. §. a. a. O. p. 273. jedoch muß ich bemerken, daß H. Euler den Fall nicht betrachte, wenn das Sägegatter noch auſſer ſeinem Gewicht durch eine andere Kraft

K abwärts gezogen wird. Wenn man in den bisherigen Formuln $K = 0$, alſo $p = 1$ ſetzt, ſo hat man die Euleriſchen Formuln, nur daß man noch P ſtatt des hieſigen Q ſchreiben muß. Alsdenn aber ſind die Formuln nur für die im 590 §. berührte Anordnung brauchbar.

595 §.

Wenn die ganze Länge der Säge $= f$ geſetzt wird, ſo hat die Säge alsdenn den Weg $f - b$ zurück gelegt, wenn der letzte Zahn in das Holz einzuſchneiden anfängt, nemlich von dem Zeitpunct an gerechnet, da die Säge anfieng ſich durch die ganze Dicke des Holzes zu erſtrecken. Wenn demnach in der für t gefundenen Formul $z = f - b$ geſetzt wird, ſo hat man die ganze verfloſſene Zeit bis dahin, da der letzte Zahn in das Holz einzudringen anfängt. In eben dieſem Augenblick wird der Widerſtand aufs neue veränderlich, und man kan nun ſo, wie vorhin, für jede gegebene Tiefe z, um welche der letzte Zahn ins Holz eingedrungen iſt, die Geſchwindigkeit der Säge nebſt der verfloſſenen Zeit ſuchen, da dann nach der Integration $z = b$ geſetzt werden muß, um die Zeit bis dahin zu haben, da der letzte Zahn das Holz zu verlaſſen anfängt. Alle dieſe drey Zeiten addirt Hr. Euler zuſammen, und nimmt ſie für die Zeit eines ganzen Sägeſchnitts an. Um die Zeit des Rückzuges der Säge zu haben, nimmt Hr. Euler die Geſchwindigkeit des Sägegatters als unveränderlich an, und wenn das mechaniſche Moment der angebrachten Kraft $= F\alpha$, das Gewicht des Sägegatters $= Q$ geſetzt wird, ſo findet man nach dem *allgemeinen* Geſetz der Maſchinenlehre dieſe Geſchwin-

 digkeit

digkeit $= \frac{F\alpha}{Q}$, und mit dieſer Geſchwindigkeit ſteigt die Säge um die Höhe f in der Zeit $\frac{fQ}{F\alpha}$; da dann dieſe Zeit zur Summe der vorigen dreyen Zeitperioden addirt die ganze Zeit eines Spiels der Säge geben würde. Ob nun gleich dieſe Rechnungen ihre gute Richtigkeit haben; ſo dünkt mich doch, daß die Vorausſetzungen, worauf ſie ſich gründen, bey den gewöhnlichen Einrichtungen der Sägemühlen nicht ſtatt haben: ja ſelbſt alsdenn nicht, wenn die Säge ohne Beyhülfe einer Maſchine blos von Menſchen gezogen wird. Wenn ich etwa von den erſten Schnitten einige wenige ausnehme, ſo ſcheint es, daß bey der gewöhnlichen Art zu arbeiten, alle Zähne, ſo weit ſich die Dicke des Holzes erſtreckt, zugleich angreifen, und daß der Widerſtand des Holzes alſo für die ganze Zeit des Schnitts unveränderlich ſey. Wenigſtens übertrift die Länge der Säge den Weg gar ſehr, welchen ſie beym hin und wieder ſpielen zurück legt, und ich finde nicht, daß ſie nach ihrer ganzen Länge vom erſten bis zum letzten Zahn durchs Holz durchgezogen wird.

596 §.

Wofern man, wegen dieſer Gründe, den Widerſtand des Holzes als unveränderlich betrachten kan; ſo iſt es auch verſtattet, im Beharrungsſtande einer Sägemühle die Geſchwindigkeit der Säge, wenn ſie in das Holz einſchneidet, als unveränderlich zu betrachten, und das allgemeine Geſetz der Maſchinenlehre hier ſowohl, als beym Rückzuge der Säge an-

zuwenden. Und wenn die Säge blos von Menſchen gezogen wird, ſo ſcheint es, daß man annehmen könne, der Widerſtand des Holzes ſey mit der Kraft im Gleichgewicht, womit ſie alsdenn in die Säge würken können, wenn letztere ohngefehr mit 2 Fuß Geſchwindigkeit auf und nieder ſpielt. Man findet beym **Belidor** a. a. O. 710 §. einige hieher gehörige Erfahrungen. Drey an einer Säge angebrachte Perſonen können binnen einer Stunde einen annoch grünen 12 Zoll ins Gevierte ſtarken eichenen Stamm bis auf eine Länge von 10 Fußen von einander ſägen, wenn zwey derſelben unten ſtehen, und die Säge abwärts ziehen, die dritte aber oben ſtehet, und die Säge wieder hinauf ziehet. Die Geſchwindigkeit der Säge wird alsdenn ohngefehr 2 bis 3 Fuß in einer Secunde betragen, und wenn man annimmt, daß jeder Arbeiter ſodann etwa 30 Pfund Kraft anwendet, ſo würde der Widerſtand 90 Pf. betragen. Wie viel Schnitte binnen einer Secunde geſchehen, hat Hr. **Belidor** nicht angemerkt, ſonſt lieſſe ſich daraus finden, wie tief die Säge jedesmal einſchneide. Ein ohngefehrer Ueberſchlag läſt ſich ſo machen. Die ganze Länge des Zuges wird etwa 3 Fuß betragen, und dazu werden $1\frac{1}{2}$ Secunden Zeit gehören. Wenn nun Schnitt und Rückzug gleich viel Zeit erfordern, ſo geſchehen in einer Stunde

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 3600}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3600 = 1200$$ Schnitte, und

jeder Schnitt gehet $\frac{10}{1200} = \frac{1}{120}$ Fuß, oder $1\frac{1}{5}$ Lin. tief. Demnach würde im 588 §. $\tang \zeta = \frac{1}{120 \times 3} = \frac{1}{360}$. Herr **Euler** wendet a. a. O.

XXXII §. auf eben dieſe Erfahrungen ſeine Formuln an, und findet tang $\zeta = \frac{1}{386}$, wenn der Widerſtand 90 Pf. groß angenommen wird. Ich glaube, daß die angeführten Gründe mich hinlänglich rechtfertigen, wenn ich ihm in ſeinen Rechnungen nicht folge. Wenn der Winkel ζ gröſſer iſt, alſo die Säge jedesmahl tiefer als $1\frac{1}{7}$ Linie einſchneidet, ſo wird der Widerſtand gröſſer ſeyn; wie aber dieſer Widerſtand von dem Winkel ζ abhänge, kan die Theorie nicht entſcheiden. In Sägemühlen, wo die Kraft, welche die Säge treibt, gröſſer iſt, kan dieſer Winkel gröſſer ſeyn, und ich werde das, was die Erfahrung davon gelehrt hat, ſo weit ich Nachrichten finde, unten mittheilen.

597 §.

Bey verſchiedenen Holzarten iſt dieſer Widerſtand, wie leicht zu erachten iſt, verſchieden, wenn gleich der Winkel ζ und die Dicke des Stammes einerley bleibt: ja der Widerſtand iſt bey einerley Holzart, nachdem es naß oder trocken iſt, verſchieden. Das völlig ausgetrocknete Holz widerſtehet weit ſtärker, als wenn es noch grün iſt, und nach Belidors Erfahrungen a. a. O. können drey Arbeiter einen 12 Zoll dicken völlig trockenen eichenen Stamm binnen einer Stunde nur auf eine Länge von 5 Fuß von einander ſägen. Demnach geht alsdenn jeder Schnitt nur 0,6 Linien tief, und es wird tang $\zeta = \frac{1}{720}$. Wenn das eichene Holz 7 bis 8 Zoll dick und annoch grün iſt, ſo durchſchneiden ſie ſtündlich eine Länge von 25 bis 26 Fuß, wenn es aber völlig trocken iſt, nur 17 bis 18 Fuß. Von weichen (vermuthlich Tannen) Holze, wenn es grün iſt, zer-

ſchneiden drey Arbeiter ſtündlich eine Länge von 14 Fuß, wenn es aber trocken iſt, nur $6\frac{1}{2}$ bis 7 Fuß. Von weichen alten Holz, wenn es nur 7 bis 8 Zoll ſtark iſt, können 3 Arbeiter ſtündlich eine Länge von 31 bis 32 Fuß zerſchneiden. Dieſe und ähnliche Erfahrungen muß man zu Hülfe nehmen, wenn man bey Anordnung einer Holz-Säge-Mühle den Widerſtand in Rechnung bringen will, welchen die Maſchine zu überwinden hat, und man kan aus ſolchen Erfahrungen, wie im vor. §. auf den Widerſtand des Holzes bey einer beſtimmten Gröſſe des Winkels ζ ſchlieſſen. Am richtigſten würde man für jeden Fall dieſen Winkel finden, wenn man die Anzahl der Schnitte in einer Stunde zehlte, und die Höhe genau beobachtete, um welche die Säge jedesmahl auf und abwärts ſpielt.

598. §.

Weil man überhaupt bey Anordnung einer jeden Maſchine, die eine zeitlang gleichförmig fortgehen ſoll, ſo viel möglich dahin ſehen muß, daß der Widerſtand beſtändig einerley bleibe, welchen die Maſchine überwinden ſoll; ſo hat man auf eben dieſen Umſtand auch bey Anordnung einer Säge-Mühle Rückſicht zu nehmen. In ſolcher Abſicht ſtelle man ſich die im 584 §. beſchriebene Verbindung der Säge mit der Kurbel vor, das Gewicht der Säge mit dem Gatter ſey $= Q$, der Widerſtand des Holzes $= R$, der Widerſtand, welchem der oberſte Quer-Riegel des Sägegatters wegen des Schiebwerks ausgeſetzt iſt, $= S$. Weil nun das Holz der Säge gar nicht widerſtehet, wenn ſie hinaufſteiget, ſo hat die Kurbel alsdenn (alle Friction beyſeit geſetzt,)

den

den Widerſtand Q + S zu überwinden. Wenn dagegen die Säge mit dem Gatter abwärts ſinkt, ſo vereiniget ſich das Gewicht Q mit der Kraft der Kurbel, den Widerſtand R zu überwinden, und der Widerſtand S fällt weg. Demnach hat die Kurbel nur den Widerſtand R — Q zu überwinden, und damit der Widerſtand beſtändig einerley bleibe, muß R — Q = Q + S ſeyn, folglich R = 2Q + S. Um alſo die Anordnung dieſen Schlüſſen gemäß einzurichten, muß man noch den Widerſtand S zu berechnen wiſſen.

599 §.

Alle Abmeſſungen des Schiebwerks ſind gegeben, nebſt dem Gewicht des Klotzwagens mit dem darauf liegenden Block: man ſucht den Widerſtand *S*, welchem der oberſte Quer-Riegel *G* des Sägegatters ausgeſetzt iſt. 24 25 Fig.

Aufl. Weil G*g* die Höhe iſt, um welche die Säge gehoben wird, und FG die Lenkſtange iſt, welche im Anfang der Bewegung vertical ſtehen muß, ſo hat man F*g* = G*g* — FG. Weil ferner die Lage des Hebels EF für den Anfang der Bewegung und den niedrigſten Stand des Sägegatters bekannt ſeyn muß, ſo iſt der Winkel EF*g* bekannt, und daraus findet man E*g* nebſt dem Winkel FE*g*. Alsdenn ſind im Dreyeck E*fg* alle drey Seiten bekannt, folglich auch der Winkel *g*E*f*, woraus FE*f* = FE*g* + *g*E*f* gefunden wird. Noch muß für den niedrigſten Stand des Sägegatters die Lage der Stoßſtange DH, alſo der Winkel EDH bekannt ſeyn. Weil nun DEC = FE*f* iſt, ſo hat man auch den Winkel EDC, alſo CDH = EDH — EDC. Ferner iſt DC

aus ED und dem Winkel DEC bekannt, alſo hat man im Dreyeck CDH auch die Seite CH. Dieſe von CI=DH abgezogen, giebt HI, als den Weg, um welchen der Zahn H am Sperr-Rade bey jedem Rückzug der Säge fortrückt. Wenn die Einrichtung ſo gemacht wird, daß aus dem Winkel EDH beym höchſten Stande der Säge die grade Linie ECI wird, wie es die 24 Fig. vorſtellt; ſo iſt HI die Differenz zwiſchen EH, und ED+DH. Aus HI hat man ferner den Weg des Klotzwagens für eben die Zeit. Wenn nemlich der Halbmeſſer des Sperr-Rades $=a$, der Halbmeſſer der zugehörigen Trillinge $=\alpha$ iſt; ſo wird der erwehnte Weg $= \frac{\alpha}{a}.\mathrm{HI}$. Nun ſey die Umlaufszeit der Kurbel $=t$, ſo ſteigt der Punct g binnen dieſer Zeit von G bis g, um die Höhe $=2q$, wenn man den Halbmeſſer der Kurbel $=q$ ſetzt. Setzt man alſo den Widerſtand, welchen der Klotzwagen den unter ihm liegenden Trillingen entgegen ſetzt, $=X$, ſo hat man $2q.S = \frac{\alpha}{a}.\mathrm{HI}.X$, und $S = \frac{\alpha}{a}.\frac{\mathrm{HI}}{2q}.X$.

Nun ſey das Gewicht des Klotzwagens mit dem darauf liegenden Block $=Z$, und das Verhältniß der Friction zum Druck $=\mu:1$; ſo iſt die Friction an den Polzen der unter dem Wagen befindlichen Rollen $=\mu Z$. Der Halbmeſſer dieſer Rollen ſey b, der Halbmeſſer ihrer Polzen $=\beta$, ſo iſt der Widerſtand des Wagens $X = \frac{\beta}{b}.\mu Y$. Nimmt man al-

ſo

ſo auf die Friction zwiſchen den Kämmen der Wagen-Bäume und Triebſtecken der Trillinge mit Rückſicht, ſo muß man $X = \frac{\beta}{b} \cdot \mu Z \sqrt{(1+\mu^2)}$ ſetzen, und dies giebt

$$S = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{HI}{2q} \cdot \mu Z \sqrt{(1+\mu^2)}.$$

600 §.

Diejenige Kraft zu finden, welche zur Ueberwindung der Friction und des geſamten Widerſtandes bey einer Holzſäge-Mühle im Beharrungsſtande der Bewegung erfordert wird; wenn der Widerſtand des Holzes, welches die Säge zerſchneidet, ſo groß angenommen wird, als das doppelte Gewicht des Sägegatters, und der auf den oberſten Querriegel deſſelben reducirte Widerſtand des Schiebwerks zuſammen genommen.

Aufl. Vermöge der Vorausſetzung iſt der Widerſtand der Säge beſtändig $= Q + S$; wenn alſo der Halbmeſſer des an der Kurbel-Welle befindlichen Trillings $= h$, der Kurbelbug $= q$ geſetzt wird; ſo iſt eine Kraft p am Umfang des Trillings mit $Q + S$ im Gleichgewicht, wenn man $p = \frac{2q}{\pi h}(Q+S)$ ſetzt (335 §.).

Hiebey muß aber die Friction des Sägegatters in den Falzen der Gatterſäulen nicht ganz aus der Acht gelaſſen werden. Es ſey GH der Lenker, HF vertical, GF und HK horizontal; ſo leidet H nach der Richtung HF den Druck $(Q+S)$. Dieſer zer- 26 Fig.

legt

legt ſich in zwo Preſſungen, wovon die eine nach HG $= (Q+S)\sec\varphi$, die andre nach $HK = (Q+S)\,tg\varphi$ iſt, wenn man $FHG = \varphi$ ſetzt. Indem alſo der Lenker das Sägegatter hebt, leiden die Falzen des Sägegatters nach HK den Druck $(Q+S)\tan g\varphi$; und wenn der Lenker das Sägegatter niederzieht, ſo verwandelt ſich dieſer Druck in den entgegengeſetzten nach HL. Beidemahl iſt alſo die Friction $= \mu(Q+S)\tan g\varphi$, und ſie ändert ſich mit dem Winkel φ. Setzt man die Länge des Lenkers $= f$, und nimmt CA horizontal an, ſo iſt der Winkel φ am gröſten, wenn G in A fällt, alſo $\sin\varphi = \frac{q}{f}$ wird, und für dieſen Fall iſt auch die Friction am gröſten. Dies giebt $\cos\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{qq}{ff}\right)} = \frac{\sqrt{(ff-qq)}}{f}$, alſo $\tan g\varphi = \frac{q}{\sqrt{(ff-qq)}}$. Demnach wäre der gröſte Werth der Friction $= \frac{\mu q}{\sqrt{(ff-qq)}}(Q+S)$, und der kleinſte Werth iſt $= 0$, weil alsdenn, wenn CG und GH vertical werden, gar keine Friction ſtatt hat. Man ſetze $ACG = \psi$, ſo wird $FG = q\cos\psi$, und $\sin\varphi = \frac{q\cos\psi}{f}$, alſo $\tan g\varphi = \frac{q\cos\psi}{\sqrt{(ff-qq\cos\psi^2)}}$, ſo daß überhaupt die Friction $= \frac{\mu q\cos\psi}{\sqrt{(ff-qq\cos\psi^2)}}(Q+S)$ wird. Um einen mittlern Werth zu haben, läſt ſich wohl am füg-

lichſten $\psi = 45°$ annehmen, da dann $\cos\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird, und man erhält für den mittlern Werth der Friction $\frac{\mu q \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ff - \frac{1}{2}qq)}}(Q+S)$. Demnach muß die Sache ſo betrachtet werden, als wenn die Laſt

$$= Q + S + \frac{\mu q \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ff - \frac{1}{2}qq)}}(Q+S) =$$

$$\left(1 + \frac{\mu q}{\sqrt{(2ff - qq)}}\right)(Q+S)$$ wäre; und wenn man, um abzukürzen, dieſen Ausdruck $= K$ ſetzt, ſo hat man eigentlich $p = \frac{2q}{\pi h}.K$.

Das Gewicht der Welle, mit Trilling und Kurbel zuſammen, ſey $= M$, und der Halbmeſſer der zugehörigen Zapfen $= k$, die am Umfang des Trillings zur Ueberwindung der Friction an dieſen Zapfen nöthige Kraft $= \phi$; ſo leiden dieſe Zapfen den Druck $M + K + p + \phi$, wenn die Säge ſteigt, und $M - K + p + \phi$, wenn ſie herab ſinkt. Nimmt man $M + p + \phi$, als das Mittel zwiſchen beyden, für dieſen Druck an, ſo iſt die Friction $= \mu(M + p + \phi)$, und man erhält $\mu k(M + p + \phi) = h\phi$; alſo wird $\mu k(M + p) = (h - \mu k)\phi$ und $\phi = \frac{\mu k(M+p)}{h - \mu k}$.

Bleibt nun die Umlaufszeit der Kurbel $= t$, des Waſſerrades $= \vartheta$, des letztern Halbmeſſer, $= r$; ſo hat man $P = \frac{h}{r}.\frac{\vartheta}{t}(p + \phi)\sqrt{(1 + \mu^2)}$ für die Kraft am Umfang des Waſſerrades, wie im 578 §,

oder $P = \frac{\varrho}{r}(p+\varphi)\sqrt{(1+\mu^2)}$, wenn ϱ den Halbmeſſer des Sternrades bedeutet, weil $\frac{\vartheta}{t} = \frac{r}{h}$ iſt. Wegen der Friction an den Zapfen der Mühlwelle, deren Halbmeſſer ich $= \varepsilon$ annehme, wird $\psi = \frac{\mu\varepsilon}{r}\sqrt{(P^2+Y^2)}$ (579 §.), wenn ψ die zur Ueberwindung der Friction nöthige Kraft, und Y den geſamten verticalen Druck bedeutet, dem die Zapfen ausgeſetzt ſind. Wenn alſo das Gewicht der Mühlwelle mit dem Waſſer- und Sternrade zuſammen $= N$ iſt; ſo hat man $Y = N-(p+\varphi)$, weil die Triebſtecken die Zähne des Sternrades aufwärts drücken, und die geſuchte Kraft wird $= P+\psi$.

601 §.

Wenn die ganze Anordnung der Sägemühle, nebſt der Kraft des Waſſerſtoſſes gegen die Schaufeln des Waſſerrades für den Beharrungsſtand der Maſchine bekannt iſt; ſo darf man nur die Schlüſſe des vor. §. umkehren, um das Gewicht des Sägegatters zu finden. Der Druck des Waſſers gegen die Schaufeln ſey $= V$, und man ſetze $V = P+\psi$, (die Bedeutung der Buchſtaben bleibt wie im vor. §.) ſo hat man $P = V-\psi$, $= \frac{\varrho}{r}(p+\varphi)\sqrt{(1+\mu^2)}$, und $\psi = \frac{\mu\varepsilon}{r}\sqrt{(P^2+Y^2)} = \frac{\mu\varepsilon}{r}\sqrt{\left((V-\psi)^2+\left(N-(p+\varphi)\right)^2\right)}$, oder

$\psi =$

$$\psi = \frac{\mu\varepsilon}{r} \surd \left((V-\psi)^2 + \left(N - \frac{(V-\psi)r}{\varrho\surd(1+\mu^2)} \right)^2 \right).$$

Aus dieſer Gleichung müſte man ψ ſuchen. Man kan hier aber, wie im 581 §. die Rechnung verkürzen, wenn man unter dem Wurzelzeichen V ſtatt $V-\psi$ braucht, und den Werth von ψ, welchen man auf die Art findet, hiernächſt wie im 581 §. berichtiget. Dies giebt alsdenn $p+\varphi = \frac{(V-\psi)r}{\varrho(1+\mu^2)}$, und wenn man $p+\varphi = W$ ſetzt; ſo hat man $\mu k(M+W) = h\varphi$, alſo $\varphi = \frac{\mu k}{h}(M+W)$, und $p = W - \varphi$. Ferner wird

$$K = \frac{\pi h}{2q} \cdot p, \text{ und } Q+S = \frac{\surd(2ff-qq)}{\surd(2ff-qq)+\mu q} \cdot K.$$

Berechnet man nun S nach dem 588 §, ſo hat man Q.

Ich will dieſe allgemeine Unterſuchung wiederum durch ein aus Hrn. Belidors Architect. Hydraul. II Buch II Cap. 704 §. genommenes Beyſpiel erläutern. Es ſey

$r = 5\frac{1}{4}$ Fuß	$N = 2500$ Pf.
$\varrho = 2\frac{1}{2}$ "	$M = 240$ "
$q = 15$ Zoll	$V = 407$ "
$h = 8$ "	$k = \varepsilon = 9$ Linien.

Wenn ich nun, wie bisher, $\mu = \frac{1}{3}$ annehme, ſo wird $\surd(1+\mu^2) = \frac{19}{18}$, und $\frac{Vr}{\varrho\surd(1+\mu^2)} =$

$$\frac{407 \cdot 5\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{19} = \frac{407 \cdot 21}{10} \cdot \frac{18}{19}$$

$= \left(\frac{407 \cdot 21}{5}\right) \cdot \frac{9}{19} = 809,7$ Pf. Dies von N abgezogen, läſt 1690, und man erhält $\surd(407^2 + 1690^2) = 1738$ Pf., alſo $\psi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{21} \cdot 1738 = \frac{1}{252} \cdot 1738 = 7$ Pf. Daraus folgt $p + \varphi = W = \frac{400 \cdot 5\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{19} = \frac{400 \cdot 21}{5} \cdot \frac{9}{19} = 795,8$ Pf.; und es wird $\varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1036 = \frac{1}{32} \cdot 1036 = 32,4$ Pf., alſo $p = W - \varphi = 763,4$, und $K = \frac{355}{113} \cdot \frac{8}{30} \cdot 763,4 = \frac{71}{113} \cdot \frac{8}{6} \cdot 763,4 = \frac{71}{113} \cdot \frac{4}{3} \cdot 763,4 = 610$ Pfund. Die Länge f des Lenkers beträgt 8 Fuß, oder 96 Zoll, alſo wird $2ff - qq = 18207$ Zoll, $\surd(2ff - qq) = 135$, und $\frac{\surd(2ff - qq)}{\surd(2ff - qq) + \mu q} = \frac{135}{140}$. Dies giebt $Q + S = \frac{27}{28} \cdot 610$ Pfund $=$ 588 Pfund.

Statt dieſer Zahl bringt Hr. Belidor nur 546 Pfund heraus, welches daher kommt, weil er überhaupt die Friction etwas zu groß in Anſchlag bringt. Er rechnet ſo, als wenn die Zapfen der Kurbelwelle allemahl den verticalen Druck $M + K + p + \varphi$ litten, da doch dieſer Druck, wenn die Säge niederſinkt, nur $= M - K + p + \varphi$ iſt. Ferner braucht er ſeine im 400 §. Mechan. beurtheilte Regel allemahl bey Berechnung der Friction an den Zapfen, und es lieſſe ſich auſſerdem noch verſchiedenes bey ſeiner Rechnung erinnern, welches ich Kürze halber
24 übergehe. Es muß aber noch S berechnet werden,
25 um Q zu finden. In ſolcher Abſicht muß man wiſ-
Fig. ſen, daß EF = Ef = 5 Fuß 7 Zoll, FG = 22 Zoll, ED = 6 Zoll, DH = 11 Fuß 6 Zoll ſey. Im Anfang

fang der Bewegung liegt EF horizontal, und alsdenn iſt EH = 11 Fuß 11 Zoll 4 Linien. Dies ſind die Abmeſſungen, welche Hr. Belidor a. a. O. im 694 und 695 §. angiebet: und weil die Einrichtung bey der von ihm beſchriebenen Mühle ſo gemacht iſt, daß ED und DH in eine grade Linie fallen, wenn das Sägegatter den höchſten Stand erreicht hat; ſo kann man der Rechnung überhoben ſeyn, welche HI zu finden dienen würde. Es iſt nemlich nun ECI eine grade Linie von 12 Fuß, die mit EI zuſammen fällt; und weil EH = 11 Fuß 11 Zoll 4 Linien betrug, ſo iſt HI = 8 Linien. Ferner iſt im 578 §. Z = 26460 Pf. (Belidor a. a. O. 700 §.) $\frac{\alpha}{a} = \frac{3}{16}$, $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{8}$, alſo wird S =

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{30} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{18} \cdot 26460 = 6\tfrac{1}{2} \text{ Pf.},$$ und

man erhält Q = 581½ Pf. Herr Belidor findet S = 9 Pf., weil er hier ebenfalls etwas anders rechnet. Er läſt EK auf DH ſenkrecht fallen, berechnet EK, ſieht FEK als einen gebrochenen Hebel an, und braucht alsdenn das Verhältniß $\frac{EK}{EF}$ ſtatt des von mir gebrauchten Verhältniſſes $\frac{HI}{2q}$, welches dem allgemeinen Geſetz des Gleichgewichts (372 §. Mech.) gemäſſer iſt.

602 §.

Wenn man die bisher vorgetragenen Gründe der Berechnung einer Sägemühle überlegt; ſo wird man

man ſich leicht überzeugen, daß S gewöhnlich in Vergleichung mit Q ſehr klein ausfallen müſſe. Herr Belidor hat einen ſo groſſen und ſchweren Kloß zum Beyſpiel angenommen, als man in der Ausübung nicht leicht brauchen wird. Er nimmt ihn 30 Fuß lang, 18 Zoll ins Gevierte dick, und das Gewicht eines Cubicfuſſes 70 Pf. an, welches das alleräuſſerſte iſt. Deswegen bemerkt auch Herr Belidor ſelbſt, daß in den gewöhnlichſten Fällen S nicht leicht über 2 Pfund betragen werde. Weil man nun bey Berechnung der Kraft und Laſt gegen einander nie auf 2 Pf. ſicher ſeyn kann, ſo kann man der Mühe dies S zu berechnen überhoben ſeyn, und in den obigen Formuln Q ſtatt Q + S brauchen, als wenn S = 0 wäre. Der Wagen muß nemlich bey jedem Schnitt der Säge um 1, $1\frac{1}{2}$ bis 2 Linien fortrücken, und dies wäre ohngefehr jedesmahl der Werth von $\frac{\alpha}{a}$HI, der alſo auf $\frac{1}{72}$ Fuß zu ſchätzen iſt. Bleibt alsdenn $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{8}$, und q ohngefehr 15 Zoll $= \frac{15}{12}$ Fuß, ſo iſt allemahl ohngefehr $S = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{72} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{18} \cdot Z = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{9} \cdot 19 \cdot Z = \frac{1}{4092} \cdot Z$, und es muß Z ſchon über 8000 Pf. betragen, wenn S nur 2 Pf. ausmachen ſoll. Demnach kan man im 587 §. R = 2Q annehmen, und daraus folgt die Regel: **Das Gewicht des Sägegatters muß halb ſo groß ſeyn, als der Widerſtand, welchen die Säge zu überwinden hat.** Alsdenn iſt der eigentliche Widerſtand, welchen die an der Mühle angebrachte Kraft, alle Frictionen beyſeit geſetzt, ununterbrochen zu überwinden hat, oder

die

die hier eigentlich ſo genannte Laſt $= Q$, und nicht $= 2Q$, wie Hr. Belidor a. a. O. 708 §. bey ſeiner Rechnung annimmt, wenn er den ſonderbaren Satz daraus herleitet, daß bey der Sägemühle das mechaniſche Moment der Laſt weit gröſſer ſey, als das Bewegungsmoment der Kraft, der alſo von ſelbſt wegfällt.

603 §.

Es ſey nemlich der erwehnten Vorausſetzung gemäß, der Widerſtand des Holzes eben ſo groß, als das Gewicht des Sägegatters, welches bisher $= Q$ geſetzt iſt; ferner ſey, wie bisher, der Kurbelbug $= q$, und die Umlaufszeit der Kurbel $= t$; ſo iſt die Geſchwindigkeit des Sägegatters $= \frac{4q}{t}$, und das Bewegungsmoment der Laſt $= \frac{4q}{t} . Q$. Setzt man überdem den Waſſerdruck gegen die Schaufeln $= V$, den Halbmeſſer des Waſſerrades $= r$, und ſeine Umlaufszeit $= \vartheta$, ſo iſt die Geſchwindigkeit der Schaufeln $= \frac{2\pi r}{\vartheta}$, und das Bewegungsmoment der Kraft $= \frac{2\pi r}{\vartheta} . V$. Alle Frictionen beyſeit geſetzt, müſte nun $\frac{2\pi r}{\vartheta} . V = \frac{4q}{t} . Q$ ſeyn, wie bey allen andern Maſchinen, oder $V = \frac{2q}{\pi r} . \frac{\vartheta}{t} . Q$. Wenn man im 589 §. $\mu = 0$, und

$\zeta = 0$ ſetzt, ſo wird $\psi = 0$, $\varphi = 0$, und $K = Q$, alſo $V = P = \frac{h}{r} \cdot \frac{\vartheta}{t} \cdot \frac{2q}{\pi h} \cdot Q = \frac{2q}{\pi r} \cdot \frac{\vartheta}{t} \cdot Q$ eben ſo, wie vorhin.

604 §.

Wenn man die Anordnung einer würklich erbaueten Sägemühle kennet, und man beobachtet ihre Würkung im Beharrungsſtande, ſo läſt ſich daraus einigermaſſen auf die Stärke des Widerſtandes ſchlieſſen, den die Säge überwinden muß. Man beobachte nemlich, wie vielmahl das Waſſerrad in einer bekannten Zeit umläuſt; ſo läſt ſich daraus die Zeit finden, worin die Säge einmahl auf und nieder ſpielt, und aus der daher bekannten Geſchwindigkeit der Schaufeln am Waſſerrade läſt ſich die Gewalt des Waſſerſtoſſes berechnen, wenn das Gefälle bekannt iſt. Daraus findet man ferner die Kraft, womit die Kurbel das Sägegatter vertical auf und abwärts treibt, und die im 600 §. K hieß. Kennet man alsdenn auch das Gewicht des Sägegatters Q, ſo findet man den geſuchten Widerſtand $R = K + Q$ (598 §.). Ferner muß man beobachten, wie lang der Schnitt ſey, den die Säge in bekannter Zeit in dem Stamm zuwege bringt, ſo läſt ſich daraus die Tiefe eines jeden Schnitts finden, weil man die Zeit eines einzelnen Schnitts ſchon kennet. Vergleicht man alsdenn die Tiefe eines ſolchen Schnitts mit der Höhe, um welche die Säge auf und nieder ſpielt, ſo ergiebt ſich daraus der Winkel ζ für die Geſtalt der Säge.

605 §.

Hr. Belidor hat über die Würkung der oben im 601. §. ſchon erwehnten Sägemühle zu la Fere dergleichen Beobachtungen angeſtellet, und nach ſeinem Bericht iſt bey derſelben das lebendige Gefälle des Aufſchlage-Waſſers 6 Fuß $6\frac{1}{2}$ Zoll $= 6\frac{13}{24}$ Fuß, alſo die zugehörige Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{15,1 . 6\frac{13}{24}} = 19,88$ Fuß. Wenn die Mühle den gröſten Effect leiſten ſoll, ſo müſſen die Schaufeln am Waſſerrade mit dem dritten Theil dieſer Geſchwindigkeit umlaufen (113 §.), da dann die relative Geſchwindigkeit des Waſſers $\frac{2}{3} . 19,88$ Fuß bleibt, und die zugehörige Höhe iſt $\frac{4}{9} . 6\frac{13}{24}$ Fuß $= 2,907$ Fuß. Die Fläche der Schaufeln beträgt 2 Quadr. Fuß, alſo iſt im Fall der gröſten Würkung die Gewalt des Stoſſes $= 2 . 2,907 . 70 = 407$ Pf. (ſo groß ward auch V im 601 §. angenommen). Des Waſſerrades Durchmeſſer iſt $10\frac{1}{2}$ Fuß groß, alſo ſein Umfang $\frac{22}{7} . 10\frac{1}{2} = 33$ Fuß. Setzt man nun die Geſchwindigkeit der Schaufeln $= \frac{1}{3} . 19,88 = 6,627$ Fuß $= \alpha$, ſo wird die Umlaufszeit des Waſſerrades

$$\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha} = \frac{33}{6,627} = 5 \text{ Secunden.}$$

Das Sternrad an der Mühlwelle hat 32 Zähne, und der Trilling an der Kurbelwelle 8 Stecken, alſo läuft die Kurbel binnen 5 Secunden 4 mahl um, und ihre Umlaufszeit beträgt alsdenn $\frac{5}{4}$ Secunden. Dies iſt zugleich die Zeit eines Schnitts und Rückzuges der Säge. Im 601 §. iſt K zu 610 Pf. berechnet worden, wofür aber wegen der Friction der Ruthen des Sägegatters in den Falzen nur 588 Pfund gerechnet werden können, die a. a. O. ebenfalls ſchon

gefunden ſind. Nach Hrn. Belidors Rechnung kamen nur 537 Pf., und nach ſeiner Vorſchrift iſt das Gewicht des Sägegatters ſo proportioniret worden, daß es ebenfalls ohngefehr 537 Pf. betragen hat. Die ſo angeordnete Mühle hat Hr. Belidor, wie er ſich im 706 §. der Architect. Hydraul. ausdrückt, in ihrer möglichſt gröſſeſten Würkung genau beobachtet. Er hat gefunden, wenn man die Mühle mit dreyen Sägen gehen läſſet, daß dieſe einen 12 Zoll dicken und 30 Schuh langen Stamm während einer Stunde in vier Theile zerſchneiden, alſo vier Bohlen daraus machen können, davon jede ohngefehr 3 Zoll dick und 30 Fuß lang iſt. Die Holzart wird hier nicht genannt, aber im 700 §. wird ein Cubicfuß davon, wenn es noch grün iſt, 70 Pf. ſchwer angenommen, alſo iſt zweifelsohne Eichenholz zu verſtehen. Auch ergiebt ſich aus der Vergleichung mit dem 710 §, daß ein alter ausgetrockneter geſunder und harter Stamm verſtanden werde.

660 §.

Dies muß alſo wohl der Effect der Mühle geweſen ſeyn, wenn das Waſſerrad in einer Minute 12 mahl umgelaufen iſt. Weil nun K=588 Pfund, Q=537 Pf. war, ſo findet man für alle 3 Sägen den Widerſtand R=1125 Pfund, alſo für eine jede davon =375 Pfund. Will man mit Hr. Belidor für K nur 537 Pfund rechnen, ſo findet man den geſamten Widerſtand des Holzes =1074 Pf., und für eine Säge =358 Pfund. Die Rechnung läſt ſich genau, wie man leicht ſiehet, nicht anſtellen, daß ſie nicht auf 10 bis 16 Pfund unſicher ſeyn ſollte.

te. Um die Geſtalt der Säge zu finden, darf man hier wohl annehmen, daß die Zeiten des Schnitts und Rückzuges gleich groß ausgefallen, alſo binnen einer halben Stunde 30 Fuß durchſchnitten worden ſind. Hat nun die Zeit eines Schnitts $\frac{5}{8}$ Secunden betragen; ſo iſt bey jedem Schnitt die Säge um eine Tiefe von $\frac{5}{8 \cdot 1800} \cdot 30$ Fuß $= \frac{1}{8 \cdot 12} \cdot 144$ Linien $= 1\frac{1}{2}$ Linien eingedrungen, welches auch der Anordnung des Schiebwerks an dieſer Mühle gemäß iſt. Der Kurbelbug q betrug 15 Zoll, alſo die Höhe, um welche die Säge auf und nieder ſpielt, 30 Zoll oder 360 Linien, und dies giebt

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{1\frac{1}{2}}{360} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240}.$$

Wenn binnen einer Stunde eine Länge von 30 Fuß zerſchnitten wird, ſo giebt dies auf 25 Minuten ohngefehr 12 Fuß. Demnach ſcheint die im Anfang des 710 §. a. a. O. vom Hrn. Belidor angeführte Erfahrung bey eben der Mühle angeſtellet zu ſeyn, vermöge welcher ein 12 Zoll dicker eichener und trockener Stamm bis auf eine Länge von 12 Fuß binnen 25 Minuten iſt zerſchnitten worden, wogegen ein andrer annoch grüner Stamm von eben der Dicke ſchon in 18 Minuten bis auf eben die Länge zerſchnitten iſt. Vermuthlich iſt keine Veränderung mit der Säge ſelbſt, und dem Schiebwerk vorgenommen worden, ſondern jeder Schnitt iſt in dem einen Fall ſo tief gegangen, als in dem andern Fall. Weil aber der Widerſtand geringer geweſen iſt, ſo iſt jeder Schnitt in den grünen Stamm in kürzerer Zeit geſchehen, als bey Zerſchneidung des trockenen

Stammes. Es ſind nemlich binnen 18 Minuten ſo viel Schnitte geſchehen, als bey Zerſchneidung des trockenen Stammes binnen 25 Minuten geſchehen ſind. Demnach iſt bey Zerſchneidung des grünen Stammes die Geſchwindigkeit der Säge $\frac{25}{18}$ von derjenigen geweſen, womit die Säge bey Zerſchneidung des trockenen Stammes geſpielt hat. Im 605 §. bedeutete α die Geſchwindigkeit der Schaufeln am Waſſerrade bey Zerſchneidung des trockenen Stammes: dieſe hat alſo bey Zerſchneidung des grünen Stammes $\frac{25}{18} \cdot \alpha$, folglich $\frac{25}{18} \cdot \frac{1}{3} \cdot 19{,}88$ Fuß, oder $\frac{25}{54} \cdot 19{,}88$ Fuß, und die relative Geſchwindigkeit des Waſſers $\frac{29}{54} \cdot 19{,}88$ Fuß betragen. Die zugehörige Höhe iſt $\frac{29^2}{54^2} \cdot 6\frac{13}{24}$ Fuß $= \frac{841}{2916} \cdot 6\frac{13}{24} = 1{,}886$ Fuß, und daraus wird die Kraft des Waſſerſtoſſes $2 \cdot 1{,}886 \cdot 70 = 264$ Pf. gefunden. Bey Zerſchneidung des trockenen Stammes betrug dieſe Kraft 407 Pf. Demnach iſt bey einerley Geſtalt der Säge das Verhältniß zwiſchen dem Widerſtande des trockenen und grünen eichenen Holzes ohngefehr $= 407 : 264$, oder ohngefehr $3 : 2$.

607 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Holz-Säge-Mühle anzugeben.

Aufl. Wenn die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts $= \alpha$ geſetzt wird, ſo hat man 1) $\alpha = \frac{2\pi r}{\vartheta}$, und überdem 2) $V = \frac{2q}{\pi r} \cdot \frac{\vartheta}{t} \cdot Q$. (603 §.). Dies ſind die beiden Fundamentalgleichungen,

chungen,

chungen, welchen die ganze Anordnung gemäß ſeyn muß. Hier nehme ich an, die Mühle ſoll durch ein Waſſerrad getrieben werden, alſo muß das lebendige Gefälle des Waſſers, nebſt der in einer Secunde zufließenden Menge, bekannt ſeyn: alsdenn muß α den Vorſchriften des 113 oder 131 §. gemäß angenommen werden, nachdem das Waſſerrad unterſchlächtig oder oberſchlächtig iſt. Von r und ϑ wird eins den Umſtänden gemäß angenommen, und alsdenn ſind in der zweyten Hauptgleichung noch die drey Größen q, t und Q unbeſtimmt. Weil nun $\frac{4q}{t}$ die Geſchwindigkeit des Sägegatters iſt, ſo iſt Q beſtimmt, wenn man dieſe Geſchwindigkeit willkührlich annimmt; und dies wäre das Gewicht des Sägegatters, alle Frictionen beyſeit geſetzt. Uebrigens iſt es nicht ganz willkührlich, wie groß man die Geſchwindigkeit der Säge annimmt, weil bey ſehr ſchneller Bewegung des Gatters das heftige Reiben in den Falzen die Maſchine leicht in Feuer ſetzt. Hr. Belidor a. a. O. 706 §. ſetzt folgende Grenze dieſer Geſchwindigkeit feſt. Bey einer Mühle, wo die Säge um 30 Zoll ſteigt und fällt, muß ſie in einer Minute nicht über 80 mahl auf und nieder ſpielen; alſo wäre die äußerſte Geſchwindigkeit, womit die Säge ſpielen dürfte, 80 × 60 Zoll in einer Minute, und 80 Zoll, oder $6\frac{2}{3}$ Fuß in einer Secunde. Größerer Sicherheit halber kan man für dieſe Grenze 6 Fuß annehmen, und in den meiſten Fällen kan eine Geſchwindigkeit von 4 bis 5 Fuß ſchon genügen. Setzt man nun dieſe Geſchwindigkeit $= \beta$, ſo muß $t = \frac{4q}{\beta}$ angenommen

nommen werden, wenn g beſtimmt iſt, da dann $\frac{g}{t}$ die übrige Anordnung der Mühle ſelbſt beſtimmt. Wie groß nun das Gewicht des Sägegatters bey dieſer Anordnung wegen der Friction angenommen werden müſſe, berechnet man nach den Vorſchriften des 661 §.

Alsdann aber iſt noch übrig, das Schiebwerk gehörig anzuordnen, und man ſiehet wol, daß es dabey vornemlich auf die Frage ankomme, wie weit der Kloß nach jedem Schnitt der Säge weiter vorrücken müſſe. Wenn man vermittelſt ſolcher Erfahrungen, wie ſie in den letzten §§. angeführt ſind, gelernt hat, wie weit die Säge bey einem bekannten Widerſtande einer groſſen Holzart jedesmal einſchneiden könne, ſo weiß man auch, wie weit der Kloßwagen nach jedem Schnitt vorrücken müſſe. Der Bogen, um welchen die Zähne des Sperrades bey jedem Rückzug der Säge fortrücken, ſey = W, und der zugehörige Weg des Kloßwagens $= w$, ferner ſey das Verhältniß der Halbmeſſer des Sperrades und der zugehörigen Trillinge $= n : 1$, ſo hat man $W = nw$. Kan man alſo w als bekannt annehmen, ſo bleiben nur n und W in dieſer Gleichung unbeſtimmt. Weil man nun, wenn die Höhe, um welche die Säge jedes-
24 mal ſteigt, bekannt iſt, den gebrochenen Hebel FED
25 mit der Stoßſtange DH ſo einrichten kan, daß HI
Fig. = W eine gegebene Gröſſe wird, ſo beſtimmt dies zugleich $n = \frac{W}{w}$. Nachdem nun die Stoßſtange jedesmal nur einen oder zwey Zähne des Sperrades fortſtoſſen ſoll, nach dem muß man W entweder mit der ganzen oder halben Anzahl der Zähne, die man dem

Rade geben will, multipliciren, um die Peripherie des Sperrades, und daraus ferner den zugehörigen Halbmeſſer zu finden, der alsdenn durch n dividirt, den Halbmeſſer der Trillinge giebt.

Ob man nur eine Säge in das Gatter ſetzen müſſe, oder ob es mehrere führen könne, läſt ſich aus dem Widerſtande derjenigen Holzart, und aus der Dicke derjenigen Stämme beurtheilen, welche die Mühle zerſchneiden ſoll. Wofern alles gleichförmig fortgehen ſoll, ſo muß der Widerſtand des Holzes dem doppelten Gewicht des Sägegatters gleich ſeyn. Wenn demnach R der Widerſtand iſt, den eine Säge allein antreffen würde, ſo giebt $\frac{2Q}{R}$ die Anzahl der Sägen, die zugleich ſchneiden können. Der Effect der Mühle wird alsdenn aus der Länge des Schnitts beurtheilet, den die Sägen in gegebener Zeit in den Klotz zuwege bringen, und in jeder gegebenen Zeit T wird die Länge dieſes Schnitts $= \frac{wT}{t}$ für jede einzelne Säge.

608. §.

Wer aus dem bisherigen Vortrage in den beiden letzten Abſchnitten gelernt hat, wie man die Anordnung der Stampfmühlen und Holz-Sägemühlen beurtheilen muß, und wie man allenfalls ſelbſt eine vortheilhafte Anordnung davon angeben könnte; dem wird es nicht ſchwer fallen, die Anordnung andrer Arten von Mühlen ebenfalls nach richtigen mechaniſchen Regeln zu beurtheilen, nur muß man mit den nöthigen Kenntniſſen von der Beſchaffenheit derjenigen Materien verſehen ſeyn, welche vermittelſt der Mühle zubereitet werden ſollen. So dienen z. E. in einer Marmor-

Schneidemühle keine gezähnte, ſondern vielmehr glatte Sägen, und um das Reiben zu verſtärken, zarter Sand, der in den Schnitt von Zeit zu Zeit geworfen wird, und um die Erhitzung der Säge zu verhindern, ein öfteres Beſprengen mit Waſſer. Die Sägen gehen bey dergleichen Mühlen horizontal, und ſind zu beiden Seiten mit einem Gewicht beſchweret, welches ſie gegen den Marmor-Block andrückt. Mit den Holz-Sägemühlen haben die Röhr- Bohr- und Teichelmühlen darin die meiſte Aehnlichkeit, daß auch hier ein Schiebwerk angeordnet werden muß, welches den Holz-Stamm, der hier gewöhnlich rund iſt, dem Bohrer entgegen rückt. Der Bohrer, welcher horizontal liegt, und um ſeine horizontale Axe läuft, hat gewöhnlich eine ſo beträchtliche Länge, daß er ſich biegen, auch das Holz nicht ſchnurgrade durchbohren würde, wenn man ihn nicht vermittelſt der ſo genannten Bohr-Brillen unterſtützte, die jedoch ſo angeordnet werden müſſen, daß ſie dem immer näher anrückenden Baum gehörig ausweichen. Man ſ. Belidors Archit. Hydraul. 712 §. Die Anordnung einer Flinten-Bohrmühle, und der damit verbundenen Polier-Mühle kan man aus Beyers Schauplatz der Mühlenbaukunſt XVIII. Cap. 109 u. f. S. kennen lernen.

Die

Die Pneumatik,

oder

die Theorie von der Bewegung elaſtiſcher flüſſiger Maſſen.

Der I. Abſchnitt.

Die erſten Gründe theoretiſcher Unterſuchungen über die Bewegungs-Geſetze elaſtiſcher flüſſiger Maſſen.

1 §.

Wenn die allgemeinen Theorien von den Bewegungs-Geſetzen unelaſtiſcher flüßiger Maſſen, dergleichen das Waſſer iſt, ſchon mit ſehr vielen Schwierigkeiten verbunden ſind; ſo iſt wohl leicht zum voraus abzuſehen, daß ſich die Schwierigkeiten noch mehr häufen müſſen, wenn man ähnliche Unterſuchungen über die Bewegungs-Geſetze elaſtiſcher flüßiger Maſſen, dergleichen die Luft iſt, anſtellet. Iſt man in der Hydraulik oft genöthiget, die Rechnungen auf ſolche Vorausſetzungen zu gründen, die in der Natur nicht völlig ſtatt haben, ſo geſchicht es theils um deswillen, damit man nicht auf gar zu ſehr verwickelte Formuln komme, theils auch aus der Urſache, weil man nicht einmahl alle

diejenigen Kräfte kennet, welche auf die Bewegung eines jeden einzelnen Waſſertheilchens Einfluß haben. Man muß ſich auch beym Vortrag der Pneumatik oder Aeromechanik mit ähnlichen Näherungen begnügen. Hr. Euler hat zwar in der Abhandlung Principes generaux du mouvement des fluides, welche im 158 §. der Hydraulik bereits angeführt iſt, gewieſen, wie ſich die Grundſätze der allgemeinen Mechanik auch hier anwenden laſſen, und wie man bey Auflöſung der hieher gehörigen Aufgaben die Rechnung führen müſte, wenn man alles genau nehmen wollte: allein er geſtehet auch ſelbſt, daß eine allgemeine Auflöſung der von ihm heraus gebrachten Differential-Gleichungen ſchwerlich zu hoffen ſey, und daß man ſich mit der Betrachtung einiger wenigen beſondern Fälle begnügen müſſe. M. ſ. die angeführte Abhandl. im XLI. §.

2 §.

In der Hydraulik heiſt jede unelaſtiſche flüßige Maſſe Waſſer, wenn es gleich flüßige Körper giebt, die andre Nahmen haben. Man kan in der Pneumatik ebenfalls jede elaſtiſche flüßige Maſſe Luft nennen, geſetzt daß es auch andere elaſtiſche flüßige Maſſen gäbe, die das eigentlich nicht ſind, was ſonſt Luft heiſſet. Die Luft hat mit dem Waſſer die Eigenſchaften der Flüßigkeit und der Schwere gemein, ſie unterſcheidet ſich aber vom Waſſer durch die Eigenſchaft der Federkraft. Eine beſtimmte Menge Waſſer mag ſich wie man will bewegen, ſo behält ſie doch während der Bewegung beſtändig einerley Dichtigkeit, ſo lange ſie eine zuſammenhängende Maſſe bleibt: aber die Dichtigkeit der Luft kan während

rend ihrer Bewegung mancherley Aenderungen leiden. Die Dichtigkeit und Federkraft der Luft hängen von einander ſo ab, daß eine nicht geändert werden kan, ohne daß zugleich die andre geändert wird, wenn die Wärme der Luft dieſelbe bleibt: allein das Geſetz iſt noch nicht zuverläßig bekannt, wie die Dichtigkeit und Federkraft der Luft von einander abhängen (75 §. Aeroſtat.). Die Wärme ſteht mit der Federkraft der Luft in einer ähnlichen Verbindung, und man ſiehet daraus, daß vielerley Urſachen auf die Bewegung der Luft Einfluß haben können, die man insgeſamt mit in Rechnung bringen muß, wenn die Unterſuchung vollſtändig ſeyn ſoll.

3 §.

Wenn die Luft, wie das Waſſer, allein ſchwer wäre, und keine Federkraft hätte, ſo lieſſe ſich die Luft wie das Waſſer in einem oben offenen Gefäß aufbehalten, und in demſelben würde ſie alsdenn im Gleichgewicht ſeyn, wenn ihre Oberfläche eben und horizontal wäre. Um die Luft im Gefäſſe zu erhalten, würde kein äuſſerer Druck von oben nöthig ſeyn: die Luft im Gefäſſe würde darin unveränderlich bleiben, wenn gleich das Gefäß nicht von allen Seiten mit Luft von eben der Dichtigkeit umgeben, oder wohl gar das Gefäß ſelbſt mit der darin enthaltenen Luft im leeren Raum befindlich wäre. Weil aber die Luft ſich wegen ihrer Federkraft nach allen Seiten, auch aufwärts, auszubreiten ſtrebt, ſo kan ſie nur in einem um und um verſchloſſenen Gefäß im Gleichgewicht ſeyn, wenn das Gefäß entweder im leeren Raum befindlich iſt, oder die Luft, welche das Gefäß umgiebt, mit der Luft im Gefäß nicht einer-

ley Federkraft hat. Die Luft wird durch jede Oefnung, ſie ſey oben oder unten, oder ſeitwärts, wo man will, befindlich, heraustreten; oder falls die Luft im Gefäß weniger Federkraft hat, als die, welche das Gefäß umgiebt, ſo wird die äuſſere Luft in das Gefäß hinein dringen. Man kan in allen dieſen Fällen fragen, wie groß die Geſchwindigkeit für jeden gegebenen Zeitpunct ſey, womit die Luft entweder aus dem Gefäß heraus oder in das Gefäß hinein dringt. Die Unterſuchung darüber läſt ſich auf eine ähnliche Art anſtellen, wie ſie in der Hydraulik über die Bewegung des Waſſers in Gefäſſen und Röhren angeſtellet iſt, nur ſiehet man wohl, daß der Umſtand eine vorläufige Unterſuchung verdiene, nach welchem Geſetz ſich die Dichtigkeit der in dem Gefäß befindlichen Luft binnen der Zeit ändere, da die Luft durch die Oefnung ſtreicht, wenn die Dichtigkeit dieſer Luft für den erſten Anfang der Bewegung als bekannt angenommen wird.

Ich werde dieſe Dichtigkeit der im Gefäß eingeſchloſſenen Luft für den erſten Anfang der Bewegung ihre urſprüngliche oder anfängliche Dichtigkeit nennen, wobey denn abermahl zu bemerken iſt, daß dieſe Dichtigkeit der eingeſchloſſenen Luft, ſo lange das Gefäß durchgängig verſchloſſen, und alles im Gleichgewicht iſt, vielleicht nicht durchgängig gleichförmig, oder an allen Stellen einerley ſey. Wenn das Gefäß beträchtlich hoch iſt, und man die ganze darin befindliche Maſſe Luft in ſehr dünne mit dem Horizont parallele Schichten in Gedanken eintheilt; ſo weiß man aus dem 4 §. Aeroſtat., daß die untern Schichten von dem Gewicht der obern zuſammen gedruckt werden, und daß die Dichtigkeit dieſer Schich-

ten

ten deſto gröſſer ſey, je tiefer ſie liegen. Dafern aber die Höhe des Gefäſſes nur geringe iſt, ſo läſt ſich ohne merklichen Fehler vorausſetzen, daß die eingeſchloſſene Luft anfangs eine gleichförmige Dichtigkeit habe, alſo in gleichen Theilen des innern Räums im Gefäſſe gleich viele Maſſe der Luft befindlich ſey. Mit eben derſelben Vorausſetzung muß man alsdenn auch noch dieſe verbinden, daß durch die ganze Maſſe einerley Wärme verbreitet ſey, weil bey ungleicher Wärme kein Gleichgewicht ſtatt haben könnte, woſern nicht die Luft am kältern Ort dichter wäre, als an wärmern Stellen. Ich werde deswegen allemahl durchgängig einerley Wärme vorausſetzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angenommen wird.

4. §.

Es ſey nun ABCD ein auf dieſe Art mit Luft angefülltes Gefäß, das von allen Seiten verſchloſſen, und entweder in einem völlig leeren Raum, oder doch wenigſtens in einer Luft befindlich iſt, die weniger Federkraft hat, als die eingeſchloſſene. Bey FG befinde ſich eine mit einem Hahn oder auf andre Art verſchloſſene Oefnung. Wenn dieſer Hahn im Boden des Gefäſſes oder ſeitwärts befindlich iſt, ſo wird die in dem Gefäß befindliche Maſſe, ſobald man den Hahn öfnet, allemahl aus dem Gefäß auslaufen, auch wenn ſie nicht elaſtiſch, ſondern allein ſchwer iſt. Und wenn dies erfolgt, ohne das oben ein neuer Zufluß angenommen wird, ſo ſinkt die höchſte Fläche AD immer tiefer, je länger der Ausfluß dauret, und wenn z. E. AD bis in *ad* gerückt iſt, ſo bleibt zwiſchen AD und *ad* ein leerer Raum, und die

27 Fig.

die im Gefäß noch übrige Maſſe *aBCd* hat noch die anfängliche Dichtigkeit. Ganz anders verhält es ſich, wenn die flüßige Maſſe elaſtiſch iſt: alsdenn kann über *ad* kein leerer Raum entſtehen, die Maſſe breitet ſich vielmehr beſtändig nach allen Seiten aus, und füllet den ganzen innern Raum des Gefäſſes. Je mehr Luft demnach durch die Oefnung FG austritt, deſto dünner wird die im Gefäß zurück bleibende Luft. Dies alles würde auch erfolgen, wenn gleich die Oefnung oben im Gefäß befindlich wäre, wodurch das Waſſer oder eine andre blos ſchwere unelaſtiſche flüßige Maſſe nicht ablaufen würde.

5 §.

Nun wird man natürlich auf die Frage verfallen, nach welchem Geſetz ſich die Luft im Gefäß verdünne, ſo wie nach und nach immer mehr heraus tritt. Um dieſer Unterſuchung gleich etwas mehr Allgemeinheit zu geben, ſtelle man ſich eine Röhre, wie

28 Fig.

AMFGND im 159 §. Hydraul. vor, KPQ ſey die centriſche Linie der auf ihr ſenkrechten Querſchnitte MN, und auf eben dieſe Linie ſey auch die Fläche der Oefnung FG ſenkrecht: ſo kan man annehmen, daß die in jedem Querſchnitt MN befindlichen Lufttheilchen mit gleichen Geſchwindigkeiten fortgehen, ſo bald nach Oefnung des Hahns bey FG alles in Bewegung kommt, da dann die Röhre oben in AD verſchloſſen angenommen wird. Wenn nun im Anfang der Bewegung die zunächſt bey FG liegenden Lufttheilchen heraus, und andre an ihre Stelle treten, ſo wird die innere Luft in dieſer Gegend dünner, als ſie anfangs war, und zugleich muß ſich die Luft nach der ganzen Länge der Röhre verdünnen. In dem

Zeittheilchen dt trete ſo viel Luft heraus, als den Raum FfgG füllt, deſſen Inhalt = FG . Qq iſt, und AMND ſey ein unbeſtimmtes Stück der im Anfang der Zeit dt in der Röhre befindlichen Luft, welches ſich binnen eben der Zeit dt in den Raum AmnD ausbreitet. Wofern man nun annehmen kan, daß ſich die Luft beſtändig gleichförmig ausbreitet, ſo daß für jede verfloſſene Zeit t ihre Dichtigkeit in allen Stellen der Röhre einerley iſt; ſo werden die Elemente $FfgG$ und $MmnN$ ſich wie die Räume $AFGD$ und $AMND$ verhalten. Es ſey nemlich die Dichtigkeit der Luft = Δ im Anfang des Zeittheilchens dt, und werde = δ am Ende deſſelben, ſo hat man $\Delta : \delta$ = AmnD : AMND, und $\Delta : \delta$ = AfgD : AFGD, folglich AmnD : AMND = AfgD : AFGD, alſo auch MmnN : AMND = FfgG : AFGD (189 §. Geom.).

Ob nun die Ausbreitung und Verdünnung der Luft im Gefäß würklich in der Natur nach dieſem Geſetz erfolge, das müſte noch genauer unterſucht werden. Wenn ein ſolches Gefäß, wie ABCD (27 Fig.), oder AFGD (28 Fig.) ſehr hoch wäre; ſo würde ſchon im Gleichgewichts-Zuſtande, bevor man den Hahn bey FG öfnete, die erwehnte Vorausſetzung nicht ſtatt haben. Die untern Schichten würden deſto mehr vom Gewicht der obern zuſammen gedrückt werden, je tiefer ſie liegen (4 §. Aeroſtat.), und die Dichtigkeit der Luft müſte als eine Function der centriſchen Linie betrachtet werden. In dem Fall, wenn durch Oefnung des Hahns der Luft der Ausgang verſtattet wäre, würde nun für jede Stelle der Röhre, oder des Gefäſſes, die Dichtigkeit der Luft ſich auch mit der Zeit t ändern, jedoch

ſo, daß für jede gegebene Zeit t die Dichtigkeit einer gegebenen Schichte noch von der Stelle abhienge, die ſie jetzt in der Röhre einnimmt. Wenn indeſſen das Gefäß nicht ſonderlich groß, und beſonders die Höhe deſſelben nicht beträchtlich iſt, ſo kann man, wegen der geringen eigenen Schwere der Luft ohne beträchtlichen Fehler, ihre Dichtigkeit nicht allein im Gleichgewichts-Zuſtande als gleichförmig betrachten, ſondern auch annehmen, daß ſie ſich während der Bewegung gleichförmig ausbreite. Die Herren Daniel Bernoulli Hydrod. Sect. X. §. 4. p. 202. und d'Alembert Traité des fluides Chap. IV. §. 192. p. 165. nehmen dieſe Vorausſetzung an, und man iſt nun im Stande zu beurtheilen, wie weit ſie einigermaſſen beſtehen könne.

6 §.

28 Fig. Es iſt für einen gewiſſen Augenblick die Geſchwindigkeit der durch die Oefnung FG ausſtrömenden Luft gegeben, man ſucht für eben den Augenblick ihre Geſchwindigkeit in einem gegebenen Querſchnitt MN der Röhre, vorausgeſetzt, daß ſich die Luft nach dem angenommenen Geſetz ausbreite.

Aufl. Indem ſich die Maſſe AFGD während der Zeit dt in den Raum $AfgD$ ausbreitet, wird ſich die Maſſe AMND in den Raum $AmnD$ ausbreiten, ſo daß $FfgG : MmnN = AFGD : AMND$ wird (5 §.). Wenn nun $\surd v$ und $\surd u$ die Geſchwindigkeiten der Luft in FG und MN ſind, ſo hat man $\surd v : \surd u = Qq : Pp$, und überdem $FfgG = FG . Qq$, ſo wie $MmnN = MN . Pp$; alſo wird $FG . Qq : MN . Pp = AFGD : AMND$, oder $Qq : Pp$

=

$= \frac{AFGD}{FG} : \frac{AMND}{MN}$, und man erhält $\sqrt{v} : \sqrt{u} = \frac{AFGD}{FG} : \frac{AMND}{MN}$, oder $\sqrt{u} = \frac{AMND.FG}{AFGD.MN} . \sqrt{v}$. Setzt man demnach den körperlichen Inhalt der Röhre AFGD = A, die Fläche der Oefnung FG = f, den Querſchnitt MN = z, und den Raum AMND = Z, ſo wird $\sqrt{u} = \frac{f.Z}{A.z} . \sqrt{v}$.

7 §.

Die Geſchwindigkeit iſt gegeben; womit die Luft für jede Zeit t durch die Oefnung FG ſtrömt, man ſucht wie groß eine Kraft ſeyn müſte, die gegen die Oefnung FG angebracht mit allen den Kräften im Gleichgewicht wäre, die dazu erfordert werden, die Bewegung der Luft nach dem angenommenen Geſetz zu ändern. 28 Fig.

Aufl. Wenn u und v wie im vor. §. die denjenigen Geſchwindigkeiten zugehörigen Höhen bedeuten, womit am Ende der Zeit t die Luft durch die Querſchnitte MN und FG ſtrömt, und überdem das unbeſtimmte Stück der centriſchen Linie KP = r, die Beſchleunigung des Elements MmnN für dieſen Augenblick = γ geſetzt wird; ſo hat man $\gamma dr = du$, und $u = \frac{f^2 . Z^2}{A^2 . z^2} . v$, folglich $\gamma dr = \frac{f^2 Z^2}{A^2 . z^2} dv + \frac{f^2 v}{A^2} d . \frac{Z^2}{z^2}$. Für eben dieſen Augenblick ſey die Dichtigkeit der Luft = δ, ſo iſt $\delta z dr$ die

Maſſe des Elements MmnN, und der darauf wür-kende Druck $= \gamma\delta z dr$. Dieſen ſetze man $= dV$, ſo erhält man $dV = \frac{\delta f^2 Z^2}{A^2 z} dv + \frac{\delta f^2 vz}{A^2} \times d \frac{Z^2}{z^2}$, und dieſer Druck auf die Oefnung FG reducirt (105 §. Hydraul.) giebt
$\frac{fdV}{z} = \frac{\delta f^3 Z^2}{A^2 z^2} dv + \frac{\delta f^3 v}{A^2} d . \frac{Z^2}{z^2}$. Wenn nun in der Zeit dt das Element FfgG ausſtrömt, und man Q$q = dw$ ſetzt, ſo hat man $fdw = \frac{A}{Z} zdr$, alſo $f = \frac{Azdr}{Zdw}$, und es wird $\frac{\delta f^3 Z^2}{A^2 z^2} = \frac{\delta f^2 Z}{Az} . \frac{dr}{dw}$, alſo $\frac{fdV}{z} = \frac{\delta f^2}{A} . \frac{dV}{dw} . \frac{Zdr}{z} + \frac{\delta f^3 v}{A^2} d . \frac{Z^2}{z^2}$. Setzt man noch die Länge der ganzen centriſchen Linie KPQ $= \lambda$, und das Stück QP $= s$, ſo hat man $s = \lambda - r$, und $dr = -ds$, ſo daß auch $\frac{fdV}{z} = - \frac{\delta f^2}{A} . \frac{dv}{dw} . \frac{Zds}{z} + \frac{\delta f^3 v}{A^2} d . \frac{Z^2}{z^2}$ wird, und das Integral

$$\int \frac{fdV}{z} = C - \frac{\delta f^2}{A} . \frac{dv}{dw} \int \frac{Zds}{z} + \frac{\delta f^3 v}{A^2} . \frac{Z^2}{z^2}.$$

(Man muß wie im 199 §. Hydraul. ſo integriren, daß allein s und die davon abhängende Gröſſe $\frac{Z}{z}$ als veränderlich betrachtet wird). Nun nehme man

man das Integral $\int \frac{Z}{z} ds$ ſo, daß es für $s = o$ verſchwindet, ſo findet man die beſtändige Gröſſe C, wenn man $s = \lambda$ ſetzt: alsdenn wird $\int \frac{fdV}{z} = o$, und $Z = o$. In eben der Vorausſetzung ſey $\int \frac{Z}{z} ds = K$, ſo wird $C = \frac{\delta f^2}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K$, und man erhält $\int \frac{fdV}{z} = \frac{\delta f^2}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \left(K - \int \frac{Z}{z} ds \right)$ $+ \frac{\delta f^3 v}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}$. Um dieſe Summe für die ganze Länge der Röhre zu haben, muß man $s = o$ ſetzen, ſo dann iſt $Z = A$, $z = f$, und $\int \frac{Zds}{z} = o$. Demnach erhält man für die ganze Röhre

$$\int \frac{fdV}{z} = \delta fv + \frac{\delta f^2}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K,$$

und dies iſt die geſuchte Kraft. Setzt man nun noch $dw = dt\sqrt{v}$, ſo wird $\int \frac{fdV}{z} = \delta fv$ $+ \frac{\delta f^2}{A} \cdot \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot K$; wenn demnach v eine gegebene Function von t iſt, ſo hat man für jede gegebene Zeit t die geſuchte Kraft.

8 §.

Es iſt für jede Zeit t die Dichtigkeit der im Gefäß noch übrigen Luft bekannt, man ſucht, wie groß eine Kraft ſeyn müſte, die gegen die 28 Fig.

Oef=

Oefnung FG angebracht, mit allen Kräften im Gleichgewicht wäre, die in dieſem Augenblick alle Elemente der Luft würklich beſchleunigen.

Aufl. Der oberſte Querſchnitt AD der Röhre wird wegen der Federkraft der Luft während der Bewegung einem Druck ausgeſetzt ſeyn, der für jedes Zeit-Moment von ihrer Dichtigkeit abhängt: und wenn im Anfang der Bewegung dieſer Druck $= \Pi$, die Dichtigkeit der Luft $= \Delta$, für jede andre Zeit t aber eben der Druck $= P$ und die Dichtigkeit der Luft $= \delta$ iſt: ſo hat man $\Delta : \delta = \Pi : P$ (nach dem Mariottiſchen Geſetz 75 §. Aeroſt.) alſo $P = \frac{\delta}{\Delta} . \Pi$. Auf der Grundfläche $AD = e$ ſtelle man ſich eine gleichförmig dichte, und unelaſtiſche Luftſäule vor, ihre Dichtigkeit ſey $= \Delta$, und ihre Höhe $= k$, ſo wird ihr Gewicht $= \Delta ek$. Weil ſich nun der Druck Π allemahl durch das Gewicht einer gleichartigen Säule auf der Grundfläche AD ausdrucken läſt, ſo nehme man $\Pi = \Delta ek$ an, damit $k = \frac{\Pi}{\Delta e}$ ſey. Alsdenn wird $P = \delta ek$, folglich auch $k = \frac{P}{\delta e} = \frac{\Pi}{\Delta e}$, weil $\frac{\Pi}{\Delta} = \frac{P}{\delta}$ iſt. Ob alſo gleich der Druck P veränderlich iſt, und von der Zeit t abhängt, ſo bleibt doch die Höhe der gleichartigen Luftſäule, deren Gewicht dieſem Druck gleich iſt, unveränderlich, wenn man für jedes Zeitmoment eine ſolche Luftſäule verſteht, die mit der im Gefäß noch übrigen Luft einerley Dichtigkeit

tigkeit hat. Dieſer Druck läſt ſich alsdenn wie im 196 §. Hydraul. auf jeden gegebenen Querſchnitt reduciren. Jeder unbeſtimmte Querſchnitt MN wird nun ebenfals einem Druck ausgeſetzt ſeyn, den man $= \delta . MN . p$ ſetzen, alſo durch das Gewicht einer eben ſo dichten Luftſäule ausdrücken kann, als die Luft im Gefäß für eben den Augenblick iſt, deren Grundfläche MN und Höhe p iſt. Für jede gegebene Zeit t wird nun δ ſeinen beſtimmten Werth haben: aber p wird noch von der Stelle des Querſchnitts MN in der Röhre abhängen, ſo daß p eine Function von r iſt, oder auch von s, wenn man $QP = QK - r = s$ ſetzt. Nun iſt das Gewicht des Elements $MmnN = \delta z dr = -\delta z ds$, und wenn $BO = x$ geſetzt wird, ſo iſt das relative Gewicht nach der Richtung der Bewegung $= -\delta z dx$. Betrachtet man alſo p als eine Function von r oder s, die um dp wächſt, wenn man $r + dr$ ſtatt r, oder $s - ds$ ſtatt s ſetzt; ſo iſt die Kraft, welche das Element nach der Richtung der Bewegung beſchleuniget, $= -\delta z(dx + dp)$ (197 §. Hydraul.) Daher entſteht nun gegen FG der Druck $-\delta f(dp + dx)$, und von allen Kräften zuſammen, die alle Elemente beſchleunigen, ein Druck $= -\delta f(p + x) + C$. Für $x = a$ iſt dieſe Summe $= 0$, und zugleich wird $p = k$, alſo erhält man $C = \delta f(k + a)$. Setzt man alſo die gefundene Summe $= S$, ſo erhält man $S = \delta f(k + a - p - x)$. Um dieſe Summe für die ganze Röhre zu haben, muß man $x = CQ = b$ ſetzen, ſo wird zugleich $p = 0$, und ſo findet man die geſuchte Kraft $S = \delta f(k + a - b)$.

9 §.

9 §.

28 Fig. Es iſt die Geſtalt des Gefäſſes *AFGD* gegeben, man ſucht das Geſetz, wonach ſich die Geſchwindigkeit der durch *FG* ausſtrömenden Luft ändert.

Aufl. Wenn $\sqrt{v}$ die geſuchte Geſchwindigkeit iſt, und alle bisherige Bezeichnungen bleiben; ſo ſetze man die im 7 und 8 §. gefundenen Kräfte einander gleich (199 §. Hydraul.) Dies giebt

$$\delta f v + \frac{\delta f^2}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K = \delta f(k+a-b),$$

alſo wird ferner $v + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} . K = k+a-b,$

oder auch $\frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} . K = k+a-b-v,$ woraus $\frac{Adw}{Kf} = \frac{dv}{k+a-b-v}$ folgt. Die Integration giebt $\frac{Aw}{Kf} = C - l(k+a-b-v)$, und weil w und v zugleich verſchwinden müſſen, ſo findet man $C = l(k+a-b)$, alſo $\frac{Aw}{Kf} = l\frac{k+a-b}{k+a-b-v}$.

Aus dieſer Gleichung folgt $\frac{k+a-b}{k+a-b-v} = e^{\frac{Aw}{Kf}}$, und $k+a-b-v = (k+a-b)\,e^{\frac{-Aw}{Kf}}$; demnach erhält man $v = k+a-b-(k+a-b)\,e^{-\frac{Aw}{Kf}}$.

10 §.

10 §.

Ich habe bey Auflöſung der Aufgabe des vor. §. das Verfahren gebraucht, deſſen ſich Herr Johann Bernoulli in der Hydraulik bedient, und welches ich im fünften Theil dieſes Lehrbuchs ausführlich zu erläutern bemühet geweſen bin. Man ſiehet nun leicht, wie man verfahren müſte, wenn man Herr Eulers Art, Hydrauliſche Aufgaben aufzulöſen, hier anwenden wollte. Das Element $Mmn N$ iſt der Würkung der bewegenden Kraſt $-\delta z(dx+dp)$ ausgeſetzt, und wenn man durch die Maſſe deſſelben $-\delta z ds$ dividirt, ſo wird $\frac{dx+dp}{ds} = -\frac{du}{ds}$.

Das giebt ferner

$$dx+dp = -\frac{f^2 Z^2}{A^2 z^2} dv - \frac{f^2 v}{A^2} d\frac{Z^2}{z^2},$$

und wenn noch hinter dem Gleichheitszeichen im erſten Gliede $f = -\frac{Azds}{Zdw}$ geſetzt wird; ſo erhält man $dp = -dx + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{Z}{z} ds - \frac{f^2 v}{A^2} d\frac{Z^2}{z^2}$.

Das Integral hievon iſt

$$p = C - x + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \int \frac{Z}{z} ds - \frac{f^2 v}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}.$$

Das Integral $\int \frac{Z}{z} ds$ nimmt man ſo, daß es für $s = 0$ verſchwindet; und wenn alsdenn dies Integral $= K$ wird, wenn man $s = \lambda$ ſetzt, ſo hat man zugleich $x = a$, $Z = 0$, und $p = k$. Dies giebt die beſtändige Gröſſe

C =

$C = k + a - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K$, folglich $p = k + a - x + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \left(\int \frac{Z}{z} ds - K \right) - \frac{f^2 v}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}$. Wird ferner $s = 0$ geſetzt, ſo muß $x = b$, und $Z = A$, $z = f$ genommen werden, da dann $p = 0$ wird. Alſo erhält man $0 = k + a - b - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K - v$, oder $\frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K = k + a - b - v$, wie im vor. §.

Man ſiehet wohl, daß die Richtigkeit der gegebenen Auflöſung auf die Richtigkeit der im 5 §. angenommenen Vorausſetzung von der gleichförmigen Ausbreitung der Luft beruhe, denn darauf gründet ſich die Gleichung $\sqrt{u} = \frac{f.Z}{A.z} \sqrt{v}$. Ueberdem aber gründet ſich die Rechnung noch auf eine andre Vorausſetzung, die einer nähern Erläuterung bedarf. Es wird nemlich angenommen, daß die Luft in der Oefnung FG, durch welche ſie heraus fährt, keinem weitern Druck von auſſen nach innen ausgeſetzt ſey, und deswegen ward für dieſe Oefnung wo $s = 0$ und $z = f$ war, $p = 0$ geſetzt. Man nimmt nemlich an, daß der Raum auſſerhalb des Gefäſſes ganz von Luft leer ſey, alſo iſt nichts vorhanden, das der durch FG heraustretenden Luft widerſtehen, und ſie von auſſen nach innen drücken könnte, und dies rechtfertiget die Vorausſetzung $p = 0$, wenn $s = 0$ und $z = f$ iſt. Der Druck, welchem jeder Querſchnitt ausgeſetzt iſt, und der hier für jeden unbeſtimmten Querſchnitt $= \partial z p$ geſetzt iſt, hat daher ſeinen Urſprung, weil nicht

nicht allein die hintere Maſſe AMND ſich gegen FG zu auszubreiten ſtrebt, ſondern auch die vordere MFGN gegen AD zu. Die Maſſe AMND kan ſich nicht plötzlich aus einem endlichen in einen unendlich groſſen Raum ausbreiten, ſondern es wird vielmehr eine gewiſſe Zeit erfordert, wenn der Raum, welchen AMND einnimmt, gröſſer werden ſoll. Um nun die übrige Vorſtellung zu erleichtern, betrachte man einmahl MFGN als eine unelaſtiſche Maſſe von unveränderlicher Dichtigkeit, die gegen FG zu fortflieſt: ſo ſiehet man wohl, daß ihre hintere Fläche MN nur ſo lange von der nachfolgenden elaſtiſchen Maſſe AMND einen Druck leiden kan, als die Geſchwindigkeit jener Maſſe die Geſchwindigkeit nicht übertrift, womit ſich AMND auszubreiten ſtrebt. Sobald beyde Geſchwindigkeiten gleich werden, muß aller Druck gegen MN aufhören. Eben die Bewandniß wird es mit der Sache haben, wenn auch MFGN elaſtiſch iſt, alsdenn wird dieſe Maſſe zwar auch gegen MN zu ſich auszubreiten ſtreben: weil aber eben dieſe Maſſe zugleich vorwärts geht, ſo wird der Druck gegen MN deſto geringer ſeyn, je gröſſer die Geſchwindigkeit ihrer Bewegung iſt. Demnach begreift man, wie der Druck, welchem jeder Querſchnitt MN ausgeſetzt iſt, von der Geſchwindigkeit der flüßigen Maſſe abhänge, und bey zunehmender Geſchwindigkeit geringer werden müſſe. Man begreift auch, daß MN eigentlich gar keinem Druck ausgeſetzt wäre, wenn die voranlaufende Maſſe nicht zurück drückte, theils wegen ihrer Federkraft, theils weil ſie vielleicht langſamer fortgeht, als die hintere zu folgen ſtrebt. Weil nun im Querſchnitt FG etwas dergleichen gar nicht mehr vorhanden iſt, das

der herausſtretenden Luft im Wege wäre, ſo muß daſelbſt gar kein Druck ſtatt haben. Ein ganz anders wäre es, wenn der Raum auſſerhalb des Gefäſſes auch mit Luft von geringerer Dichtigkeit, als im Gefäß angefüllt wäre, oder auch ſonſt noch andre Hinderniſſe der freyen Ausbreitung der Luft ſich widerſetzten, wie davon im folgenden Beyſpiele vorkommen werden. Ueberhaupt ſiehet man wohl, daß die im 10 §. gefundene Differentialgleichung für p die Fundamentalgleichung der ganzen Pneumatik ſey, und daß es bey der Anwendung auf eine beſondre hieher gehörige Aufgabe nur darauf ankomme, den Druck gegen die beyden äuſſern Querſchnitte AD und FG richtig in Rechnung zu bringen. Der Druck gegen FG iſt allemahl durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben: gegen AD aber drückt die eingeſchloſſene Luft mit ihrer jedesmahligen ganzen Federkraft, und ich werde, was dieſen Umſtand betrift, noch einige nöthige Erinnerungen beyfügen müſſen.

11 §.

Wenn gleich das Mariottiſche Geſetz der Federkraft der Luft, vermöge deſſen die Dichtigkeit und Federkraft einander proportional angenommen werden, bey mittelmäßig ſtarken Zuſammenpreſſungen durch Verſuche ſehr wohl beſtättiget iſt; ſo iſt doch auf der andern Seite wohl eben ſo gewiß, daß die Federkraft bey ſehr ſtarken Zuſammenpreſſungen in einem gröſſern Verhältniß wachſen müſſe, als die Dichtigkeit. Demnach wäre wohl zu wünſchen, daß man genauer wüſte, wie die Dichtigkeit und Federkraft der Luft von einander abhängen. Es iſt ſehr ſchwer, blos durch Verſuche dies Geſetz genauer

zu finden; und vielleicht noch ſchwerer, daſſelbe allein aus theoretiſchen Gründen herzuleiten, weil die eigentliche phyſikaliſche Urſache von der Federkraft der Luft wenigſtens ſo ſicher nicht bekannt iſt, daß man ohne alles fernere Bedenken die Rechnung darauf bauen könnte. Indeſſen hat es Hr. Euler verſucht, eine Theorie von der Elaſticität der Luft zu geben, nachdem Hr. Joh. Bernoulli die Federkraft der Körper überhaupt aus ähnlichen Gründen begreiflich zu machen geſucht hatte. Beyde nehmen an, daß die Federkraft der Körper ein Erfolg ſey von der Bewegung einer ſehr zarten in den innerſten Zwiſchenräumchen der Körper eingeſchloſſenen flüßigen Materie. Wenn dieſe Bewegung kreisförmig iſt, ſo entſteht daher die bekanntermaſſen ſo genannte Schwungkraft (124 §. Mech.) deren Gröſſe ſich berechnen läſt, wenn die Geſchwindigkeit der ſubtilen Materie, und ihre eigene Schwere bekannt ſind. Man muß ſich dieſer Vorausſetzung gemäß vorſtellen, daß die Luft aus einer unzehligen Menge zarter und hohler Kügelchen beſtehe, worin die erwehnte ſubtile Materie eingeſchloſſen iſt: je ſchneller dieſe Materie in einem ſolchen Kügelchen an deſſen Oberfläche im Wirbel umläuft, deſto ſtärkere Kraft ſich auszubreiten bekommt daſſelbe. Um den Mittelpunct eines jeden Kügelchens nimmt man einen leeren Raum an, der deſto kleiner wird, je ſtärker das Kügelchen durch eine äuſſere Gewalt zuſammen gedruckt wird: und wofern ſich die Zuſammenpreſſung ſo weit treiben läſt, daß dieſer leere Raum verſchwindet, ſo hat die Luft in dieſem Zuſtande ihren höchſten Grad der Federkraft, und die Zuſammenpreſſung läſt ſich alsdenn nicht weiter treiben. M. ſ. Joh.

Bernoulli Addition au Diſcours ſur les loix de la communication du mouvement. Oper. Tom. III. pag. 81. ſqq. L. Euleri Tentamen Explicationis Phoenomenorum aeris. Comment. Petrop. Tom. II. p. 347 ſqq.

Ich kan nicht ſagen, daß dieſe Erklärung der phyſicaliſchen Urſache der Federkraft für mich hinlänglich befriedigend wäre, und dies wird mich rechtfertigen, wenn ich die Rechnungen nicht umſtändlich herſetze, die Hr. Euler darauf gebauet hat. Indeſſen iſt die Gleichung zwiſchen der Dichtigkeit und Federkraft der Luft, welche Hr. Euler daraus herleitet, an ſich ſehr artig, und thut der Erfahrung, ſo weit man bisher hat Verſuche anſtellen können, ſehr wohl Genüge. Sollte ſich dies bey ſehr ſtarken Zuſammenpreſſungen eben ſo finden, ſo wird ſie wenigſtens als eine aus Erfahrungen geſchloſſene Regel gelten können. Um deswillen werde ich dieſe Gleichung herſetzen, und zugleich zeigen, in wie ferne die Auflöſungen der Aufgaben des 8 und 10ten §. geändert werden müſten, wenn dies vom Hrn. Euler angenommene Geſetz der Federkraft der Luft ſeine allgemeine Richtigkeit hätte.

12 §.

Wenn G die Dichtigkeit der natürlichen Luft bedeutet, und die gröſte Dichtigkeit, der die Luft überhaupt fähig iſt, $=q.G$ angenommen wird, die Dichtigkeit einer im geringern Grade zuſammen gepreßten Luft aber $=mG$ iſt; ſo findet Hr. Euler, daß ſich die Federkraft der natürlichen Luft zur Federkraft der $m$mahl dichtern Luft verhalte, wie $\sqrt[3]{q^2}$ —

$-\sqrt[3]{(q-1)^2} : \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}$, oder wie

$1 : \frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}}$. Es ſey alſo der höchſte Grad der Dichtigkeit der Luft $=\Theta$, die Dichtigkeit einer Luft, die nicht ſo ſehr zuſammengepreſt iſt, $=\delta$, ſo wird ihre Federkraft dem Gewicht einer natürlichen Luftſäule das Gleichgewicht halten, deren Höhe

$= \frac{\sqrt[3]{\Theta^2}-\sqrt[3]{(\Theta-\delta)^2}}{\sqrt[3]{\Theta^2}-\sqrt[3]{(\Theta-G)^2}} . k$, wenn die Federkraft der Atmoſphäre einer Säule das Gleichgewicht hält, deren Höhe $=k$ iſt. Wenn man $q . G$ ſtatt Θ, und mG ſtatt δ ſchreibt, ſo iſt die erwehnte Höhe

$$= \frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}} . k =$$

$$\frac{1-\sqrt[3]{(1-(m:q))^2}}{1-\sqrt[3]{(1-(1:q))^2}} . k.$$

Man hat Gründe zu glauben, daß der höchſte Grad der Dichtigkeit der Luft wenigſtens 800mahl gröſſer ſey, als die Dichtigkeit der natürlichen Luft, und dieſe Gründe werden unten zum Theil noch vorkommen. Wenn demnach m keine groſſe Zahl iſt, ſo hat man ziemlich nahe

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{m}{q}\right)^2} = \left(1-\frac{m}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \tfrac{2}{3} . \frac{m}{q}$$

$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{q^2}=1-\frac{2m}{3q}-\frac{m^2}{9q^2}$, und

$\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}=1-\frac{2}{3q}-\frac{1}{9q^2}$. (Man ſ. den 344 §. Hydraul.). Demnach hat man für die Federkraft einer Luft, welche $m$mahl dichter iſt, als die natürliche, die Höhe $=\frac{6mq+m^2}{6q+1}\cdot k=\left(m+\frac{m(m-1)}{6q+1}\right)\cdot k$, wo man auch $6q$ ſtatt $6q+1$ ſchreiben, und dieſe Höhe $=\left(m+\frac{m(m-1)}{q}\right)k$ annehmen kann. So lange demnach m nicht ſehr groß iſt, hat man ziemlich nahe dieſe Höhe $=mk$, wie es dem Mariottiſchen Geſetz gemäß iſt. Es ſey z. E. $m=16$, ſo wird $\frac{m(m-1)}{6q}=\frac{16.15}{6.800}=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, und die der Federkraft einer 16mahl dichter gemachten Luft zugehörige Höhe $=16\frac{1}{20}\cdot k$. Wenn m ſchon ziemlich groß iſt, ſo bleibt zwar dieſe Näherung nicht mehr hinlänglich, indeſſen iſt doch allemahl ziemlich nahe $\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}=1-\frac{6q+1}{9q^2}$, alſo $1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}=\frac{6q+1}{9q^2}$, und die der Federkraft der $m$mahl verdichteten Luft zugehörige Hö-

he wird $= \frac{9qq - 9q^2 \sqrt[3]{(1-(m:q))^2}}{6q+1} . k =$

$\frac{9qq - 9q\sqrt[3]{q(q-m)^2}}{6q+1} . k$, oder auch $=$

$\left(\frac{3}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt[3]{q(q-m)^2}\right) . \frac{1}{1+1:6q} . k$, da

dann $\frac{1}{1+(1:6q)}$ beynahe $= 1 - \frac{1}{6q}$ iſt.

Wird nun $q = 800$ angenommen, ſo verwandelt ſich der Ausdruck in folgenden

$$(1200 - 3\sqrt[3]{100(800-m)^2})\left(1 - \frac{1}{4800}\right)k.$$

Man nehme z. E. $m = 100$, ſo findet man $\sqrt[3]{49000000} = 365,9306$, und die der Elaſticität zugehörige Höhe $= 102,186 . k$, woraus ſich denn ergiebt, daß die Euleriſche Hypotheſe von der Mariottiſchen ſo lange nicht merklich abweiche, als m die Zahl 100 nicht übertrift.

So lange demnach im 8 und 10 §. Δ nicht gröſſer als 100.G angenommen wird, ſo lange können die mitgetheilten Auflöſungen unverändert beybehalten werden. In andern Fällen muß man der Euleriſchen Hypotheſe gemäß denjenigen Werth von p, welcher dem Werth $x = a$ zugehört, ſo beſtimmen. Es wird angenommen, daß für den jetzigen Augenblick die Dichtigkeit der Luft im Gefäß $= \delta = mG$ ſey, alſo drückt dieſe Luft gegen AD ſo ſtark, als wenn eine gleichartige unelaſtiſche Luftſäule von der Dichtigkeit G darüber ſtünde in der Höhe

$$\left(\tfrac{3}{2}q - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{q(q-m)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6q}\right)k.$$

Dieſe Höhe ſey $=\alpha$, ſo iſt der Druck $= G.AD.\alpha$. Man ſtelle ſich über AD eine andre gleichartige Luftſäule in der Höhe $=\beta$ vor, deren Dichtigkeit $=\delta$ iſt, und nehme ihr Gewicht eben ſo groß, als das vorige an, ſo hat man $\delta.AD.\beta = G.AD.\alpha$, folglich $\beta = \frac{G}{\delta}\alpha$, und dies iſt nunmehro der Werth von p, welcher den Werth $x=a$ zugehört. Man muß

$$p = \frac{1}{m}\left(\tfrac{3}{2}q - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{q(q-m)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6q}\right)k$$

annehmen, wenn $x=a$ geſetzt wird; auf ſolche Art bekömmt nun k in der Differential-Gleichung des 9 und 10 §. den Factor

$$\frac{1}{m}\left(\tfrac{3}{2}q - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{q(q-m)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6q}\right),$$ und

$m = \frac{\delta}{G}$ iſt veränderlich, worauf bey Integration der Gleichung zwiſchen v und w Rückſicht genommen werden muß. In ſolcher Abſicht muß man wiſſen, wie ſich δ durch w ausdrücken läſt, welches die folgende Aufgabe zeigen wird.

13 §.

28 Fig. Die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Gefäß *AFGD* iſt gegeben, nebſt der Geſtalt und Gröſſe des Gefäſſes: man ſucht das Geſetz, nach welchem ſich die Dichtigkeit der im Gefäß zurück bleibenden Luft ändert, indem

 durch

durch die Oefnung *FG* beſtändig ein Theil von ihr heraus bläſet.

Aufl. Es ſey die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Gefäß $=\Delta$, und ihre jetzige Dichtigkeit $=\delta$, die Größe des Gefäſſes nach ſeinem körperlichen Inhalt $=A$; ſo iſt die im erſten Anfang der Bewegung im Gefäß befindliche Maſſe Luft $= A.\Delta$, und die jetzt darin befindliche Maſſe iſt $=A.\delta$. Wenn demnach ſeit dem Anfang der Bewegung die Zeit t verfloſſen iſt, ſo iſt binnen dieſer Zeit die Menge $A.\Delta - A.\delta$ ausgetreten. Dieſe Menge ſey $=M$, ſo hat man $dM = -Ad\delta$, und um ſo viel wird die im Gefäß befindliche Menge Luft in der Zeit dt abnehmen. Weil nun in dieſem Zeittheilchen die Menge $\delta f dw$ austritt, ſo hat man $\delta f dw = -Ad\delta$, folglich $\frac{f}{A}dw = -\frac{d\delta}{\delta}$, und die Integration giebt $\frac{f}{A}w = C - l\delta$. Weil nun dem Werth $w=0$ der Werth $\delta=\Delta$ zugehört, ſo wird $\frac{f}{A}w = l\Delta - l\delta = l\frac{\Delta}{\delta}$, und daraus folgt $e^{fw:A} = \frac{\Delta}{\delta}$, wenn e die baſin der natürlichen Logarithmen bedeutet; da dann ferner $\delta = \frac{A}{e^{fw:A}}$ gefunden wird.

Nunmehro läſt ſich vollſtändig überſehen, was man im 9 und 10 §. der Euleriſchen Hypotheſe gemäß für eine Gleichung zwiſchen v und w erhalten

 würde.

würde. Statt m ſchreibe man $\frac{\delta}{G} =$ $\frac{\Delta}{G} e^{-fw:A}$ in dem am Ende des vor. §. gefundenen Factor von k, ſo wird $\frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K =$

$$\frac{G}{\Delta} e^{fw:A}\left(\tfrac{3}{2}q - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{q\left(q - \frac{\Delta}{G} e^{-fw:A}\right)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6q}\right)k + a - b - v,$$

oder auch

$$\frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K = a - b - v + \left(\frac{3}{2} \frac{qG}{\Delta} e^{fw:A} - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{qG}{\Delta} e^{fw:A}\left(\frac{qG}{\Delta} e^{fw:A} - 1\right)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6q}\right)k$$

Man ſiehet wohl, daß die Integration dieſer Gleichung ungleich weitläuftigere Rechnungen erfordern würde, als im 9 §. nöthig wären, wo ſich alles auf die Mariottiſche Hypotheſe gründete. Ich würde hier um deswillen berechtiget ſeyn, bey der Mariottiſchen Hypotheſe zu bleiben, weil ich gröſtentheils nur auf ſolche Fälle die Anwendung machen werde, wo beide Hypotheſen ſehr nahe einerley Reſultat geben, und das geſchicht, wie man aus dem bisherigen abnehmen kan, gewiß alsdenn, wenn die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Gefäß die Dichtigkeit der natürlichen Luft weniger als 100 mahl übertrift. Weil alsdenn nach der Euleriſchen Hypotheſe die der Federkraft der Luft zugehörige Höhe $=$ $\left(m + \frac{m(m-1)}{6q}\right)k$ angenommen werden

kan,

kan, ſo lieſſe ſich auch folgende Gleichung brauchen

$$\frac{f}{A}\cdot\frac{dv}{dw}.K=\left(1+\frac{\Delta e^{fw:A}-G}{6qG}\right)k$$
$$+a-b-v.$$

14 §.

Die Geſtalt des Gefäſſes *AFGD* iſt, wie im 9 §. gegeben, man ſucht das Geſetz, wonach ſich die Geſchwindigkeit der Luft ändert, wenn der Raum auſſerhalb des Gefäſſes ebenfalls mit Luft, jedoch von geringerer Dichtigkeit, als die innere angefüllt, und überdem in Vergleichung mit dem innern Raum des Gefäſſes ſehr groß iſt.

Aufl. Man kan aus dem 12 §. die Gleichung

$$p=k+a-x+\frac{f}{A}\cdot\frac{dv}{dw}$$
$$\times\left(\int\frac{Z}{z}\,ds-K\right)-\frac{f^2v}{A^2}\cdot\frac{Z^2}{z^2}$$

brauchen, nur muß p für den Werth $s=0$ anders angenommen werden. Wenn nemlich die Dichtigkeit der äuſſern Luft = D geſetzt wird, ſo wird ſich D nicht merklich ändern, wenn die Luft aus dem Gefäß in den äuſſern Raum tritt. Nun ſey für einen gewiſſen Augenblick die Dichtigkeit der innern Luft $=\delta$, und der Druck der äuſſern Luft gegen die Oefnung AD ſey $=\Pi$. Wenn dieſer Druck durch das Gewicht einer Luft-Säule von eben der Dichtigkeit mit der äuſſern Luft ausgedrückt, und ihre Höhe $=\alpha$ geſetzt wird; ſo hat man $\Pi=D.AD.\alpha$. Der Druck der innern Luft gegen dieſe Fläche war = P

$=\delta . AD . k$, und es iſt $P:\Pi=\delta:D$; alſo $\delta . AD . k : D . AD . \alpha = \delta : D$, folglich $\alpha = k$. Demnach iſt der Druck der äuſſern Luft gegen die Oefnung FG $= D . f . k$. Wird aber eben dieſer Druck durch das Gewicht einer Luftſäule von einerley Dichtigkeit mit der innern Luft ausgedrückt, und alsdenn ihre Höhe $=q$ geſetzt, ſo wird derſelbe $=\delta f q$. Weil nun $\delta f q = D f k$ ſeyn muß, ſo erhält man $q = \frac{D}{\delta} k$. Nun ſiehet man wohl, daß $p = q = \frac{kD}{\delta}$ ſeyn müſſe, wenn $s = 0$ iſt, und dieſe Vorausſetzung giebt

$$\frac{kD}{\delta} = k + a - b - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} . K - v.$$

Wenn man die Bernoulliſche Art zu ſchlieſſen hier anwenden will, ſo muß man in dem Ausdruck für S im 8 §. die Werthe $x = b$ und $p = \frac{kD}{\delta}$ ſetzen, um die Summe S für die ganze Röhre zu haben, da dann der Werth

$$S = \delta f \left(k + a - b - \frac{K . D}{\delta} \right)$$ der Kraft

$$\delta f v + \frac{\delta f^2}{A} \cdot \frac{dv}{dw} . K$$ (7 §.) gleich

geſetzt, eben die Gleichung für die jetzige Aufgabe giebt.

Man ſetze nun den Werth $e^{\frac{\Delta}{fw:A}}$ (13 §.) ſtatt δ in die Gleichung zwiſchen v und w, ſo wird

$=$ kD

$$\frac{kD}{\Delta} e^{fw:A} = k+a-b-\frac{f}{A}.\frac{dv}{dw}.K-v,$$

oder $v dw + \frac{Kf}{A} . dv = (k+a-b) dw$

$- \frac{kD}{\Delta} e^{fw:A} dw$, oder auch

$$dv + \frac{A}{Kf} v dw = \frac{A}{Kf} (k+a-b) dw$$

$- \frac{A}{Kf} . \frac{kD}{\Delta} e^{fw:A} dw$. Kürze halber

ſetze man $\frac{A}{Kf} = n$, und multiplicire mit e^{nw},

ſo wird $e^{nw} dv + nve^{nw} dw = n(k+a-b)e^{nw} dw$

$- \frac{kD}{\Delta} ne^{fw:A+nw} dw$, und man erhält die Integralgleichung $e^{nw} v = (k+a-b) e^{nw}$

$$- \frac{kD}{\Delta} . \frac{n}{(f:A)+n} e^{((f:A)+n)w} + C.$$

Weil nun v und w zugleich verſchwinden müſſen, ſo

wird $C = -(k+a-b) + \frac{kD}{\Delta} . \frac{n}{f:A+n}$.

Wenn man dieſen Ausdruck ſtatt C ſetzt, und alsdenn durch e^{nw} dividirt, ſo erhält man

$$v = k+a-b-(k+a-b) e^{-nw} + \frac{kD}{\Delta}$$

$$. \frac{n}{f:A+n} e^{-nw} - \frac{kD}{\Delta} . \frac{n}{f:A+n} e^{fw:A}.$$

15 §.

15 §.

30 Fig. In dem Gefäß *ABCD*, welches mit einem andern *EFHI* vermittelſt der Oefnung *FG* zuſammen hängt, befindet ſich anfangs Luft von der Dichtigkeit Δ, und dieſe tritt durch die Oefnung *FG* in das Gefäß *EFHI* hinüber, worin anfangs eine dünnere Luft von der Dichtigkeit *G* war: man ſucht das Geſetz, nach welchem ſich die Geſchwindigkeit der Luft ändert.

Aufl. Es ſey der innere Raum des Gefäſſes ABCD bis an die Oefnung FG genommen, $= A$, und der innere Raum des Gefäſſes EFHI $= B$; die anfängliche Dichtigkeit der Luft in dem Raum A ſey $= \Delta$, und in dem Raum B ſey ſie $= G$. Wenn nun nach Verlauf einiger Zeit δ aus Δ und γ aus G geworden iſt; ſo iſt $\delta < \Delta$ und $\gamma > G$, die während dieſer Zeit aus A in B hinüber getretene Maſſe iſt $= A\Delta - A\delta = B.\gamma - B.G$; und daraus erhält man $\gamma = G + \frac{A(\Delta - \delta)}{B}$. Wenn man nun auf die Schlüſſe des vor. §. zurück gehet, ſo ſiehet man leicht, daß auch hier die Gleichung

$$\frac{kD}{\delta} = k + a - b - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} . K - v$$

ihre Anwendung finde, nur mit dem einzigen Unterſcheid, daß hier D veränderlich iſt, und der hier angenommenen Bezeichnung gemäß γ ſtatt D geſchrieben werden muß. Wenn man nun den Werth $G + \frac{A(\Delta - \delta)}{B}$ ſtatt D ſetzt, ſo wird $\frac{kG}{\delta}$

+

$$+\frac{kA(\Delta-\delta)}{B\delta}=k+a-b-\frac{f}{A}\cdot\frac{dv}{dw}$$

$.K-v.$ Ferner bleibt $\delta=e^{\frac{\Delta}{fw:A}}$, alſo iſt

$$\Delta-\delta=\Delta\left(1-e^{\frac{1}{fw:A}}\right), \text{ und } \frac{\Delta-\delta}{\delta}$$

$=e^{fw:A}-1$; demnach erhält man

$$\frac{kG}{\Delta}e^{fw:A}+\frac{kAe^{fw:A}}{B}-\left(\frac{kA}{B}+\frac{G}{\Delta}k\right)+a$$

$-b-\frac{f}{A}\cdot\frac{dv}{dw}.K-v$, und daraus folgt

$$vdw+\frac{Kf}{A}dv=\left(k\left(1+\frac{A}{B}\right)+a-b\right)dw$$

$$-\left(\frac{G}{\Delta}+\frac{A}{B}\right)ke^{fw:A}dw, \text{ oder}$$

$$dv+\frac{A}{Kf}vdw=\frac{A}{Kf}\left(\frac{A+B}{B}.k+a-b\right)dw$$

$$\frac{A}{Kf}\cdot\frac{A.\Delta+B.G}{B.\Delta}ke^{fw:A}dw.$$

Wenn man nun die Vergleichung mit dem vor. §. anſtellt, ſo ergiebt ſich, daß die dortige Differentialgleichung zwiſchen v und w von der hieſigen nur in Anſehung zweyer beſtändigen Coefficienten verſchieden ſey. Wenn demnach auch hier $\frac{A}{Kf}=n$ geſetzt

ſetzt wird, und man ſchreibt in der Integralgleichung des vor. §. $\frac{A+B}{B}k+a-b$ ſtatt $k+a-b$, und $\frac{G}{\Delta}+\frac{A}{B}$ ſtatt $\frac{D}{\Delta}$, ſo wird für den gegenwärtigen

$$\text{Fall } v = \left(\frac{A+B}{B}k+a-b\right)\left(1-e^{-\frac{nw}{\Delta}}\right)$$

$$+\left(\frac{G}{\Delta}+\frac{A}{B}\right)\cdot\frac{n}{f:A+n}ke^{-\frac{nw}{\Delta}}$$

$$-\left(\frac{G}{\Delta}+\frac{A}{B}\right)\frac{n}{f:A+n}\cdot ke^{-fw:A}.$$

Wenn man B = ∞ ſetzt, ſo hat man den Fall des vor. §. und das hieſige G iſt alsdenn das, was dort D war.

Der II. Abſchnitt.

Die Bewegung der Luft durch kleine Oefnungen.

16 §.

Wenn die Oefnung FG = f des im 7-10 §. betrachteten Gefäſſes nur klein, der körperliche Inhalt des Gefäſſes = A aber beträchtlich groß iſt; ſo iſt $\frac{A}{f}$ eine ſehr lange Linie, und $\frac{A}{Kf}$ wird eine ſehr groſſe Zahl, beſonders, wenn die Querſchnitte des

Gefäſſes ſehr groß ſind: denn alsdenn wird das Integral K in Vergleichung mit $\frac{A}{f}$ nur klein ausfallen.

Nun war im 9§. $v = k + a - b - (k + a - b)e^{-\frac{Aw}{Kf}}$, demnach wird in der angenommenen Vorausſetzung $e^{-\frac{Aw}{Kf}}$ ein ſehr kleiner Bruch, wenn gleich w nur noch eine ſehr geringe Länge iſt, und man hat beynahe $v = k + a - b$. Eigentlich iſt dies eine Grenze, der ſich v ohne Aufhören, jedoch ſehr ſchnell nähert und man kan ſehr bald dieſe Grenze für den würklichen Werth von v annehmen. Iſt nun das Gefäß ſehr hoch, ſo wird auch k in Vergleichung mit $a - b$ ſehr groß ſeyn, ſo daß man $v = k$ annehmen kann. Wenn die centriſche Linie horizontal liegt, ſo ſind a und b an ſich $= 0$, und man hat $v = k - ke^{-\frac{Aw}{Kf}}$. Stünde das Gefäß vertical und hätte oben eine Oefnung, ſo wäre $a = 0$, und $v = k - b - (k - b)e^{-\frac{Aw}{Kf}}$: wenn aber die Oefnung unten im Boden befindlich wäre, ſo hätte man $b = 0$, und $v = k + a - (k + a)e^{-\frac{Aw}{Kf}}$. In allen Fällen werden a und b in Vergleichung mit k ſehr klein ſeyn, und man kan k ſtatt $k + a - b$ ſchreiben. In allen Fällen alſo, wenn die Oefnung klein und das Gefäß ſehr weit und groß iſt, wird die Geſchwindigkeit der durchziehenden Luft beynahe beſtän-

dig der Höhe k zugehören, vorausgeſetzt, daß der Raum auſſerhalb des Gefäſſes völlig leer ſey.

17 §.

Die Differentialgleichung im 11 §. $\frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K = k + a - b - v$ führt auf eben dies Reſultat, wenn man annimmt, daß $\frac{A}{f}$ eine ſehr groſſe Zahl ſey: ſie giebt $v = k + a - b$, oder $v = k$, wenn $a - b$ in Vergleichung mit k auch wegbleibt. Aus der Integralgleichung ſiehet man deutlicher, was es eigentlich damit für eine Bewandniß habe, und nach welchem Geſetz v anfangs wachſe. Vergleicht man hiemit die Schlüſſe des 14 und 15 §. ſo ſiehet man wohl, daß die Differentialgleichung

$$\frac{k\gamma}{\delta} = k + a - b - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K - v$$

allemahl die Geſchwindigkeit der Luft gebe, womit ſie durch die Oefnung eines Gefäſſes aus demſelben herausbläſet, wenn ihre Dichtigkeit im Gefäß $= \delta$, und die Dichtigkeit der Luft auſſerhalb dem Gefäß $= \gamma$ iſt, beyde Dichtigkeiten δ und γ mögen ſich, wie man will ändern. Weis man alsdenn, wie γ und δ von w abhängen, ſo muß man beyde durch w ausdrücken und alsdenn durch Hülfe der Integralrechnung eine Gleichung zwiſchen v und w ſuchen. Es ſey demnach $\frac{\gamma}{\delta} = W$ und W eine Function von w ſo verwandelt ſich die Differentialgleichung in folgende

$$dv + \frac{A}{Kf} v dw = \frac{A}{Kf}(k + a - b - kW)dw.$$

Man

Man ſetze $\frac{A}{Kf} = n$, und multiplicire mit e^{nw}, ſo erhält man

$$e^{nw} dv + v \cdot e^{nw} \cdot ndw = (k+a-b)e^{nw} \cdot ndw$$
$$- kWe^{nw} ndw,$$

und die Integration giebt

$$e^{nw} v = e^{nw}(k+a-b) - k\int We^{nw} ndw + C.$$

Das Integral $\int We^{nw} ndw$ ſey $= S$, und man nehme es ſo, daß es mit w zugleich verſchwinde, ſo wird $C = -(k+a-b)$, und man erhält

$v = k+a-b-(k+a-b)e^{-nw} - kSe^{-nw}$. Weil $We^{nw} ndw = We^{nw} ndw + e^{nw} dW - e^{nw} dW$, ſo wird $S = W \cdot e^{nw} - \int e^{nw} dW + E$, und $v = k+a-b-(k+a-b)e^{-nw} - k \cdot W + ke^{-nw} \int e^{nw} dW - kE \cdot e^{-nw}$.

In allen Fällen alſo, wenn n eine ſehr groſſe Zahl iſt, nähert ſich v ſehr ſchnell dem Werth $k+a-b-kW$; oder es wird $v = k - \frac{k\gamma}{\delta}$, weil $W = \frac{\gamma}{\delta}$ war und $a-b$ in Vergleichung mit k weggelaſſen werden kann.

18 §.

Man muß ſich aus dem 8 §. erinnern, daß k die Höhe einer gleichförmig dichten unelaſtiſchen Luftſäule auf der Grundfläche AD bedeute, deren Gewicht dem Druck der innern Luft gegen AD das Gleichge- 28 Fig.

 wicht

wicht hält. Wenn dieſer Druck $= P$, und die Dichtigkeit der innern Luft $= \delta$ iſt, ſo hat man $k = \frac{P}{\delta . AD}$, und das Verhältniß $\frac{P}{\delta}$ iſt unveränderlich, wenn ſich gleich δ ändert. Für den Fall, wenn δ die mittlere Dichtigkeit der natürlichen Luft nahe an der Erdfläche bey mittelmäßiger Wärme bedeutet, iſt das Verhältniß $\frac{P}{\delta}$ bekannt, und man kan k ein für allemahl auf folgende Art berechnen. Die erwehnte mittlere Luft iſt etwa 800 mahl geringer, als die Dichtigkeit des Waſſers, und die Dichtigkeit des Waſſers etwa 14 mahl geringer, als die Dichtigkeit des Queckſilbers; folglich die mittlere Dichtigkeit der Luft etwa 800×14 d. i. 11200 mahl geringer als die Dichtigkeit des Queckſilbers. Wenn alſo die letztere $= D$ geſetzt wird, ſo kan man $\delta = \frac{1}{11200} D$ annehmen. Nun muß man durch P den Druck der natürlichen Luft bey mittlerer Dichtigkeit gegen die Fläche AD verſtehen, da dann $P = D . AD . h$ wird, wenn h die mittlere Höhe des Barometers bedeutet. Dies giebt $k = \frac{D}{\delta} . h = 11200\, h$, und weil h etwa 28 Pariſer Zoll oder $2\frac{1}{3}$ Pariſer Fuß beträgt, ſo wird $k = 26133$ Par. F. oder in einer runden Zahl 26000 Par. F. Dieſe letztere Zahl nimmt Hr. Daniel Bernoulli an, in der Hydrodyn. Sect. X. §. 36. pag. 227. und das bisherige wird ſeinen Vortrag im 32 und 34 §. näher erläutern, und beſonders die Richtigkeit ſeiner Auflöſung der Aufgabe des 34 §. beſtättigen. Im engliſ. Maaß wird $k = \frac{1440}{1350} . 26133 = 27575$ Fuß, wofür man auch die

die runde Zahl 27600 Fuß annehmen kan. Im Rheinländiſchen Maaß wird dieſe Höhe $k = \frac{14400}{13917} \cdot 26133 = 27048$ Fuß, oder ohngefehr 27000 Fuß.

19 §.

Die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Gefäß iſt gegeben, nebſt der Gröſſe des Gefäſſes, man ſucht die Zeit binnen der eine gegebene Menge Luft heraus und in einen leeren Raum hinüber tritt.

Aufl. Wenn der körperliche Inhalt des Gefäſſes $= A$, die anfängliche Dichtigkeit der Luft $= \Delta$, ihre Dichtigkeit nach Verlauf der Zeit t aber $= \delta$ bleibt, ſo iſt die binnen der Zeit t ausgetretene Menge $= A . \Delta - A . \delta$; und ihr Differential $- A d\delta = \delta f dw$, wie im 13 §. Alſo hat man zwiſchen δ und w auch hier die Gleichung $\frac{f}{A} w = l \frac{\Delta}{\delta}$. Ferner hat man $dw = dt\sqrt{k}$, weil hier $v = k$ iſt, alſo $w = t\sqrt{k}$, und es wird $\frac{f}{A} t\sqrt{k} = l \frac{\Delta}{\delta}$, da dann $2t\sqrt{g}$ ſtatt t geſchrieben werden muß, wenn t in Secunden ausgedrückt wird. Man erhält alſo $t = \frac{A}{2f\sqrt{gk}} l \frac{\Delta}{\delta}$, und daraus läſt ſich t finden, wenn die ausgetretene Menge Luft gegeben iſt. Dieſe ſey nemlich $= M$, ſo iſt $A . \Delta - A . \delta = M$, alſo $A . \delta = A . \Delta - M$, und $\delta = \frac{A . \Delta - M}{A}$. Weil nun M allemahl nur ein Theil von $A . \Delta$ ſeyn muß, ſo ſey n ein Bruch, welcher ausdrückt, was M für ein Theil von $A . \Delta$ ſeyn ſoll,

 damit

damit $M = n.A.\Delta$ geſetzt werden könne. Dies giebt alsdenn $\delta = \frac{A.\Delta - n.A.\Delta}{A} = \Delta(1-n)$,

und $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{1-n}$, folglich wird $t = \frac{A}{2f\sqrt{gk}} \cdot l\frac{1}{1-n}$, da dann n allemahl kleiner als 1 genommen werden muß.

Um die Zeit zu finden binnen der ſich das ganze Gefäß ausleeren würde, müſte man $M = A.\Delta$ ſetzen, und dies würde $A.\delta = A.\Delta - M = 0$, alſo $\delta = 0$, und $n = 1$ geben, und ſo würde t unendlich groß ausfallen: das heiſt, das Gefäß kann ſich nie ganz ausleeren.

20 §.

Im 10 §. ward $p = k + a - x + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \times \left(\int \frac{Z}{z} ds - K\right) - \frac{f^2 v}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}$ gefunden; wo man auch $a - x$ in Vergleichung mit k weglaſſen kann. Wenn man nun die Vorausſetzung, daß A ſehr groß, und f ſehr klein ſey, beybehält, ſo iſt beynahe beſtändig $v = k$, und nicht allein $\frac{f}{A}$ ein ſehr kleiner Bruch, ſondern man kan auch $\frac{dv}{dw} = 0$ annehmen, weil ſich v nicht merklich mehr ändert, ſobald w etwas beträchtlich iſt: demnach hat man alsdenn $p = k + a - x - \frac{f^2}{z^2} \cdot \frac{Z^2}{A^2} . k$. In dieſer Formul

iſt $a-x$ die Höhe des oberſten Querſchnitts AD über die gegebene Stelle der Röhre, und $\frac{f^2}{z^2} \cdot \frac{Z^2}{A^2} \cdot k$ die derjenigen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe womit ſich die Luft in dem Querſchnitt MN $= z$ bewegt (6 §.). Die Vergleichung mit dem 215 §. Hydrl. ergiebt, daß dieſe Formul eine völlige Aehnlichkeit mit derjenigen habe, die den Druck ausdrückt, welchem das Waſſer in jedem unbeſtimmten Querſchnitt ausgeſetzt iſt, wenn es aus einem beſtändig vollen Gefäß durch eine kleine Oefnung abflieſt.

21 §.

In dem Gefäß *AFGB* befindet ſich anfangs Luft, die dichter iſt, als die äuſſere, welche das Gefäß umgiebt: man ſucht das Geſetz, wonach ſich die Geſchwindigkeit der Luft ändert, vorausgeſetzt, daß die Oefnung *FG* ſehr klein ſey, die Dichtigkeit der äuſſern Luft aber durch den beſtändigen neuen Zufluß nicht merklich geändert werde. 28 Fig.

Aufl. Die allgemeine Gleichung für die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe war $v = k + a - b$
$$- (k+a-b)e^{-nw} + \frac{kD}{\Delta} \cdot \frac{n}{f:A+n} e^{-nw}$$
$$- \frac{kD}{\Delta} \cdot \frac{n}{f:A+n} e^{fw:A}$$ (14 §.) Weil nun der angenommenen Vorausſetzung gemäß $\frac{A}{Kf} = n$ eine ſehr groſſe Zahl iſt, ſo wird ſehr bald e^{-nw} ein ſo kleiner Bruch, daß man $v = k + a - b$ —

$-\frac{kD}{\Delta}\cdot\frac{n}{f:A+n}e^{fw:A}$ annehmen kan. Ueberdem iſt alsdenn beynahe $\frac{n}{f:A+n}=1$, und man kan auch $a-b$ in Vergleichung mit k weglaſſen: demnach wird $v=k-\frac{kD}{\Delta}e^{fw:A}$. Es war aber $\frac{\Delta}{e^{fw:A}}=\delta$ (14 §.), alſo hat man $v=k-\frac{kD}{\delta}$.

Dieſe Aufloͤſung folgt ſchon aus den im 17 §. vorgetragenen allgemeinern Betrachtungen: es ſchien aber nicht undienlich zu ſeyn, fuͤr dieſe Aufgabe die Aufloͤſung beſonders mitzutheilen.

22 §.

Bey eben den Vorausſetzungen des vor. §. die Zeit zu finden, binnen der eine gegebene Menge Luft heraus tritt.

Aufl. Weil $dw=dt\surd v$ iſt, und $\delta fdw=-Ad\delta$, ſo hat man $\delta fdt\surd v=-Ad\delta$. In dieſe Gleichung ſetze man den Werth von v aus dem 21 §., ſo wird

$$\delta fdt\surd\left(k-\frac{kD}{\delta}\right)=-Ad\delta,$$

oder $\frac{fdt\surd k}{A}=-\frac{d\delta}{\surd(\delta\delta-D\delta)}$,

alſo $\frac{ft\surd k}{A}=C-\int\frac{d\delta}{\surd(\delta\delta-D\delta)}$.

Um

Um nun das Integral hinter dem Gleichheitszeichen zu finden, ſetze man $\delta - \frac{1}{2}D = x$, ſo hat man $\delta\delta - D\delta = xx - \frac{1}{4}DD$, und $d\delta = dx$, folglich

$$\frac{d\delta}{\sqrt{(\delta\delta - D\delta)}} = \frac{dx}{\sqrt{(xx - \frac{1}{4}DD)}}.$$

Weiter ſetze man $\sqrt{(xx - \frac{1}{4}DD)} = z - x$, und verfahre wie im 370 §. Hydraul. wo daſſelbe Differential vorkam, nur daß dort A ſtatt des hieſigen $\frac{1}{2}D$ ſtand, ſo ergiebt ſich

$$\frac{dx}{\sqrt{(xx - \frac{1}{4}DD)}} = \frac{dz}{z},$$

und man erhält

$$\frac{ft\sqrt{k}}{A} = C - lz.$$

Nun muß $\delta = \Delta$ ſeyn, wenn $t = 0$, iſt, da dann zugleich $x = \Delta - \frac{1}{2}D$ wird, alſo $C = l(\Delta - \frac{1}{2}D) + \sqrt{(\Delta\Delta - D\Delta)}$ und

$$\frac{ft\sqrt{k}}{A} = l\,\frac{\Delta - \frac{1}{2}D + \sqrt{(\Delta\Delta - D\Delta)}}{\delta - \frac{1}{2}D + \sqrt{(\delta\delta - D\delta)}}.$$

Derſelbe Ausdruck läßt ſich auch ſo verändern. Es iſt

$$\frac{\Delta - \frac{1}{2}D + \sqrt{(\Delta\Delta - D\Delta)}}{\frac{1}{2}D} = \frac{2\Delta - D + 2\sqrt{(\Delta\Delta - D\Delta)}}{\Delta - \Delta + D} = \frac{(\sqrt{\Delta} + \sqrt{(\Delta - D)})^2}{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{(\Delta - D)})(\sqrt{\Delta} + \sqrt{(\Delta - D)})} = \frac{\sqrt{\Delta} + \sqrt{(\Delta - D)}}{\sqrt{\Delta} - \sqrt{(\Delta - D)}};$$

und eben ſo erhält man

$$\frac{\delta - \frac{1}{2}D + \sqrt{(\delta\delta - D\delta)}}{\frac{1}{2}D} = \frac{\sqrt{\delta} + \sqrt{(\delta - D)}}{\sqrt{\delta} - \sqrt{(\delta - D)}}.$$

Wenn man nun jenen Ausdruck durch dieſen dividirt, und alsdenn den Quotienten in der gefundenen Integralgleichung ſubſtituirt, ſo wird $\frac{ft\sqrt{k}}{A}$

$$= l\frac{\sqrt{\delta}-\sqrt{(\delta-D)}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{(\delta-D)}} \times \frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{(\Delta-D)}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{(\Delta-D)}}.$$

Dieſen Ausdruck hat Hr. Daniel Bernoulli Hydrodyn. Sect. X. §. 35. p. 226.

Man würde vermittelſt der Integration ſelbſt auf den letzten Ausdruck ſo kommen. Es ſey $\delta\delta - D\delta = \delta\delta zz$, alſo $\delta = \frac{D}{1-zz}$, ſo wird $d\delta = \frac{2Dzdz}{(1-zz)^2}$, folglich $\frac{d\delta}{\sqrt{(\delta\delta-D\delta)}} = \frac{2Dzdz}{(1-zz)^2}:\frac{Dz}{1-zz} = \frac{2dz}{1-zz}$. Demnach erhält man

$$\frac{ft\sqrt{k}}{A} = C - \int\frac{2dz}{1-zz} = C - l\frac{1+z}{1-z}$$ (319 §. Mech.), und weil $z = \frac{\sqrt{(\delta-D)}}{\sqrt{\delta}}$ war, ſo wird

$$\frac{ft\sqrt{k}}{A} = C - l\frac{\sqrt{\delta}+\sqrt{(\delta-D)}}{\sqrt{\delta}-\sqrt{(\delta-D)}},$$ und

$$C = l\frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{(\Delta-D)}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{(\Delta-D)}},$$ woraus $\frac{ft\sqrt{k}}{A}$

$$= l\frac{\sqrt{\delta}-\sqrt{(\delta-D)}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{(\delta-D)}} \times \frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{(\Delta-D)}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{(\Delta-D)}}$$ wie vorhin folgt.

Wenn $\delta = D$ wird, ſo hat man $v = k - \frac{kD}{\delta} = 0$,

alſo

alſo hört die Bewegung der Luft gänzlich auf, wenn die Dichtigkeit der innern Luft der Dichtigkeit der äuſſern gleich wird. Die Zeit aber, welche während der ganzen Bewegung verflieſt, wird aus der Gleichung $t = \frac{A}{f\sqrt{k}} \cdot l \frac{\sqrt{\Delta} + \sqrt{(\Delta - D)}}{\sqrt{\Delta} - \sqrt{(\Delta - D)}}$ gefunden, wo man noch mit $2\sqrt{g}$ dividiren muß, um dieſe Zeit in Secunden zu erhalten.

Um dieſe allgemeine Auflöſung auf ein beſondres Exempel anzuwenden, nehme man $A = 1$ Cubic Fuß, und $f = 1$ Quadrat Linie an, ſo iſt $f = \frac{1}{20736}$ Quadr. Fuß, und $\frac{A}{f} = 20736$ Fuß. Ueberdem iſt im Pariſer Maaß $g = 15,1$, und $k = 26000$ Fuß (15 §.). Ferner ſey $\Delta = 2D$, ſo wird

$$t = \frac{20736}{2\sqrt{15,1 . 26000}} \cdot l \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1},$$

da dann das l den natürlichen Logarithmen bezeichnet, und man findet $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2,414213}{0,414213} = 5,82843$,

alſo $t = \frac{10368}{626,5} . 2,302585 .$ Log. Brig. $5,82843 = 29,2$ Secunden. Beym Bernoulli a. a. O. findet ſich eben dies Exempel.

23 §.

Weil bey Berechnung der Geſchwindigkeit, wenn die im 16ten §. angenommene Vorausſetzung zum Grunde liegt, die Geſtalt des Gefäſſes nicht in Betrachtung kommt, ſo wird die Geſchwindigkeit noch eben ſo geſunden, wenn gleich die Luft nicht unmittelbar

ſelbar durch eine Oefnung am Gefäß, ſondern durch eine an demſelben angebrachte ziemlich lange Röhre herausbläſet. Wenn indeſſen die Röhre ſehr lang und dabey ſehr eng wäre; ſo würde doch die im 20 §. gelehrte Berechnung der Geſchwindigkeit nicht mehr zuverläßig genug ſeyn. In ſolchem Fall nemlich wäre auch K ſehr groß, und im 14 §. bliebe $n = \frac{\Lambda}{Kf}$ keine ſo ſehr groſſe Zahl, daß bald nach dem Anfang der Bewegung e^{-nw} ein ſo ſehr kleiner Bruch würde, den man weglaſſen könnte. Es bleibe z. E. das Gefäß 1 Cub. Fuß groß, und die Röhre ſey cylindriſch, ihre Querſchnitte 1 Quadratlinie groß. Das Gefäß ſelbſt ſey ebenfalls cylindriſch,

29 Fig. oder priſmatiſch, und die Höhe deſſelben $VK = a$, jeder Querſchnitt $MN = h$, die centriſche Linie QV, ſo weit ſie zur Röhre gehört, ſey $= \lambda$, ſo iſt $QVK = \lambda + a$, und $QVP = s$. Ferner iſt $AMND = Z = (\lambda + a - s)h$, und $\frac{Z}{z} ds = (\lambda + a - s) ds$, alſo $\int \frac{Z}{z} ds = (\lambda + a) s - \frac{1}{2} ss + C$. Für $s = \lambda$ ſey dies Integral $= H$, ſo wird $C = H - a\lambda - \frac{1}{2}\lambda\lambda$, und weil nach der Integration $s = \lambda + a$ geſetzt werden muß, ſo ergiebt ſich $K = H + \frac{1}{2} aa$. Um H zu finden, nehme man s kleiner als λ an, ſo wird $Z = ah + (\lambda - s)f$, und $\frac{Z}{z} = \frac{ah}{f} + \lambda - s$, folglich $\int \frac{Z}{z} ds = \left(\frac{ah}{f} + \lambda\right) s - \frac{1}{2} ss$, wo keine be-

ſtän-

ſtändige Gröſſe nöthig iſt, weil dies Integral mit s zugleich verſchwinden muß. Wenn man nun $s=\lambda$ ſetzt, ſo wird $H=\frac{ah}{f}.\lambda+\frac{1}{2}\lambda\lambda$: alſo $\frac{K}{\Delta}=\frac{ah}{f}.\lambda+\frac{1}{2}(aa+\lambda\lambda)$. Dieſer Ausdruck iſt deſto gröſſer, je gröſſer λ, und je kleiner f in Vergleichung mit h iſt. Iſt der Inhalt des Gefäſſes 1 Cub. F. und $a=1$ Fuß, ſo wird $h=1$ Quadratfuß, und wenn alsdenn $f=1$ Quadratlinie iſt, ſo wird $\frac{ah}{f}=$ 20736. Nun ſiehet man wohl, daß K beträchtlich groß werde, wenn λ nur wenige Fuſſe beträgt, und die Zahl $n=\frac{A}{Kf}$ fällt ſehr klein aus. Um übrigens im 14 §. den dort für v gefundenen Ausdruck beſſer zu überſehen, ſetze man die Linie $\frac{A}{f}=L$, ſo iſt $n=\frac{L}{K}$. Ferner wird $\frac{f}{A}+n=\frac{1}{L}+\frac{L}{K}$ $=\frac{K+L^2}{K.L}$, und $\frac{n}{f:A+n}=\frac{L^2}{K+L^2}$, alſo wird

$$v=k+a-b-(k+a-b)e^{-Lw:K}+\frac{kD}{\Delta}-\frac{L^2}{L^2+K}.e^{-Lw:K}\frac{kD}{\Delta}.\frac{L^2}{L^2+K}.e^{w:L}$$

oder auch wenn man $a-b$ in Vergleichung mit k weg-

wegläſt, und δ ſtatt $\frac{\Delta}{e^{fw:A}} = \frac{\Delta}{e^{w:L}}$ ſchreibt,

$$v = k - ke^{-Lw:K} + \frac{kD}{\Delta} \cdot \frac{L^2}{L^2+K} \cdot e^{-Lw:K}$$

$$- \frac{kD}{\delta} \cdot \frac{L^2}{L^2+K}.$$

Es ſey $\lambda = 3$ Fuß, wenn die übrigen vorhin angenommenen Zahlen bleiben, ſo wird $K = 20736 \times 3 + \frac{1}{2}(1+9) = 62213$, und $L = 20739$, alſo $\frac{L}{K} = \frac{20739}{62213}$ ſehr nahe $= \frac{1}{3}$. Ferner bleibt $\frac{L^2}{L^2+K} = \frac{L}{L+3}$ noch ſehr nahe $= 1$, und wenn nur w etwa 3 Fuß beträgt, ſo iſt ſchon $e^{-Lw:K}$ ohngefehr $= \frac{1}{3}$, folglich alsdenn $v = \frac{2}{3}k + \frac{D}{\Delta} \cdot \frac{1}{3}k - \frac{kD}{\delta}$: wenn aber w ſchon auf 12 Fuß und etwas drüber beträgt, ſo iſt $e^{-Lw:K}$ ohngefehr $= \frac{1}{81}$, und $v = \frac{80}{81}k + \frac{D}{\Delta} \cdot \frac{1}{81}k - \frac{kD}{\delta}$. Alſo nähert ſich v noch ſehr bald dem Werth $k - \frac{kD}{\delta}$: je gröſſer indeſſen λ wäre, wenn die übrigen Zahlen dieſelben blieben, deſto langſamer würde dieſe Näherung erfolgen. Wäre $\lambda = 10$ Fuß, ſo fände man $K = 207360 + 50 = 207410$, und $L = 20746$, folglich $\frac{L}{K} = \frac{20746}{207360}$ ohngefehr

$= \frac{1}{10}$, und $\frac{L^2}{L^2+K} = \frac{L}{L+10}$ noch ziemlich nahe $= 1$; und nun würde erſtlich dem Werth $w = 10$ ohngefehr der Werth $v = \frac{2}{3}k + \frac{D}{\Delta} \cdot \frac{1}{3}k - \frac{kD}{\delta}$ zugehören.

24 §.

Das Gefäß *ABCD* bleibe wie vorhin cylindriſch oder priſmatiſch, und an demſelben ſey eine durchaus gleich weite, aber ſehr enge Röhre *CE* angebracht: man ſucht die Stärke des Drucks, dem jeder Querſchnitt des Gefäſſes, oder der Röhre ausgeſetzt iſt. 29 Fig.

Aufl. Man muß die Gleichung $p = k + a - x + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \left(\int \frac{Z}{z} ds - K \right) - \frac{f^2}{z^2} \cdot \frac{Z^2}{A^2} \cdot v$ 10 §. gebrauchen. Wenn man hiemit die Gleichung $\frac{kD}{\delta} = k + a - b - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} K - v$ verbindet, und $-\frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} K = v + b + \frac{kD}{\delta} - k - a$ ſetzt, ſo wird $p = v + b - x + \frac{kD}{\delta} + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \int \frac{Z}{z} ds - \frac{f^2}{z^2} \cdot \frac{Z^2}{A^2} \cdot v$. Für eine horizontale Röhre iſt nun $b = 0$, und wenn die Vorausſetzungen des 21 §. bleiben, ſo kan man ſehr bald $v = k - \frac{kD}{\delta}$ anneh-

annehmen; alſo wird

$$p = k - x + \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \int \frac{Z}{z} ds = \frac{f^2}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} \left(k - \frac{kD}{\delta} \right).$$

Ferner iſt

$$dv = \frac{kD}{\delta\delta} d\delta, \text{ und } dw = - \frac{A d\delta}{f\delta},$$

alſo $\frac{dv}{dw} = - \frac{Kf}{A} \cdot \frac{D}{\delta}$, und dies giebt

$$p = k - x - \frac{kf^2}{A^2} \cdot \frac{D}{\delta} \int \frac{Z}{z} ds - \frac{f^2}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} \left(k - \frac{kD}{\delta} \right).$$

Wird nun der Druck für einen Querſchnitt der Röhre geſucht, ſo hat man beynahe $Z = A$, und überdem $z = f$, $x = o$. Dies giebt

$p = \frac{kD}{\delta} - \frac{Kf^2}{A^2} \cdot \frac{D}{\delta} \int \frac{Z}{z} ds$, und dieſe Gleichung rechtfertiget einen Satz, den Herr Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. X. §. 37. pag. 227. vorträgt. Die Luft, welche durch die Röhre bläſet, iſt in der Röhre zwar dichter, aber nicht mehr elaſtiſch, als die äuſſere Luft; ein Barometer würde in der dichtern durch die Röhre blaſenden Luft, nicht höher ſtehen, als in der dünnern äuſſern Luft, die daſelbſt im Gleichgewicht iſt. In der That iſt p nicht einmahl völlig $= \frac{kD}{\delta}$, indeſſen iſt der Unterſcheid

gar

gar ſehr geringe. Weil nemlich für die Röhre beynahe beſtändig Z = A bleibt, und z = f iſt, ſo wird $\int \frac{Z}{z} ds = \frac{A}{f} s$, und $p = \frac{kD}{\delta} - \frac{f.s}{A} \cdot \frac{kD}{\delta}$ beynahe beſtändig $= \frac{kD}{\delta}$, es müſte denn s in Vergleichung mit $\frac{A}{f}$ ſehr groß werden können, alſo die Röhre ſehr lang ſeyn. Bernoulli ſchließt hieraus, daß der Wind eine dichtere aber nicht mehr elaſtiſche Luft ſey, als ſolche, die im völligen Gleichgewicht iſt. Wofern dieſe Anwendung auf diejenige Bewegung der Luft im groſſen, die wir den Wind nennen, verſtattet iſt; ſo wird auch das, was Bernoulli weiter hinzuſetzt, ſeine Richtigkeit haben. Bey einem ſchon ſehr ſtarken Winde wird doch der Unterſcheid der Dichtigkeit der bewegten Luft von der Dichtigkeit der ruhenden nur ſehr wenig betragen, und wenn die Geſchwindigkeit des Windes auf 30 Fuß in einer Secunde beträgt, ſo wird die Dichtigkeit der bewegten Luft die Dichtigkeit der ruhenden bey einerley Wärme kaum um $\frac{1}{1700}$ übertreffen. Man ſetze nemlich $2\sqrt{gv} = 30$ Fuß, ſo iſt $v = \frac{900}{60} = 15$; weil nun $v = k - \frac{kD}{\delta}$, ſo wird $\delta = \frac{kD}{k-v} = \frac{26000}{25985} . D =$

$$\left(1 - \frac{15}{25986}\right) D = \left(1 + \frac{1}{1732}\right) D.$$

Wenn die Luft aus dem Gefäß durch die Röhre in einen völlig leeren Raum blieſe, ſo wäre $D = 0$, und $p = k - \frac{f^2}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} \cdot k$, wie im 17 §, oder $p = k - \frac{Z^2}{A^2} k$, weil für die Röhre $z = f$ iſt. Da nun für die ganze Röhre beynahe $Z = A$ iſt; ſo iſt auch beynahe für die ganze Röhre $p = 0$, daß alſo die Luft in der Röhre gar keine Federkraft äuſſern würde.

25 §.

30 Fig. Die Luft trete aus dem Gefäß *ABCD* in das Gefäß *EFHI* durch eine ſehr kleine Oeffnung *FG* hinüber, wie im 15 §. man ſucht eine Gleichung für die Geſchwindigkeit der durch *FG* durchſtreichenden Luft.

Aufl. Weil bey der angenommenen Vorausſetzung wiederum $\frac{A}{Kf} = n$ eine ſehr groſſe Zahl iſt, ſo verwandelt ſich die Gleichung des 15 §. in folgende

$$v = \frac{A+B}{B} k + a - b - \left(\frac{G}{\Delta} + \frac{A}{B}\right) k e^{fw:A}.$$

Weil nun $e^{fw:A} = \frac{\Delta}{\delta}$ war, ſo wird $v = k + a - b - \frac{Gk}{\delta} - \frac{Ak}{B}\left(\frac{\Delta}{\delta} - 1\right)$, und wenn man $a - b$ in Vergleichung mit k wegläſt, ſo iſt $v = k - \frac{Gk}{\delta} - \frac{Ak}{B\delta}(\Delta - \delta)$. Es war aber $G + \frac{A(\Delta - \delta)}{B} =$

$= \gamma$ (15 §.), alſo wird $v = k - \frac{k\gamma}{\delta}$, welches wiederum mit den allgemeineren Schlüſſen im 17 §. überein kommt.

26 §.

Bey eben den Vorausſetzungen die Zeit zu finden, binnen der eine gegebene Menge aus dem einen Gefäß in das andre hinüber tritt.

Aufl. Man hat wie im 22 §. $\delta f dt \sqrt{v} = -A d\delta$. In dieſe Gleichung ſetze man den Werth von v aus dem vor. §. und ſchreibe um abzukürzen m ſtatt $\frac{A}{B}$, ſo hat man $v = k\left(1 - \frac{G}{\delta} - \frac{m(\Delta - \delta)}{\delta}\right)$,

und $\frac{f dt \sqrt{k}}{A} = - \frac{d\delta}{\sqrt{((1+m)\delta\delta - (G+m\Delta)\delta)}}$,

oder $\frac{f dt \sqrt{k}}{A} = - \frac{1}{\sqrt{(1+m)}} \cdot \frac{d\delta}{\sqrt{(\delta\delta - H\delta)}}$,

wenn man noch $\frac{G+m\Delta}{1+m} = H$ ſetzt. Dieſer letzte Ausdruck giebt die Dichtigkeit der Luft, nachdem ſich alles ins Gleichgewicht geſetzt, und die ganze Maſſe Luft ſich in beyde Gefäſſe gleichförmig verbreitet hat: es iſt nemlich $H = \frac{A.\Delta + B.G}{A+B}$, weil $m = \frac{A}{B}$ war. Im 22 §. hatte man eine völlig ähnliche Differentialgleichung, und man kommt durch die Vergleichung mit dem dortigen Verfahren hier nunmehro leicht auf folgende Integralgleichung:

$$\frac{ft\sqrt{k}}{A} = \frac{1}{\sqrt{(1+m)}}\, l\, \frac{\sqrt{\delta}-\sqrt{(\delta-H)}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{(\delta-H)}} \times \frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{(\Delta-H)}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{(\Delta-H)}}.$$

Wenn $\delta=\gamma$ wird, ſo hört die Bewegung gänzlich auf, weil $v = k - \frac{k\gamma}{\delta}$ (25 §.) $= 0$ wird. Uebrigens giebt dieſe Vorausſetzung $\delta = G + m(\Delta-\delta)$, wenn man δ dem Werth von γ im vor. §. gleich ſetzt, woraus $\delta = \frac{G+m\Delta}{1+m} = H$ folgt. Wird demnach $\delta = H$ geſetzt, ſo hat man die Zeit, welche während der ganzen Bewegung verflieſt, aus der Gleichung

$$\frac{ft\sqrt{k}}{A} = \frac{1}{\sqrt{(1+m)}}\, l\, \frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{(\Delta-H)}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{(\Delta-H)}}.$$

alſo $t = \frac{1}{\sqrt{(1+m)}} \cdot \frac{A}{2f\sqrt{gk}}\, l\, \frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{(\Delta-H)}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{(\Delta-H)}}$, da dann g die Höhe des freyen Falles für die erſte Secunde bedeutet. Man ſetze $\frac{G}{\Delta} = \nu$, ſo iſt $H = \frac{A+B.G:\Delta}{A+B}.\Delta = \frac{m+\nu}{m+1}.\Delta$, alſo $\Delta = \frac{m+1}{m+\nu}.H.$ Setzt man demnach $\frac{m+1}{m+\nu} = \mu$, ſo findet man die Zeit für die völlige Ausbreitung der Luft durch den Raum $A+B =$

$$\frac{1}{\surd(1+m)} \cdot \frac{A}{2f\surd gk}\, l \frac{\surd\mu+\surd(\mu-1)}{\surd\mu-\surd(\mu-1)},$$

die alſo von den anfänglichen Dichtigkeiten △ und G für ſich nicht abhängt, ſondern nur von ihrem Verhältniß gegen einander.

Um dieſe Rechnung auf ein Exempel anzuwenden ſey A = B = 1 Cub. Fuß, ſo iſt $m = 1$. Ferner ſey anfangs im Gefäß EFHI gar keine Luft, ſo iſt $\nu = 0$, und $\mu = 2$. Behält man nun wie im 22 §. $f = 1$ Quadrat-Linie, alſo $\frac{A}{f} = 20736$ Fuß, und $g = 15,1$ Par. Fuß; ſo wird

$$t = \frac{1}{\surd(1+m)} \cdot \frac{20736}{2\surd 15,1.26000} \cdot l \frac{\surd 2+1}{\surd 2-1},$$

wo der Factor von $\frac{1}{\surd 1+m}$ im 22 §. ſchon = 29,2 gefunden iſt. Hier iſt nun $\surd\frac{1}{1+m} = \surd\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\surd 2 = 0,707106$, alſo wird $t = 20,6$ Secunden.

27 §.

Wenn man in den Formuln des vorigen §. den Raum B in Vergleichung mit A unendlich groß annimmt, ſo wird $\frac{A}{B} = m = 0$, alſo H = G; die Gleichung für t verwandelt ſich in eben diejenige, welche im 22 §. gefunden ward, und G iſt hier alsdenn das, was dort D war. Der Fall des 22 §. iſt auch würklich als ein beſondrer Fall in der allgemeinen Aufgabe des vor. §. enthalten. Unter eben dieſer allgemeinen

meinen Aufgabe wäre nun noch auch der Fall enthalten, wenn der Raum A in Vergleichung mit B ſehr groß angenommen würde. Vermöge dieſer Vorausſetzung wäre $m = \infty$, und dies würde $\delta = \Delta$ geben, wie der Beſchaffenheit der Sache auch gemäß iſt: aber die Zeit t kan aus der Gleichung des vorigen §. nicht gefunden werden, weil die Rechnung ſich auf die Vorausſetzung gründet, daß δ veränderlich ſey; wie denn auch die Vorausſetzung $m = \infty$ und $\delta = \Delta$ die Gleichung $\frac{ft\sqrt{k}}{A} = \frac{1}{\sqrt{(1+\infty)}} l\,1 = 0$ geben würde. Wie man ſich demnach bey Auflöſung der Aufgabe bey dieſem beſondern Fall zu verhalten habe, wird ſich aus dem folgenden §. ergeben.

28 §.

Eine dichtere Luft dringt durch eine kleine Oefnung in ein zu Anfang entweder völlig luftleeres, oder doch mit dünnerer Luft angefülltes Gefäß, man ſucht die Geſetze, nach welchen dieſe Bewegung erfolgt: vorausgeſetzt, daß der Raum dieſes Gefäſſes in Vergleichung mit dem Raum, den die dichtere Luft füllt, ſehr klein ſey.

Aufl. Vermöge der angenommenen Vorausſetzung wird die Dichtigkeit der äuſſern Luft, welche das Gefäß umgiebt, ſich nicht merklich ändern, allein im Gefäß ſelbſt wird die Luft nach und nach immer dichter werden. Es ſey nun die Dichtigkeit der äuſſern Luft $= \Delta$, und nach Verlauf einer gewiſſen Zeit die Dichtigkeit der innern Luft $= \gamma$; ſo wird die in-

nere

nere Luft eine Federkraft äuſſern, der die Höhe $\frac{k\gamma}{\Delta}$ zugehört, wenn man dieſe Federkraft durch das Gewicht einer gleichförmig dichten Luftſäule ausdrückt, von einerley Dichtigkeit mit der äuſſern Luft (14 §). Bald nach den erſten Augenblicken der Bewegung wird $v = k - \frac{k\gamma}{\Delta}$ werden, wie aus der Vergleichung mit dem 17 §. folgt.

Nun ſey B der körperliche Raum des Gefäſſes, ſo iſt am Ende der Zeit t die in demſelben enthaltene Menge Luft $= B\gamma$, dieſe nimmt binnen der Zeit dt um das Differential $Bd\gamma$ zu, und eben dies Differential iſt $= \Delta f dw$, weil die Dichtigkeit der hinein tretenden Luft beſtändig $= \Delta$ bleibt. Ueberdem iſt

$$dw = dt\sqrt{\left(k - \frac{k\gamma}{\Delta}\right)} = \frac{dt\sqrt{k}\sqrt{(\Delta-\gamma)}}{\sqrt{\Delta}},$$

alſo wird $Bd\gamma = dtf\sqrt{\Delta}.k.\sqrt{(\Delta-\gamma)}$, und wenn $\frac{B}{f} = L$ geſetzt wird, ſo hat man $\frac{d\gamma}{\sqrt{(\Delta-\gamma)}} = \frac{dt\sqrt{\Delta}.k}{L}$. Wird nun noch $\Delta - \gamma = x$ geſetzt, ſo hat man $\frac{d\gamma}{\sqrt{(\Delta-\gamma)}} = -x^{-\frac{1}{2}}dx$, und

$$\int\frac{d\gamma}{\sqrt{(\Delta-\gamma)}} = -2\sqrt{x} = -2\sqrt{(\Delta-\gamma)},$$ alſo ergiebt ſich $C - 2\sqrt{(\Delta-\gamma)} = \frac{t\sqrt{\Delta}.k}{L}$.

Wenn nun die innere Dichtigkeit anfangs $= G$ war,

ſo gehört der Werth $\gamma = G$ zum Werth $t = 0$, und man hat $C = + 2\sqrt{(\Delta - G)}$. Dies giebt

$$\frac{t\sqrt{\Delta . k}}{L} = 2\sqrt{(\Delta - G)} - 2\sqrt{(\Delta - \gamma)}, \text{ und}$$

$$t = \frac{2L}{\sqrt{\Delta . k}}\sqrt{(\Delta - G)} - \frac{2L}{\sqrt{\Delta . k}}\sqrt{(\Delta - \gamma)}.$$

Wenn $\gamma = \Delta$ wird, ſo wird $v = 0$, alſo hört alsdenn die Bewegung der Luft auf, und die ganze während der Bewegung verfloſſene Zeit iſt $= \frac{2L}{\sqrt{\Delta . k}}\sqrt{(\Delta - G)}$. In dem Fall, wenn das Gefäß anfangs ganz leer iſt, hat man $G = 0$, und alsdenn wird binnen der Zeit $\frac{2L}{\sqrt{k}}$ das ganze Gefäß mit Luft von einerley Dichtigkeit mit der äuſſern angefüllt. Könnte die Luft beſtändig mit der anfänglichen Geſchwindigkeit $\sqrt{k}$ hineinblaſen, ſo wäre $w = t\sqrt{k}$, und weil $B = f . L$ der Inhalt des Gefäſſes iſt, ſo würde das Gefäß voll ſeyn, wenn $w = L$ wäre, und die Zeit der gänzlichen Anfüllung wäre $= \frac{L}{\sqrt{k}}$, die demnach halb ſo groß iſt, als die Zeit, worin ſich das Gefäß würklich anfüllet.

Uebrigens weiß man, daß bey würklicher Berechnung dieſer Zeit noch mit $2\sqrt{g}$ dividirt, alſo

$$t = \frac{L}{\sqrt{g\Delta . k}}(\sqrt{(\Delta - G)} - \sqrt{(\Delta - \gamma)})$$

geſetzt werden müſſe, und die Zeit der gänzlichen Anfüllung

füllung eines anfangs leeren Gefäſſes $= \frac{L}{\sqrt{gk}}$.
Dieſer letzte Ausdruck hängt gar nicht von der Dichtigkeit der äuſſern Luft ab, ſondern nur von der Gröſſe des Gefäſſes: alſo erfordert bey einerley Gefäß die Anfüllung einerley Zeit, die Dichtigkeit der Luft mag ſeyn, welche ſie wolle. Wäre z. E. A = 1 Cubicfuß, und f = 1 Quadr. Linie, ſo wäre $\frac{B}{f} = L =$ 20736, und die Zeit der Anfüllung $=$

$$\frac{20736}{\sqrt{15,1 \cdot 26000}} = 33 \text{ Sec.}$$

Der III. Abſchnitt.

Die Bewegung der Luft in Röhren von unbeſtimmter Länge.

29 §.

In der Röhre ARSD ſtelle man ſich einen feſten Querſchnitt FG auf der centriſchen Linie ſenkrecht vor, und nehme die Röhre auch bey AD verſchloſſen an. In dem Theil der Röhre AFGD befinde ſich Luft von gegebener Dichtigkeit, übrigens aber ſey die Röhre von Luft ganz leer. Wenn nun der feſte Querſchnitt FG plötzlich wegkäme, ſo würde ſich die Luft nach der Länge der Röhre verbreiten. Die vordere Fläche der eingeſchloſſenen Luft wird von FG nach RS zu rücken, und woferne man annehmen 31 Fig.

kan, daß dieſe vordere Fläche eben, und beſtändig auf der centriſchen Linie ſenkrecht bleibt: wofern man ferner annehmen kan, daß die Ausbreitung und Verdünnung der Luft nach dem im 5 §. angenommenen Geſetz erfolge, ſo läſt ſich die im erſten Abſchnitt vorgetragene allgemeine Theorie auch hier anwenden, um die Geſetze aufzuſuchen, nach welchen die Luft ſich in der Röhre fortbewegen wird, bevor ſie durch das äuſſerſte Ende der Röhre herausbläſet. Ich werde zeigen, wie man ſich bey den Unterſuchungen hierüber verhalten müſſe. Die Reſultate der Rechnungen werden alsdenn freylich nur in ſo fern mit dem würklichen Erfolg in der Natur überein kommen, als die Vorausſetzungen, worauf ſich die Rechnung gründet, der Natur gemäß ſind.

30 §.

Die in dem Raum *AFGD* anfangs eingeſchloſſene Luft hat ſich in einer gewiſſen Zeit in den Raum *ARSD* ausgebreitet, und die vordere iſt aus *FG* in *RS* gerückt, ſo daß *QW* der Weg iſt, den ſie zurück gelegt hat: man ſucht eine Gleichung zwiſchen der Geſchwindigkeit $\sqrt{q}$ der Fläche *RS* und dem zurück gelegten Wege $QW = w$.

Aufl. Wenn man alle Bezeichnungen, wie im 10 §. beybehält, und die dortigen Schlüſſe hier anwendet, ſo komt man ebenfalls auf die Gleichung

$$dx + dp = -\frac{f^2}{A^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} dv - \frac{f^2 v}{A^2} d\frac{Z^2}{z^2},$$

da dann $\sqrt{v}$ die Geſchwindigkeit der Luft im Querſchnitt $FG = f$ bedeutet. Weil nun hier die Geſchwin-

ſchwindigkeit $\sqrt{q}$ des vorderſten Querſchnitts RS geſucht wird; ſo ſetze man RS $= y$, und den körperlichen Raum ARSD $=$ Y. Vermöge des 5 §. iſt alsdenn $ydw = -\frac{Y}{Z}.zds$, alſo $-\frac{Z}{z} = \frac{Yds}{ydw}$,

und $-\frac{Z}{z} \times \frac{f^2}{A^2}.\frac{Z}{z}dv = \frac{f^2}{A^2}.\frac{Y}{y}.\frac{dv}{dw}$

$\frac{Z}{z}ds$. Demnach erhält man $dp = -dx$

$$+\frac{f^2}{A^2}.\frac{Y}{y}.\frac{dv}{dw}.\frac{Z}{z}ds - \frac{f^2}{A^2}v.d\frac{Z^2}{z^2},$$

und die Integration giebt

$$p = C - x + \frac{f^2}{A^2}.\frac{Ydv}{ydw}\int\frac{Z}{z}ds - \frac{f^2}{A^2}.\frac{Z^2}{z^2}.v.$$

Ueberdem iſt $\frac{f^2}{A^2}v = \frac{y^2}{Y^2}q$ (6. §.), alſo

$\frac{f^2}{A^2}dv = d.\frac{y^2}{Y^2}q$, und es wird

$$p = C - x + \frac{Y}{ydw}.d\frac{y^2}{Y^2}q\int\frac{Z}{z}ds$$

$$-\frac{y^2}{Y^2}.\frac{Z^2}{z^2}q.$$

Es ſey $\int\frac{Z}{z}ds = 0$, wenn $s = -w$ iſt, ſo wird zugleich $z = y$, $Z = Y$, und $p = 0$. Ueberdem wird $x =$ HW; ſetze man alsdenn HW $= u$, ſo ergiebt ſich

ſich $C = u + q$. Wird hiernächſt $s = \lambda$ geſetzt, ſo iſt zugleich $x = a$, $Z = 0$, und $p = k$, folglich $k = u - a + q + \frac{Y}{ydw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2}q\int\frac{Z}{z}ds$. Weil die Natur der centriſchen Linie und die Geſtalt der Röhre bekannt ſeyn muß, ſo laſſen ſich nun u, y, Y, nebſt dem Integral $\int\frac{Z}{z}ds$ gehörig durch w ausdrücken, und alsdenn findet man durch Hülfe der Integralrechnung eine Gleichung zwiſchen w und v.

31 §.

Wenn man im 7 §. $u = \frac{y^2Z^2}{Y^2z^2} \cdot q$ ſetzt, ſo wird das dortige $dV = \delta z \cdot ydr = \frac{\delta Z^2}{z} \cdot d\frac{y^2}{Y^2}q + \frac{\delta zy^2q}{Y^2} \cdot d\frac{Z^2}{z^2}$, und $\frac{ydV}{z} = \frac{\delta yZ^2}{z^2}d\frac{y^2}{Y^2}q + \frac{\delta y^3q}{Y^2}d\frac{Z^2}{z^2}$. Setzt man im erſten Gliede nach dem Gleichheitszeichen $\frac{Z}{z} = -\frac{Yds}{ydw}$, ſo wird

$$\frac{ydV}{z} = -\frac{\delta Z}{z} \cdot \frac{Yds}{dw}d\frac{y^2}{Y^2}q + \frac{\delta y^3q}{Y^2}d\frac{Z^2}{z^2},$$

und das Integral $\int\frac{ydV}{z} = C - \frac{\delta Y}{dw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2}q\int\frac{Z}{z}ds + \frac{\delta y^3q}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}$. Das Integral $\int\frac{Z}{z}ds$ nimt man

ſo

ſo, daß es verſchwindet, wenn $s = -w$ geſetzt wird. Um aber C zu finden, ſetzt man $s = \lambda$, ſo muß $\int \frac{ydV}{z} = 0$, und zugleich $z = y$, $Z = 0$ ſeyn. Bey eben der Vorausſetzung ſey $\int \frac{Z}{z} ds = M$; ſo hat man $C = \frac{\delta Y}{dw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2} q \cdot M$, und $\int \frac{ydV}{z} = \frac{\delta Y}{dw} \left(M - \int \frac{Z}{z} ds \right) + \frac{\delta y^3 q}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}$. Um ferner dieſe Summe für die ganze Röhre zu haben, ſetzt man $s = -w$, alſo $Z = Y$, $z = y$, $\int \frac{Z}{z} ds = 0$, ſo wird $\int \frac{ydV}{z} = \frac{\delta Y}{dw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2} q \cdot M + \delta yq$. Das S des 8 §. wird hier $= \delta y (k + a - u)$, und beyde Werthe nach dem 9 §. einander gleich geſetzt geben ebenfals die Gleichung des vor. §.

32 §.

Die Röhre ſey grade, cylindriſch und horizontal: man ſucht eine Gleichung zwiſchen w und q.

Aufl. Der angenommenen Vorausſetzung gemäß ſind a und $u = 0$. Wenn überdem jeder Querſchnitt der Röhre $= f$ iſt, ſo hat man $y = z = f$, $Y = (\lambda + w)f$, $Z = (\lambda - s)f$, alſo $\frac{Z}{z} ds = (\lambda - s) ds$, und $\int \frac{Z}{z} ds = \lambda s - \frac{1}{2} ss + C$. Für $s = -w$ iſt dies Integral

tegral $= 0$, alſo $C = \lambda w + \frac{1}{2}ww$, und $\int \frac{Z}{z} ds = \lambda w + \frac{1}{2}ww + \lambda s - \frac{1}{2}ss$. Nun ſetze man $s = \lambda$, ſo wird $\int \frac{Z}{z} ds = \frac{1}{2}(\lambda + w)^2$. Weil ferner $\frac{y^2}{Y^2} = \frac{1}{(\lambda+w)^2}$ wird, ſo hat man $d\frac{y^2}{Y^2}q = \frac{1}{(\lambda+w)^2}dq$

$- \frac{2q}{(\lambda+w)^3}dw$, und $\frac{Y}{ydw} = \frac{\lambda+w}{dw}$, alſo

$\frac{Y}{ydw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2}q = \frac{dq}{(\lambda+w)dw} - \frac{2q}{(\lambda+w)^2}$,

und dies nochmahl mit $\int \frac{Z}{z} ds = \frac{1}{2}(\lambda+w)^2$ multiplicirt giebt $\frac{(\lambda+w)dq}{2dw} - q$. Demnach erhält man $k = \frac{(\lambda+w)dq}{2dw}$, und $dq = \frac{2kdw}{\lambda+w}$; alſo giebt die Integration $q = 2kl\frac{\lambda+w}{\lambda}$.

Aus dem 18 §. iſt bekannt, daß $k = \frac{D}{\delta}h$ angenommen werden müſſe, wenn h die mittlere Barometerhöhe, D die eigene Schwere des Queckſilbers und δ die eigene Schwere der natürlichen Luft nahe an der Erdfläche bezeichnet. Eben daſelbſt ward das Waſſer 800 mahl ſchwerer als die Luft, und das Queckſilber 14 mahl ſchwerer als das Waſſer, $h = 2\frac{1}{3}$ Pariſ. Fuß angenommen, und dies gab k ohngefehr

=

= 26000 Pariſ. Fuß. Will man das Waſſer 850 mahl ſchwerer, als die Luft annehmen, ſo wird $k = 850 \times 15\, h$ beynahe $= 12000\, h$, und man erhält $v = 24000\, hl \frac{\lambda + w}{\lambda}$. Dieſe Zahlen nimmt Hr. Euler an in Robins Erläuterter Artillerie auf der 284 u. f. wo er die Auflöſung der hier vorgetragenen Aufgabe ſucht, und auf der 288 S. die zuletzt erwehnte Gleichung herausbringt. Bey ihm iſt x und b das was hier $\lambda + w$, und λ heiſt. Hr. Euler wendet hier des ältern Bernoulli Methode zu ſchlieſſen an, und man wird ihm in ſeinen Schlüſſen leicht folgen, wenn man aus dem 7. 8. und 9 §. gelernt hat, wie die erwehnte Methode auch hier gebraucht werden könne. Man vergleiche damit auch den 31 §.

Die Einſchränkung, daß die Röhre grade und horizontal ſeyn ſoll, könnte wegbleiben, und wenn man alsdenn nur bemerkt, daß a und u in Vergleichung mit k ſehr klein ſind, woſern nicht die Röhre ſelbſt ſehr hoch angenommen wird; ſo kömmt man auf dieſelbe Gleichung. Die Röhre kann demnach wie man will gebogen ſeyn, nur wird durchaus einerley Weite erfordert, und alsdenn hängt v auch von der Gröſſe ihrer Querſchnitte nicht ab, und es iſt gleichgültig, ob die Röhre an ſich weiter, oder enger iſt. Dies würde alles völlig richtig ſeyn, wenn nur die Vorausſetzung ohne alle Einſchränkung wahr wäre, daß alle in einerley Querſchnitt laufende Lufttheilchen auch einerley Geſchwindigkeit haben. Weil dieſe Vorausſetzung bey weitern Röhren wohl mehr Einſchränkung leiden dürfte, als bey engern, ſo darf man die gefundene Formul auch nicht auf ſehr weite Röhren anwenden.

Uebri-

Uebrigens bemerke ich noch, daß auch v nicht von der anfänglichen Dichtigkeit der Luft abhänge, ſondern blos von dem Verhältniß des Raums, worin ſie ſich jetzt ausgebreitet hat, zum Raum, worin ſie anfangs eingeſchloſſen war. Ob dies gleich anfangs unerwartet ſcheinen mögte, weil die Federkraft der dichtern Luft ſtärker iſt, als die Federkraft der dünnern, alſo auch jedes Element der dichtern Luft einer ſtärkern bewegenden Kraft ausgeſetzt iſt, als jedes Element der dünnern Luft; ſo muß man doch erwegen, daß die Maſſe eines jeden Elements in eben dem Verhältniß zunehme, wie die Federkraft zunimt, und daß um deswillen die Beſchleunigung einerley bleibe.

33 §.

Es bleiben eben die gegebenen Stücke, wie im 30 §. nur ſey der Raum auſſerhalb $AFGD$ ebenfals mit Luft von geringerer Dichtigkeit angefüllt, als diejenige hat, welche in dem Raum $AFGD$ anfangs eingeſchloſſen war: man ſucht eine Gleichung zwiſchen $\sqrt{q}$, und $QW = \mathrm{w}$.

Aufl. Die im 30 §. ſchon gefundene Gleichung:

$$p = C - x + \frac{Y}{y d\mathrm{w}} \cdot d \frac{y^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds$$

$$- \frac{y^2}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} q,$$

löſet die gegenwärtige Aufgabe ebenfals auf, nur muß die beſtändige Gröſſe C anders beſtimmt werden. Es leidet nemlich nun auch die Vorderfläche RS einen Gegendruck, wegen der Federkraft der äuſſern Luft, und überdem noch einen Widerſtand, der

von dem Anſtoß an die ruhenden Lufttheilchen herrührt, nicht anders, als wenn RS eine feſte Fläche wäre. Dieſer letzte Widerſtand iſt dem Gewicht einer Luftſäule gleich, die mit der äuſſern Luft einerley Dichtigkeit hat, und auf der Grundfläche RS in der Höhe $= q$ ſtehet (301 §. Mech.). Wenn alſo D und δ die Dichtigkeiten der äuſſern und innern Luft bedeuten, und man will den Widerſtand durch das Gewicht einer Luftſäule von einerley Dichtigkeit mit der innern Luft ausdrücken, ſo muß man ihre Höhe $= \frac{D}{\delta} q$ annehmen. Der von der Federkraft der äuſſern Luft abhängende Gegendruck gleicht dem Gewicht einer Luftſäule von einerley Dichtigkeit mit der innern, wenn ihre Höhe $= \frac{Dk}{\delta}$ iſt (14 §.). Demnach iſt der geſammte Gegendruck $= \delta . RS . \left(\frac{Dk}{\delta} + \frac{D}{\delta} q\right)$, und wenn in der aus dem 30 §. ſchon hergeſetzten Gleichung $s = -w$, $z = y$, $Z = Y$, $\int \frac{Z}{z} ds = 0$ wird, ſo muß $p = \frac{D}{\delta}(k+q)$ ſeyn, folglich wird $C = \frac{D}{\delta}(k+q) + u + q$. Setzt man hiernächſt $s = \lambda$, $x = a$, $Z = 0$, und $p = k$, ſo ergiebt ſich

$$k = u - a + q + \frac{D}{\delta}(k+q) + \frac{Y}{ydw} . d\frac{y^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds.$$

Man nehme noch an, die anfängliche Dichtigkeit der eingeſchloſſenen Luft ſey $= \Delta$ geweſen, ſo hat man

$\Delta : \delta = Y : A$, alſo $\delta = \frac{A}{Y}\Delta$, und es wird

$$k = u - a + q + \frac{D \cdot Y}{\Delta \cdot A}(k+q) + \frac{Y}{ydw}$$

$. d \frac{y^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds$. Hier läſt ſich nun u, y, Y, und das Integral $\int \frac{Z}{z} ds$ gehörig durch w aus- drücken, wenn die Geſtalt der Röhre bekannt iſt, und die Integralrechnung giebt alsdenn die geſuchte Glei- chung zwiſchen w und q.

Aus dem 31 §. erhält man dieſelbe Gleichung, wenn man nur in Erwägung ziehet, daß das S des 8 §. hier $= dy(k + a - u - \frac{D}{\delta}(k + q))$ werden müſſen.

34 §.

Die Röhre ſey grade, cylindriſch und hori- zontal, wie im 32 §: man ſucht eine Glei- chung zwiſchen w und q.

Aufl. Man erhält, wie im 31 §,

$$\frac{Y}{ydw} . d \frac{y^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds = \frac{(\lambda + w) dq}{2dw} - q,$$

$u - a = 0$, und überdem wird $\frac{Y}{A} = \frac{\lambda + w}{\lambda}$.

Wenn demnach $\frac{\Delta}{D} = m$ geſetzt wird, ſo verwandelt ſich die im vor. §. gefundene Gleichung in folgende: $k =$

$$k = \frac{\lambda + w}{m\lambda}(k+q) + \frac{(\lambda + w)dq}{2dw},$$

oder $dq + \frac{2qdw}{m\lambda} = \frac{2kdw}{\lambda + w} - \frac{2kdw}{m\lambda}$.

Man ſetze die baſin der natürlichen Logarithmen $= e$, multiplicire mit $e^{2(\lambda+w):m\lambda}$, und integrire alsdenn, ſo findet man $e^{2(\lambda+w):m\lambda} q = C$

$$+ 2k \int \frac{e^{2(\lambda+w):m\lambda} dw}{\lambda + w} - k e^{2(\lambda+w):m\lambda}.$$

Man ſetze, um abzukürzen, das Integral

$\int \frac{e^{2(\lambda+w):m\lambda} dw}{\lambda + w} = S$, und nehme es ſo, daß es für $w = 0$ verſchwindet, ſo wird $C = ke^{2:m}$, weil zugleich $q = 0$ ſeyn muß, und man erhält

$$e^{2(\lambda+w):m\lambda} q = ke^{2:m} + 2k.S$$
$$- ke^{2(\lambda+w):m\lambda}.$$

Wenn m eine ſehr groſſe Zahl iſt, ſo läſt ſich eine Näherung anbringen, die ſo lange ihre Anwendung findet, als $\frac{\lambda + w}{\lambda}$ in Vergleichung mit m nur klein bleibt. Alsdenn iſt beynahe $e^{2(\lambda+w):m\lambda}$ $= 1 + \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda}$ (402 §. Hydraul. am Ende),

 und

und $S = \int \left(\frac{dw}{\lambda + w} + \frac{2dw}{m\lambda} \right) = l(\lambda + w)$ $+ \frac{2w}{m\lambda} + C$. Weil nun S und w zugleich verſchwinden ſollen, ſo wird $C = -l\lambda$, und $S = l\frac{\lambda + w}{\lambda} + \frac{2w}{m\lambda}$. Dieſe Werthe ſetze man in die gefundene Gleichung, ſo erhält man

$$\left(1 + \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda}\right) q = k\left(1 + \frac{2}{m}\right) + 2kl\frac{\lambda + w}{\lambda}$$
$$+ 2k \cdot \frac{2w}{m\lambda} - k - \frac{2k(\lambda + w)}{m\lambda}, \text{ oder}$$
$$\left(1 + \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda}\right) q = 2kl\frac{\lambda + w}{\lambda} + \frac{2kw}{m\lambda}.$$

Dieſe Gleichung mit $\frac{1}{1 + \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda}}$ beynahe

$= 1 - \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda}$ (wie die Diviſion ergiebt,) multiplicirt, giebt

$$q = 2k\left(1 - \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda}\right) l\frac{\lambda + w}{\lambda} + \frac{2kw}{m\lambda},$$

wo das Glied, welches durch m^2 dividirt werden müſte, weggelaſſen iſt.

Wäre auſſerhalb des Raums ARSD gar keine Luft vorhanden, ſo wäre $D = 0$, alſo $\frac{\Delta}{D} = m = \infty$,

und

und dies würde $q = 2kl\frac{\lambda + w}{\lambda}$ geben, wie im 25 §.

Wollte man den Widerſtand der äuſſern Luft beyſeit ſetzen, und allein ihre Federkraft in Betracht ziehen, ſo müſte k ſtatt $k + q$ in der Differentialgleichung gebraucht werden. Alsdenn hätte man

$$dq = \frac{2kdw}{\lambda + w} - \frac{2kdw}{m\lambda}, \text{ und}$$

$$q = 2kl\frac{\lambda + w}{\lambda} - \frac{2kw}{m\lambda}.$$

35 §.

Wenn die Röhre ihre beſtimmte Länge hat, und in einem Theil AFGD der Röhre anfangs Luft von gröſſerer Dichtigkeit, als die äuſſere eingeſchloſſen iſt, ſo findet man die Geſchwindigkeit, womit die Luft zur Mündung der Röhre heraus zu fahren anfängt, wenn man in die gefundene Gleichung die Länge der Röhre von FG bis an ihre äuſſere Mündung ſtatt w ſetzt, oder ſtatt $\lambda + w$ die ganze Länge der Röhre. Es ſey z. E. dieſe Länge $\lambda + w = 45$ Zoll, $\lambda = 2\frac{5}{8}$ Zoll, alſo $\frac{\lambda + w}{\lambda} = \frac{360}{21} = \frac{120}{7}$; und $\frac{w}{\lambda} = \frac{42\frac{3}{8}}{2\frac{5}{8}} = \frac{339}{21} = \frac{113}{7}$. Ferner ſey $m = 1000$, ſo wird $\frac{2(\lambda + w)}{m\lambda} = \frac{240}{7000} = \frac{6}{175}$, und und $1 - \frac{2(\lambda + w)}{m\lambda} = \frac{169}{175}$. Ueberdem findet man

$$\text{Brigg. Log. } \frac{\lambda+w}{\lambda} = 1{,}2340832$$

$$
\begin{array}{r}
2{,}3025851 \\
\hline
2{,}4681664 \\
3702249 \\
24681 \\
6170 \\
987 \\
61 \\
1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{log. nat. } \frac{\lambda+w}{\lambda} = 2{,}8415813$$

Im 18 §. war $k = 11200h$, und dafür kan man die runde Zahl $12000h$ mit Hr. Euler (Erläuter. Artillerie 284 S.) annehmen. Wenn alſo $h = 30$ Engliſche Zoll, oder $2\frac{1}{2}$ Engl. Fuß $= 0{,}970 \,.\, 2\frac{1}{2}$ $= 2{,}425$ Rheinl. Fuß angenommen wird, ſo findet man $q = 24000 \,.\, 2{,}425 \,.\, \frac{169}{175} \,.\, 2{,}8415813$

$$+ 24 \,.\, 2{,}425 \,.\, \frac{113}{7}$$

d. i. $q = 24 \,.\, 2425 \left(\frac{169 \,.\, 2{,}8415813}{175} + \frac{113}{7000} \right)$ $= 160616$ Rheinl. Fuß, folglich wird die Geſchwindigkeit $2\sqrt{gq} = 3168$ Rheinl. Fuß.

In dem Fall des 32 §. wäre $q = 24 \,.\, 2425 \,.\, 2{,}8415813 = 165380$ Rheinl. Fuß, und die Geſchwindigkeit $2\sqrt{gq} = 3215$ Rhein. Fuß nicht ſehr viel gröſſer, als die vorige.

36 §.

Es ſey $AFGD$ ein Gefäß, daß zwiſchen AD und FG mit Luft von gegebener Dichtigkeit $\triangle$ angefüllt iſt, und FG ſey ein feſter Boden: gegen AD drücke eine unveränderliche Kraft, (etwa eines Stempels,) welche die Federkraft der eingeſchloſſenen Luft übertrift, ſo daß AD in der Zeit t nach ad rückt, und den Weg $KL = w$ zurück legt: man ſucht eine Gleichung zwiſchen der Geſchwindigkeit $\sqrt{q}$, der Fläche ad und dem zurück gelegten Wege $KL = w$. 32 Fig.

Aufl. Man ſetze, wie im 10 §, QP $= s$, und KP $= r$; ferner betrachte man p als eine Function von r, die um dp wächſt, ſo leidet das Element MmnN den Druck $\delta z dp$ gegen mn, wenn δ die jetzige Dichtigkeit der eingeſchloſſenen Luft bedeutet, und dieſem iſt der von dem Gewicht des Elements abhängende Druck $-\delta z dx$ entgegen geſetzt. Demnach wird dies Element von einer Kraft $= -dz(dp + dx)$ gegen PQ zu beſchleuniget. Die Geſchwindigkeit deſſelben ſey $= \sqrt{u}$, ſo hat man

$$-\frac{\delta z(dp + dx)}{\delta z ds} = \frac{du}{ds}, \text{ oder } dp + dx = -du$$

Nun ſetze man den körperlichen Raum FMNG $= Z$, FadG $= Y$, jeden unbeſtimmten Querſchnitt $= z$, den Querſchnitt $ad = y$; ſo hat man

$$u = \frac{y^2}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} \cdot q \; (6 \text{ §.}), \text{ alſo}$$

$$dp + dx = -\frac{Z^2}{z^2} \cdot d\frac{y^2}{Y^2} q - \frac{y^2}{Y^2} q \cdot d\frac{Z^2}{z^2}.$$

Ferner iſt $ydw = -\frac{Y}{Z}.zds$ (5 §.), alſo

$\frac{Z}{z} = -\frac{Yds}{ydw}$, und man erhält $dp = -dx$

$+\frac{Y}{ydw}.d\frac{y^2}{Y^2}q.\frac{Z}{z}ds - \frac{y^2}{Y^2}q.d\frac{Z^2}{z^2}$,

folglich $p = C - x + \frac{Y}{ydw}d.\frac{y^2}{Y^2}q\int\frac{Z}{z}ds$

$-\frac{y^2}{Y^2}.\frac{Z^2}{z^2}q$. Das Integral $\int\frac{Z}{z}ds$ nehme man ſo, daß es verſchwindet, wenn $s = 0$ iſt. Die centriſche Linie QPK ſey $= \lambda$, und das Integral $\int\frac{Z}{z}ds$ werde $= K$, wenn $s = \lambda - w$ geſetzt wird, ſo hat man zugleich $z = y$, $Z = Y$, $x = HL = u$. Iſt nun die Kraft, welche gegen ad drückt, ſo groß, als das Gewicht einer gleichartigen Luftſäule von der Dichtigkeit G in der Höhe $= k$, ſo muß bey eben den zuletzt angenommenen Vorausſetzungen $p = \frac{Gk}{\delta}$ ſeyn, und man erhält $C = \frac{Gk}{\delta} + u + q - \frac{Y}{ydw}.d\frac{y^2}{Y^2}q.K$;

folglich $p = \frac{Gk}{\delta} + u + q - x$

$$+\frac{Y}{ydw}d\frac{y^2}{Y^2}q\left(\int\frac{Z}{z}ds - K\right) - \frac{y^2}{Y^2}.\frac{Z^2}{z^2}q.$$

Wird ferner $s = 0$ geſetzt, ſo hat man zugleich $Z = 0$, $x = CQ = b$, und $p = k$, alſo

$$k = \frac{Gk}{\delta} + u - b + q - \frac{Y}{ydw}\, d\, \frac{y^2}{Y^2}\, q \,.\, K.$$

Der ganze körperliche Raum AFGD ſey $= A$, ſo iſt $\delta = \frac{A}{Y} \cdot \Delta$, und man erhält $k = \frac{G\,.\,Y\,.\,k}{A\,.\,\Delta}$

$$+ u - b + q - \frac{Y}{ydw} \,.\, d\frac{y^2}{Y^2}\, q \,.\, K.$$

37 §.

Das Gefäß *AFGD* ſey ein grader Cylinder, oder ein grades Priſma, und die Querſchnitte deſſelben $= c$: man ſucht die Gleichung zwiſchen w und q. 33 Fig.

Aufl. Dieſe Vorausſetzung giebt $Z = c\,.\,s$, $Y = c(\lambda - w)$, $y = z = c$, alſo $\frac{Y}{ydw} = \frac{\lambda - w}{dw}$, $\frac{Z}{z}\, ds = sds$, und nach gehöriger Integration $K = \frac{1}{2}(\lambda - w)^2$. Weiter wird $d\,.\,\frac{y^2}{Y^2}\, q = \frac{1}{(\lambda - w)^2}\, dq + \frac{2q}{(\lambda - w)^3}\,.\, dw$, folglich $\frac{Y}{ydw}\, d\, \frac{y^2}{Y^2}\, q = \frac{dq}{(\lambda - w) dw} + \frac{2q}{(\lambda - w)^2}$, und dies nochmahl mit $K = \frac{1}{2}(\lambda - w)^2$ multiplicirt, giebt $\frac{dq(\lambda - w)}{2dw} + q$, und man erhält

$$k = \frac{G\,.\,k\,.\,c(\lambda - w)}{A\,.\,\Delta} + u - b - \frac{dq(\lambda - w)}{2dw}.$$

Man kan nun $u-b$ in Vergleichung mit k weglaſſen, und wenn alsdenn $\mathrm{A}=c\lambda$ geſetzt wird, ſo hat man $k=\frac{Gk(\lambda-w)}{\lambda\cdot\Delta}-\frac{dq(\lambda-w)}{2dw}$,

und daraus folgt $dq=\frac{2Gkdw}{\lambda\cdot\Delta}-\frac{2kdw}{\lambda-w}$.

Die Integration giebt alsdenn $q=C+\frac{2Gkw}{\lambda\cdot\Delta}$ $+2kl(\lambda-w)$; und weil w und q zugleich verſchwinden müſſen, ſo wird $C=-2kl\lambda$, folglich

$$q=\frac{2Gkw}{\lambda\cdot\Delta}+2kl\frac{\lambda-w}{\lambda},$$

oder $q=\frac{2Gkw}{\lambda\cdot\Delta}-2kl\frac{\lambda}{\lambda-w}$.

38 §.

34 Fig. In dem Theil $AFGD$ der Röhre iſt Luft, die ſich ſo wohl gegen FG zu, als auch gegen AD zu ausbreitet, weil in AD kein unbewegliches Hinderniß, wie bisher, angenommen wird: beyde Geſchwindigkeiten der äuſſern Querſchnitte AD und FG ſind gegeben, man ſucht die Geſchwindigkeit der Luft in jedem andern gegebenen Querſchnitt MN dieſer Röhre.

Aufl. Binnen dem Element der Zeit dt rücke FG in fg, AD in ad, und MN in mn, ſo daß die drey Geſchwindigkeiten dieſer Flächen ſich wie Qq, Kk, Pp verhalten. Wenn nun hier die Vorausſetzung des 5 §. ebenfals angenommen wird, ſo hat man

ADMN

$ADMN : admn = MFGN : mfgn$, und $admn - ADMN : ADMN = mfgn - MFGN : MFGN$, d. i. $AD . Kk + MN . Pp : ADMN = FG . Qq - MN . Pp : MFGN$. Hieraus folgt $AD . Kk . MFGN + MN . Pp . MFGN = FG . Qq . ADMN - MN . Pp . ADMN$, und es wird $Pp = \frac{FG . Qq . ADMN - AD . Kk . MFGN}{MN . AFGD}$.

Wenn nun $\sqrt{v}$, $\sqrt{V}$ und $\sqrt{u}$, die Geſchwindigkeiten der Querſchnitte FG, AD, MN ſind, ſo verhalten ſich dieſe Geſchwindigkeiten wie Qq, Kk, Pp, und man findet $\sqrt{u} = \frac{FG . ADMN . \sqrt{v} - AD . MFGN . \sqrt{V}}{MN . AFGD}$.

39 §.

Wenn AD ein feſter Boden wäre, ſo wäre $\sqrt{u} = \frac{FG . AMND . \sqrt{v}}{MN . AFGD}$, und wenn FG ein feſter Boden, AD aber allein offen wäre, ſo hätte man $\sqrt{u} = \frac{AD . MFGN . \sqrt{V}}{MN . AFGD}$. Die Differenz dieſer beyden Geſchwindigkeiten giebt alſo $\sqrt{u}$ für den Fall, wenn FG und AD beyde offen ſind, und die Luft ſich nach beyden Seiten ausbreitet. Weil die Geſchwindigkeiten $\sqrt{V}$ und $\sqrt{v}$ einander entgegengeſetzt ſind, wenn die Flächen AD und FG ſich nach entgegengeſetzten Richtungen bewegen, ſo kann man auch $\sqrt{u}$ als die Summe der beyden Geſchwindigkeiten betrachten, womit das Element MmnN fortgehen würde, wenn entweder AD oder FG verſchloſſen wäre: nur muß man in dem eben erwehnten Fall eine Ge- 34 Fig.

ſchwin-

ſchwindigkeit in Anſehung der andern negativ nehmen. Wenn AD und FG beyde nach einerley Richtung längſt der centriſchen Linie KPVQ fortgiengen, ſo wäre $\sqrt{u} =$

$$\frac{FG.ADMN.\sqrt{v}}{MN.AFGD} + \frac{AD.MFGN.\sqrt{V}}{MN.AFGD}.$$

Es ſey das Element $M\mu\nu N = \frac{AMND}{AFGD}.FfgG$ und $\mu m n \nu = \frac{FMNG}{AFGD}.AadD$, ſo wird $MmnN =$

$$\frac{AMND.FfgG - FMNG.AadD}{AFGD}$$, und es iſt nun

$\frac{Pp}{dt} = \frac{P\pi - \pi p}{dt}$ die Geſchwindigkeit der Fläche MN, wenn $\frac{Qq}{dt}$ und $\frac{Kk}{dt}$ die Geſchwindigkeiten der Flächen FG und AD ſind.

40 §.

In dem Raum *AFGD* ſey anfangs Luft von gegebener Dichtigkeit eingeſchloſſen, die ſich in der Zeit *t* in den Raum *TRSV* ausbreitet, ſo daß binnen dieſer Zeit *FG* in *RS* und *AD* in *TV* rückt. Für den jetzigen Zeitpunct ſind $\sqrt{q}$ und $\sqrt{Q}$ die Geſchwindigkeiten der Flächen *RS* und *TV*: man ſucht das Geſetz, nach welchem ſich dieſe Geſchwindigkeiten ändern.

Aufl. Anfangs betrachte man die Sache ſo, als wenn TV unbewegt bliebe, und allein RS in der Zeit *dt* in *rs* fortrücke. Man ſetze $QP = s$, $P\pi = -ds$,

QW

$QW = w$, $K\eta = \xi$, $RS = y$, $TV = \omega$, $MN = z$, den körperlichen Raum $TRSV = Y$, und $TMNV = Z$; ſo hat man $dx + dp = -d . \frac{y^2}{Y^2} : \frac{Z^2}{z^2} . q =$

$$-\frac{Z^2}{z^2} . d\frac{y^2}{Y^2}q - \frac{y^2 q}{Y^2} . d\frac{Z^2}{z^2}.$$ Ferner wird

$ydw = -\frac{Y}{Z} . zds$, alſo $-\frac{Z}{z} = \frac{Yds}{ydw}$, und

$$-\frac{Z^2}{z^2} . d\frac{y^2}{Y^2}q = \frac{Y}{ydw} . d\frac{y^2}{Y^2}q . \frac{Z}{z}ds,$$ folglich

$$dp = -dx + \frac{Y}{ydw} . d\frac{y^2}{Y^2}q . \frac{Z}{z}ds - \frac{y^2 q}{Y^2} . d\frac{Z^2}{z^2}.$$

Die Gleichung iſt mit derjenigen einerley, die im 30 §. gefunden ward, und es war voraus zu ſehen, daß dieſelbe Differentialgleichung gefunden werden muſte. Nach geſchehener Integration muß man ſich nun bey Beſtimmung der beſtändigen Gröſſe eben ſo verhalten, wie im 30 §. und es wird alsdenn

$$p = u + q - x + \frac{Y}{ydw} . d\frac{y^2}{Y^2}q \int \frac{Z}{z}ds - \frac{y^2}{Y^2} . \frac{Z^2}{z^2} q.$$

Nunmehro muß man $s = \lambda + \xi$ ſetzen, ſo iſt zugleich $x = L\eta$, $Z = 0$, und $p = k$. Nimmt man demnach $L\eta = u'$ an; ſo wird

$$k = u + q - u' + \frac{Y}{ydw} . d\frac{y^2}{Y^2}q \int \frac{Z}{z}ds.$$

Man

Man verfahre nun eben ſo, um eine Gleichung zwiſchen w, ξ und Q zu finden, ſetze in ſolcher Abſicht $KP = r$, und verſtehe nun den Raum RMNS durch X, ſo ergiebt ſich

$$k = u' + Q - u + \frac{Y}{\omega d\xi} d\frac{\omega^2}{Y^2} - Q\int\frac{X}{z}dr.$$

Das Integral $\int\frac{Z}{z}dr$ wird ſo genommen, daß es bey der Vorausſetzung $r = -\xi$ verſchwindet, und nach der Integration ſetzt man $r = \lambda + w$. Nun hat man überdem noch die Gleichungen $dt = \frac{dw}{\sqrt{q}}$, und $dt = \frac{d\xi}{\sqrt{Q}}$, alſo $dw\sqrt{Q} = d\xi\sqrt{q}$. Kann man nun dieſe drey Gleichungen ſo mit einander verbinden, daß man von den vier Gröſſen w, ξ, q, Q zwey nach einander wegſchaft, und auf eine Gleichung kommt, die nur zwey von dieſen Gröſſen, nebſt ihren Differentialien enthält, ſo hängt die übrige Auflöſung von der Integration ab.

41 §.

Dieſe Schlüſſe würden ihre Anwendung finden, wenn auſſer TRSV der übrige Raum in der Röhre von Luft leer wäre. Aendert man dieſe Vorausſetzung ſo, daß der übrige Raum auch mit Luft angefüllt angenommen wird; ſo bleibt zwar dieſelbe Gleichung für dp, allein man muß alsdenn bey Beſtimmung der beſtändigen Gröſſe nach der Integration ſo verfahren, wie dazu im 33 §. die Anleitung iſt gegeben worden. Man erhält alsdenn die beyden Gleichungen

$k =$

$$k = u - u' + \frac{D}{\delta}(k+q) + q + \frac{Y}{y\,dw}\, d\,\frac{y^2}{Y^2}\, q \int \frac{Z}{z}\, ds$$

und

$$k = u' - u + \frac{D}{\delta}(k+Q) + Q + \frac{Y}{\omega\, d\xi}\, d\,\frac{\omega^2}{Y^2}\, Q \int \frac{X}{z}\, dr.$$

womit die dritte $dw\sqrt{Q} = d\xi\sqrt{q}$ verbunden werden muß. Uebrigens bleibt $\delta = \frac{A}{Y}\Delta$, wenn Δ die Dichtigkeit der zwiſchen AD und FG anfangs eingeſchloſſenen Luft bezeichnet.

42 §.

Die Röhre iſt grade cylindriſch und horizontal: man ſucht, wie die Geſchwindigkeiten der beyden äuſſern Flächen, und ihre durchlaufenen Wege von einander abhängen, wenn der übrige Raum der Röhre auſſerhalb *TRSV* von Luft leer iſt.

Aufl. Weil bey der angenommenen Vorausſetzng u und u' wegfallen, ſo hat man die Gleichungen

1) $k = q + \frac{Y}{y\,dw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds,$

2) $k = Q + \frac{Y}{\omega\, d\xi} \cdot d\frac{\omega^2}{Y^2} Q \int \frac{X}{z} dr,$

3) $dw\sqrt{Q} = d\xi\sqrt{q}.$

Ueberdem ſey wie im 32 §. $\omega = y = z = f$, ſo hat man $Y = (\xi + \lambda + w)f$, $Z = (\xi + \lambda - s)f$, alſo $\frac{Z}{z} ds = (\xi + \lambda - s)\,ds$, und $\int \frac{Z}{z} ds = (\xi + \lambda)s - \frac{1}{2}ss + C$. Für $s = -w$ iſt dies

Integral $= 0$, alſo $C = (\xi + \lambda)w + \frac{1}{2}ww$, und

$$\int \frac{Z}{z} ds = (\xi+\lambda)w + \tfrac{1}{2}ww + (\xi+\lambda)s - \tfrac{1}{2}ss.$$

Nun ſetze man $s = \lambda + \xi$, ſo wird $\int \frac{Z}{z} ds =$ $\frac{1}{2}(\xi+\lambda+w)^2$. Ferner wird $\frac{y^2}{Y^2} = \frac{1}{(\xi+\lambda+w)^2}$,

alſo $d\frac{y^2}{Y^2}q = \frac{1}{(\xi+\lambda+w)^2}dq - \frac{2q}{(\xi+\lambda+w)^3}dw$,

und $\frac{Y}{ydw} = \frac{\xi+\lambda+w}{dw}$, folglich $\frac{Y}{ydw}d\frac{y^2}{Y^2}q$ $= \frac{dq}{(\xi+\lambda+w)dw} - \frac{2q}{(\xi+\lambda+w)^2}$. Dies nochmahl mit $\int \frac{Z}{z} ds = \frac{1}{2}(\xi+\lambda+w)^2$ multiplicirt giebt $\frac{1}{2}.\frac{(\xi+\lambda+w)dq}{dw} - q$, und wenn man dieſen Werth in der erſten Gleichung braucht, ſo wird

$$1)\ k = \frac{(\xi+\lambda+w)dq}{2dw}.$$

Wenn man mit der zweyten Gleichung eben ſo umgehet, ſo findet man

$$2)\ k = \frac{(w+\lambda+\xi)dQ}{2d\xi}.$$

Dieſe Gleichungen laſſen ſich ſo ausdrücken

$$2kdw = (\xi+\lambda+w)dq$$
$$2kd\xi = (w+\lambda+\xi)dQ.$$

und

und die erſte durch die zweyte dividirt giebt $\frac{dw}{d\xi} = \frac{dq}{dQ}$. Weil nun auch 3) $\frac{dw}{d\xi} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}}$ iſt, ſo wird $\frac{dq}{dQ} = -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}}$, alſo $\frac{dq}{\sqrt{q}} = \frac{dQ}{\sqrt{Q}}$, und die Integration giebt $2\sqrt{q} = 2\sqrt{Q}$, weil q und Q zugleich verſchwinden müſſen. Demnach hat man $q = Q$ (wie in dieſem leichten Beyſpiel vorauszuſehen war) folglich auch $dw = d\xi$, und $w = \xi$. Setzt man nun w ſtatt ξ in der erſten Gleichung, ſo erhält man

$$dq = \frac{2kdw}{\lambda + 2w} = \frac{kdw}{\frac{1}{2}\lambda + w}, \text{ und es wird } q = kl\frac{\frac{1}{2}\lambda + w}{\frac{1}{2}\lambda} = Q.$$

Ich habe dies leichte Beyſpiel erwählt, um nur die Methode, nach welcher die ganze Rechnung geführt werden muß, deutlich zu machen. In vielen Fällen hat es ſeine groſſe Schwierigkeit, aus den dreyen Fundamentalgleichungen drey andre herzuleiten, die man integriren kann. Zuweilen kan man alsdenn aus andern Gründen ſchon eine oder die andre der nöthigen Beſtimmungen hernehmen, und dadurch die Rechnung verkürzen.

43 §.

Die Röhre bleibe wie im vor. §. grade cylindriſch und horizontal, nur ſey der Raum auſſerhalb *TRSV* gleichfals mit Luft angefüllt: man ſucht wie die Geſchwindigkeiten

der äuſſern Flächen *TV*, *RS*, und ihre durchlaufenen Wege von einander abhängen.

Aufl. Wenn man aus den Gleichungen des 40 §. der jetzigen Vorausſetzung gemäß u' und w wegläſt, und $\frac{A}{Y}\Delta$ ſtatt δ braucht, ſo hat man

$$1)\ k = \frac{D.Y}{\Delta.A}(k+q)+q+\frac{Y}{ydw}\,d\frac{y^2}{Y^2}q\int\frac{Z}{z}ds$$

$$2)\ k = \frac{D.Y}{\Delta.A}(k+Q)+Q+\frac{Y}{\omega d\xi}\,d\frac{\omega^2}{Y^2}Q\int\frac{X}{z}dr$$

$$3)\ dw\sqrt{Q} = d\xi\sqrt{q}.$$

Weiter iſt $\omega=y=z=f$, $Y=(\xi+\lambda+w)f$, $Z=(\xi+\lambda-\lambda)f$, und man findet wie im vor. §.

$$\int\frac{Z}{z}ds = \tfrac{1}{2}(\xi+\lambda+w)^2, \text{ und } \frac{Y}{ydw}\,d\frac{y^2}{Y^2}q$$

$$\int\frac{Z}{z}ds = \tfrac{1}{2}\frac{(\xi+\lambda+w)dq}{dw} - q.$$ Ferner wird

$A=\lambda f$, alſo

$$1)\ k = \frac{D.(\xi+\lambda+w)}{\Delta.\lambda}(k+q)+\tfrac{1}{2}\frac{(\xi+\lambda+w)dq}{dw}.$$

Eben ſo findet man

$$2)\ k = \frac{D(\xi+\lambda+w)}{\Delta.\lambda}(k+Q)+\tfrac{1}{2}\frac{(w+\lambda+\xi)dQ}{d\xi}.$$

Aus dieſen Gleichungen folgt,

$$1)\ \frac{k}{\xi+\lambda+w} = \frac{D(k+q)}{\Delta.\lambda}+\frac{dq}{2dw}$$

$$2)\ \frac{k}{\xi+\lambda+w} = \frac{D(k+Q)}{\Delta.\lambda}+\frac{dQ}{2d\xi},$$

und

und wenn man eine von der andern ſubtrahirt, ſo wird

$$o = \frac{D(q-Q)}{\Delta.\lambda} + \frac{dq}{2dw} - \frac{dQ}{2d\xi}.$$

Man ſetze $\frac{dw\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}$ ſtatt $d\xi$, ſo wird

$$\frac{dq}{2dw} - \frac{dQ\sqrt{q}}{2dw\sqrt{Q}} = -\frac{D(q-Q)}{\Delta.\lambda},$$

folglich

$$\frac{dq}{2\sqrt{q}} - \frac{dQ}{2\sqrt{Q}} = -\frac{D(q-Q)}{\Delta.\lambda} \cdot \frac{dw}{\sqrt{q}}.$$

oder

$$\frac{dq:2\sqrt{q} - dQ:2\sqrt{Q}}{\sqrt{q}-\sqrt{Q}} = -\frac{D(\sqrt{q}+\sqrt{Q})}{\Delta.\lambda}$$

$$\cdot \frac{dw}{\sqrt{q}} = -\frac{D(dw+d\xi)}{\Delta.\lambda},$$ und die Integration giebt $l(\sqrt{q}-\sqrt{Q}) = C - \frac{D(w+\xi)}{\Delta.\lambda}$. Weil nun w, ξ, q, und Q zugleich verſchwinden müſſen, ſo wird $C = l o$, und man weis, daß dieſer Ausdruck unendlich groß ſey. Demnach bleibt allemahl $l(\sqrt{q}-\sqrt{Q}) = l.o$, und dies giebt $\sqrt{q} = \sqrt{Q}$, wie auch voraus zu ſehen war. Es wird demnach auch $w = \xi$, und die erſte Gleichung giebt

$$k = \frac{D(\frac{1}{2}\lambda+w)}{\frac{1}{2}\lambda.\Delta}(k+q) + \frac{(\frac{1}{2}\lambda+w)dq}{dw}.$$

Man ſetze $\frac{\Delta}{D} = m$, ſo wird

$$dq + \frac{2qdw}{m\lambda} = \frac{2kdw}{\lambda + mw} - \frac{2kdw}{m\lambda}.$$

Man multiplicire mit $e^{(\lambda+2w):m\lambda}$, und integrire alsdenn, ſo findet man $e^{(\lambda+2w):m\lambda} q = k \,.\, S$ $- ke^{(\lambda+2w):m\lambda} + C$, wenn, um abzukürzen, $\int \frac{e^{(\lambda+2w):m\lambda}}{\lambda+2w} = S$ geſetzt wird. Eben dies Integral nehme man ſo, daß es für $w = 0$ verſchwindet, ſo iſt zugleich $q = 0$, und es wird $C = ke^{\frac{1}{m}}$; folglich erhält man

$$e^{(\lambda+2w):m\lambda} . q = k(e^{\frac{1}{m}} + S) - ke^{(\lambda+2w):m\lambda}.$$

Wenn m eine ſehr groſſe Zahl iſt, ſo läſt ſich, wie im 34 §. eine Näherungs-Methode anwenden, die ſo lange verſtattet iſt, als $\frac{\lambda+w}{\lambda}$ in Vergleichung mit m nur klein bleibt. Es wird nemlich in dieſer Vorausſetzung beynahe $e^{(\lambda+2w):m\lambda} = 1 + \frac{\lambda+2w}{m\lambda}$ (402 §. Hydraul.), alſo

$$S = \int\left(\frac{2dw}{\lambda+2w} + \frac{2dw}{m\lambda}\right) = l\frac{\lambda+2w}{\lambda} + \frac{2w}{m\lambda};$$

und wenn dieſe Werthe, ſo wie auch $e^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$

in

in die gefundene Gleichung geſetzt werden, ſo erhält man

$$\left(1+\frac{\lambda+2w}{m\lambda}\right)q = k\left(1+\frac{1}{m}+l\frac{\lambda+w}{\lambda}+\frac{2w}{m\lambda}\right)$$

$$-k-\frac{k(\lambda+2w)}{m\lambda},$$

oder $\left(1+\frac{\lambda+2w}{m\lambda}\right)q = kl\frac{\lambda+2w}{\lambda}$;

und die Multiplication mit $\frac{1}{1+(\lambda+2w):m\lambda}$

beynahe $= 1-\frac{\lambda+2w}{m\lambda}$ giebt

$$q = k\left(1-\frac{\lambda+2w}{m\lambda}\right)l\frac{\lambda+2w}{\lambda}.$$

Wenn auſſerhalb des Raums TVSR gar keine Luft vorhanden iſt, ſo hat man D = 0, alſo $\frac{\Delta}{D}$ = $m = \infty$, und dis giebt $q = kl\frac{\lambda+2w}{\lambda}$, wie im 42 §.

Der

Der IV. Abſchnitt.

Verſuch einer Theorie der Luft-Pumpen.

44 §.

Bey den bisherigen Unterſuchungen über die Bewegung der Luft in Gefäſſen und Röhren iſt der Fall noch nicht beſonders erwogen worden, wenn eine äuſſere Kraft hinzu kommt, welche die Luft nöthiget, aus einem Raum in einen andern zu treten, ſich in einen engern Raum zuſammen zu ziehen, oder auch, wenn ſie ſich vermöge ihrer Federkraft ausbreitet, es hindert, daß dieſe Ausbreitung nicht ſo ſchnell erfolgen kann, als blos vermöge der Federkraft geſchehen müſte. Eine kurze Ueberlegung des verſchiedenen Gebrauchs, wozu eine Luft-Pumpe, die man aus der Aeroſtatik nach ihrer weſentlichen Einrichtung ſchon kennet, dienen ſoll, wird ergeben, daß die erwähnten Fälle hier vorkommen. Man will vermittelſt der Luft-Pumpe enweder die in dem Raum unter der Klocke eingeſchloſſene Luft verdünnen: oder man will die Luft in einem Gefäß verdichten. Im erſten Fall muß beym Zurücktreten des Stempels ein Theil Luft unter der Klocke weg in den Cylinder hineintreten, und wenn der Stempel im Cylinder vorwärts rückt, ſo muß er die hineingetretene Luft wieder heraus in die freye Luft treiben. Im zweyten Fall muß beym Zurücktreten des Stempels Luft von natürlicher Dichtigkeit in den Cylinder hineintreten, und dieſe muß hiernächſt durch die Kraft des Kol-

bens in das Gefäß hineingetrieben werden, worin man die Luft verdichten will. So erfolgt die Würkung, wenn die Luftpumpe ſo eingerichtet iſt, wie es oben im 11. 15. 16. 23 §. Aeroſtat. kurz und nur beyläufig iſt angeführet worden. Die dort beſchriebene Einrichtung war hinlänglich, um einen Begrif davon zu geben, wie beide Würkungen der **Verdünnung** ſowohl, als auch der **Verdichtung** der Luft, in einem hinlänglich verwahrten Raum zuwege gebracht werden können. Wenn man ſich die erſte Würkung, wie bey Waſſerpumpen, als ein Saugen vorſtellen wollte; ſo könnte man eine **Saug-Luftpumpe** von einer **Druck-Luftpumpe** unterſcheiden, wenn jene blos zum **Verdünnen**, und dieſe blos zum **Verdichten** der Luft eingerichtet wäre: eine vereinbarte **Saug- und Druck-Luftpumpe** wäre alsdenn diejenige, womit ſich das eine ſowol als das andre ausrichten lieſſe.

45 §.

Obgleich die Luftpumpe ſogleich nach ihrer erſten Erfindung die Aufmerkſamkeit aller Naturforſcher auf ſich gezogen hat, und die geſchickteſten Künſtler alle Mühe und Fleiß angewandt haben, ihr die nöthige Vollkommenheit zu geben; ſo ſcheint es doch, als wenn man über die beſte Proportion aller Theile, die zu ihrer ganzen mechaniſchen Anordnung gehören, bisher nur wenige und vielleicht noch ſehr unvollkommene Unterſuchungen angeſtellet habe. Ja ſelbſt von denjenigen Gelehrten und Künſtlern, welche beſondre Vorſchläge zu dieſer oder jenen mechaniſchen Anordnung gethan haben, werden die Abmeſſungen aller Theile entweder gar nicht, oder doch ſehr

mangelhaft angegeben. Indeſſen verdient doch dieſe Maſchine wohl vorzüglich eine genaue Unterſuchung nach richtigen mechaniſchen Theorien. Die Bequemlichkeit des Gebrauchs erfordert, daß eine oder höchſtens zwey Perſonen die Luft-Pumpe ohne groſſe Beſchwerde in Bewegung ſetzen, und eine zeitlang erhalten können; und daß auch nicht gar zu lange Zeit erfordert werde, die Luft unter der Klocke ſo weit zu verdünnen, daß ihre Federkraft nicht mehr merklich bleibt, oder ſie bis auf ein gegebenes Verhältniß gegen die natürliche Luft zu verdichten. Ich will verſuchen, wie weit ſich dies alles auf Rechnung bringen laſſe, und wie weit die Theorie hinreichend ſey, die beſte Proportion der Theile bey der ganzen mechaniſchen Anordnung ausfindig zu machen.

46 §.

35 Fig. Die Abmeſſungen der Saug-Luft-Pumpe *ABCD* ſind gegeben, nebſt der Kraft, welche den Kolben *EF* nach der Richtung der Axe des Cylinders treibt: man ſucht die Geſchwindigkeit des Kolbens, nachdem er einen gegebenen Weg $HE = w$ zurück gelegt hat.

Aufl. Weil der Cylinder mit der Klocke vermittelſt einer Röhre HIK zuſammen hängt, ſo kan man ſich alles zuſammen, wie eine einzige in einem fortgehende Röhre, wie im 30 §, vorſtellen. Im Anfang der Bewegung, als die Grundfläche des Kolbens an AB anſchloß, war die Luft in dem Raum der Klocke LK und der Röhre KIH eingeſchloſſen, und in der Zeit t hat ſie ſich in den Raum LKIHE ausgebreitet. Jener Raum LKIH ſey $= A$, und LKIHE $= Y$, ein unbeſtimmter Querſchnitt MN $= z$, HP

 $= s$,

$= r$, der Flächen-Inhalt der Querſchnitte des Cylinders $= f$, der körperliche Raum der Klocke und Röhre von L durch K, I bis $P = Z$; ſo findet aus dem 30 §. die Gleichung

$$p = C - x + \frac{Y}{ydw} \cdot d\frac{y^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds - \frac{y^2}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} q$$

ihre Anwendung, und man muß hier f ſtatt des dortigen y ſchreiben; da dann $\sqrt{q}$ die Geſchwindigkeit des den Kolben unmittelbar berührenden vorderſten Querſchnitts der Luft iſt, und dieſe iſt mit der Geſchwindigkeit des Kolbens einerley. Um die körperlichen Räume Z, Y, nebſt dem Integral $\int \frac{Z}{z} ds$ gehörig auszudrücken, müſte man die Geſtalt der Klocke kennen, und eine Gleichung zwiſchen den Querſchnitten MN der Klocke und ihrer Axe Lp haben, und eine ſolche Gleichung lieſſe ſich finden, wenn die Natur der Linie MLN bekannt wäre, die den Schnitt durch die Axe der Klocke begränzt. Die Natur dieſer Linie dürfte nun wohl nicht allemahl bekannt ſeyn, da es dann ſeine Schwürigkeit haben würde, das Integral $\int \frac{Z}{z} dw$ gehörig auszudrücken, wofern die Geſtalt der Klocke nicht der Geſtalt eines Cylinders nahe kommt. Was den innern körperlichen Raum der Klocke betrift, ſo kan man ihn ziemlich genau finden, wenn man die Klocke mit Waſſer anfüllt, durchs Abwägen das Gewicht dieſer Menge Waſſer ſucht, und aus der bekannten eigenen Schwere des Waſſers berechnet, wie viel Raum die-

ſe Menge füllt. Was endlich die veränderliche Gröſſe x betrift, ſo muß man dadurch die Höhe des unbeſtimmten Querſchnitts MN über den niedrigſten Punct der centriſchen Linie verſtehen.

Man nehme nun der feſtgeſetzten Vorausſetzung gemäß das Integral $\int \frac{Z}{z} ds$ ſo, daß es $=0$ wird, wenn man $s = -w$ ſetzt, ſo wird zugleich $z = f$, und $Z = Y$; ſtatt p aber muß alsdenn die Höhe geſetzt werden, welche dem Druck gemäß iſt, womit die Luft im Cylinder gegen den Kolben preſt. Um dieſen Druck zu finden, erwäge man, daß erſtlich die Atmoſphäre den Kolben von auſſen nach innen preſt. Setzt man die Dichtigkeit der natürlichen Luft $= D$, und die Dichtigkeit der im Cylinder befindlichen Luft $= \delta$, ſo gleicht der erwehnte Druck dem Gewicht einer Luftſäule von einerley Dichtigkeit mit der innern Luft auf der Grundfläche des Kolbens in der Höhe $= \frac{Dk}{\delta}$ (15 §.). Die Kraft, welche den Kolben nach der Richtung FG zieht, ſey dem Gewicht einer natürlichen Luftſäule auf der Grundfläche des Kolbens in der Höhe h gleich; wird alsdenn eben dieſe Kraft durch das Gewicht einer Luftſäule von einerley Dichtigkeit mit der innern Luft ausgedrückt, ſo muß ihre Höhe $= \frac{Dh}{\delta}$ angenommen werden. Dieſem gemäß iſt der Druck des Kolbens nach innen $= df \left(\frac{Dk}{\delta} - \frac{Dh}{\delta} \right)$, und es wird in obiger

Gleichung $p = \frac{D(k-h)}{\delta}$, wenn $s = -w$ iſt. Wird nun überdem alsdenn $x = u$, ſo erhält man

$$\frac{D(k-h)}{\delta} = C - u - q, \text{ und}$$

$$p = \frac{D(k-h)}{\delta} + u + q - x + \frac{Y}{fdw} d . \frac{f^2}{Y^2} q . \int \frac{Z}{z} ds - \frac{f^2}{Y^2} . \frac{Z^2}{z^2} q.$$

Setzt man nunmehro $s = \lambda =$ HPIKL, $x = a$, ſo muß $Z = 0$ und $p = k$ ſeyn, und dies giebt

$$k = \frac{D(k-h)}{\delta} + u + q - a + \frac{Y}{fdw} d . \frac{f^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds.$$

Noch nehme man die anfängliche Dichtigkeit der Luft der Klocke und Röhre $= \Delta$ an, ſo iſt $\delta = \frac{A}{Y} = . \Delta$, und man erhält

$$k = \frac{D . Y . (k-h)}{\Delta . A} + u + q - a + \frac{Y}{fdw} d . \frac{f^2}{Y^2} q \int \frac{Z}{z} ds.$$

Hat man nun den körperlichen Inhalt der Klocke und Röhre $= A$ gefunden, ſo wird $Y = A + fw$, und wenn man das Integral $\int \frac{Z}{z} ds = W$ ſetzt, ſo iſt W eine Function von w. Weil A unveränderlich iſt,

ſo

ſo nehme man $\Lambda = \alpha . f$ an, ſo wird $\frac{f^2}{Y^2} - q =$

$\frac{q}{(\alpha + w)^2}$, und $d\frac{f^2}{Y^2} - q = \frac{(\alpha + w)dq - 2q dw}{(\alpha + w)^3}$.

Man ſubſtituire endlich alle dieſe Werthe, ſo erhält man

$$k = \frac{D(k-h)}{\Delta . \alpha}(\alpha + \mathrm{w}) + u + q - a$$

$$+ \frac{\mathrm{W}}{(\alpha + \mathrm{w})^2 d\mathrm{w}}((\alpha + \mathrm{w})dq - 2q d\mathrm{w}).$$

Die Linien u und a, weil ſie in Vergleichung mit k ſehr klein ſind, kan man aus dieſer Gleichung weglaſſen, und ſie alsdenn ſo ausdrücken:

$$\frac{\mathrm{W}}{\alpha + \mathrm{w}}dq - \frac{2\mathrm{W}q}{(\alpha + \mathrm{w})^2}dw + q dw = k dw - \frac{D(k-h)f}{\Delta . \Lambda}(\alpha + w)dw.$$

Ferner multiplicire man mit $\frac{\alpha + w}{\mathrm{W}}$, ſo erhält man

$$dq + q\frac{(\alpha + w)dw}{\mathrm{W}} - q . \frac{2d\mathrm{w}}{\alpha + \mathrm{w}} = \frac{k(\alpha + \mathrm{w})d\mathrm{w}}{\mathrm{W}}$$

$$- \frac{D(k-h)f(\alpha + \mathrm{w})^2 d\mathrm{w}}{\Delta . \Lambda . \mathrm{W}}.$$

Man ſetze das Integral $\int\left(\frac{(\alpha + \mathrm{w})d\mathrm{w}}{\mathrm{W}} - \frac{2d\mathrm{w}}{\alpha + \mathrm{w}}\right)$ $= \mathrm{X}$, und was hinter dem Gleichheits-Zeichen in $d\mathrm{w}$ multiplicirt iſt, ſey $= Z$, ſo ſind X und Z Functionen von w, und wenn man nun die gefundene Differential-

rentialgleichung mit e^X multiplicirt, ſo wird $e^X dq + q e^X dX = e^X Z dw$. Durch e verſtehe man die baſin der natürlichen Logarithmen, ſo giebt die Integration $e^X . q = \int e^X Z dw + C$, und nachdem C gehörig iſt beſtimmt worden, hat man $q = e^{-X} \int e^X Z dw + C . e^{-X}$.

Auf dieſe Art läſt ſich überſehen, wie man durch die Integration eine Gleichung finden könnte, die q durch w ausdrückte: allein die würkliche Berechnung würde groſſe Schwürigkeiten haben, und auf eine ſo verwickelte Gleichung führen, daß daher nichts fruchtbares für die Ausübung zu hoffen iſt.

47 §.

Wenn die Luftpumpe gebraucht wird, die Luft unter der Klocke zu verdünnen, und man will aus der Anzahl der geſchehenen Kolbenzüge nach der Regel des 21 §. Aeroſtat. ſchlieſſen, wie ſtark die Luft unter der Klocke ſchon verdünnt ſey, ſo muß man verſichert ſeyn, daß während eines Zuges die Luft ſich durch den ganzen Raum der Klocke, des Cylinders, und der Röhre, die beyde verbindet, verbreitet habe. Die Luft muß ſich völlig ins Gleichgewicht geſetzt haben, bevor die Verbindung zwiſchen der Klocke und dem innern Raum des Cylinders gehemmet, und durch das Zurücktreiben des Stempels die in den Cylinder hinein getretene Luft fortgeſchaft wird. Dieſe Ausbreitung der Luft erfordert nun eine gewiſſe Zeit, und dieſe Zeit würde aus der Gleichung $dt = \frac{dw}{\sqrt{q}}$ gefunden werden müſſen, wenn der Werth

von

von *q* aus dem vor. §. durch *w* bekannt wäre. So würde denn die Rechnung über den Effect der Luftpumpe beym Verdünnen der Luft unter der Klocke auf eine ähnliche Art weiter fortgeführet werden könne, wie im 308 u. f. §. der Hydraulik die Rechnungen über den Effect der Waſſerpumpen angeſtellet werden konten, wenn es Saugwerke ſind. Weil die Formul für *t* nicht allein von *w*, ſondern auch von *h*, alſo von der Kraft abhängen würde, die den Kolben fortziehet; ſo würde man aus den Abmeſſungen der Luftpumpe und der an dem Kolben angebrachten Kraft die Zeit eines Kolbenzuges, und daraus ferner die Anzahl der Kolbenzüge für jede andre Zeit finden. So würde ſich alsdenn berechnen laſſen, wieweit ſich die Verdünnung der Luft in gegebener Zeit treiben lieſſe. Umgekehrt würde aus der Zeit eines Kolbenzuges, und den Abmeſſungen der Pumpe die Kraft gefunden werden können, welche den Kolben fortziehen muß. Die im vorigen §. ſchon angemerkten Schwierigkeiten verſtatten nun nicht, die Rechnung auf dieſem Wege weiter zu treiben.

48 §.

Geſetzt aber, daß ſich auch dieſe Schwierigkeiten der Rechnung überwinden lieſſen, ſo dürfte ſich doch die Theorie, woraus die Differentialgleichungen geſchloſſen ſind, nicht mit ſo guten Erfolg auf die Luftpumpen anwenden laſſen, wie die ähnliche Hydrauliſche Theorie auf die Waſſerpumpen. Bey den letztern ſind die data, woraus man rechnet bey dem einen Kolbenzuge ſo, wie bey allen andern, und wenn bey eben dem Saugwerk die Kraft an der Kolbenſtange, und die Länge des Kolbenzuges einerley bleibt,

ſo

ſo bleibt auch die Zeit des Kolben-Zuges einerley. Mit der Luftpumpe aber hat es, wie man leicht ſiehet eine ganz andre Bewandniß. Der Druck der im Cylinder befindlichen Luft gegen den Kolben komt der Kraft, die ihn heraus zu ziehen ſtrebt, zu Hülfe, ſo wie im hydrauliſchen Saugwerk der Druck des Waſſers gegen den Kolben ebenfals der Kraft am Kolben zu Hülfe komt. Dieſer Druck des Waſſers gegen den Kolben iſt bey allen Zügen einerley: wenn aber die Luftpumpe arbeitet, ſo iſt der Druck der innern Luft gegen den Kolben bey jedem folgenden Zuge ſchon geringer als beym vorhergehenden. Bey einerley Kraft am Kolben würden alſo die Zeiten der folgenden Kolbenzüge immer gröſſer werden, und kein ſo gleichförmiges Spiel der Luftpumpe erhalten werden können, als das Spiel der Waſſerpumpen iſt.

Eine andre Urſache, weswegen die Differentialgleichung des 44 §., auch wenn man durch die Integralrechnung ganz bequeme Formuln für das geſuchte finden könte, nicht ſo ſchlechthin auf die Luftpumpen angewandt werden könte, iſt dieſe. Gewöhnlich wird die Verbindungs-Röhre HIK zwiſchen dem Cylinder und der Klocke in Vergleichung mit dem Cylinder und der Klocke ſehr eng gemacht: die Querſchnitte der Klocke der Röhre und des Cylinders ſind daher keine ſolche Functionen der centriſchen Linie, die ſich nach dem Geſetz der Stetigkeit ändern, wie doch die Vorausſetzungen im 5 u. f. §. §. erfordern. Das Geſetz, nach welchem ſie von der centriſchen Linie abhängen, ändert ſich zweymahl plötzlich bey H und K, und deswegen leidet hier die Vorausſetzung von der parallelen Bewegung der in einerley Quer-

ſchnitt liegenden Lufttheilchen ſtarke Einſchränkungen. Wenn die Verbindungsröhre mit dem im 15 §. Aeroſtat. beſchriebenen doppelt durchbohrten Hahn verſehen iſt, ſo ſind die Oefnungen deſſelben gewöhnlich wie die Verbindungsröhre ſelbſt ſehr eng. Deswegen wird man ſchon zum voraus abnehmen, daß eben keine ſo gar kleine Zeit nöthig ſey, wenn ſo viel Luft durchdringen ſoll, daß ihre Dichtigkeit durch den ganzen Raum des Cylinders der Verbindungs-Röhre und Klocke gleichförmig wird.

49 §.

Wenn die an der Kolbenſtange angebrachte Kraft den Stempel ſchon um die ganze Länge des Cylinders zurück gezogen hätte, bevor durch Umdrehung des Hahns der Weg aus der Klocke in den Cylinder geöfnet worden; ſo würde bey Berechnung der Zeit, die während der Ausbreitung der Luft verflieſt, die Aufgabe des 26 §. ihre Anwendung finden: auch würde dieſe Zeit für alle Kolbenzüge einerley ſeyn, weil vermöge der a. a. O. gefundenen Gleichung dieſe Zeit von der anfänglichen Dichtigkeit der Luft unter der Klocke gar nicht abhängen würde. Wenn man hier den Raum unter der Klocke und in der Verbindungsröhre zuſammen $=A$, und den Raum des ganzen Kolbenzuges $=B$, die Zeit, welche während der Ausbreitung der Luft verflieſt, $=t$ ſetzte, ſo hätte man

$$t = \frac{1}{\sqrt{(1+m)}} \cdot \frac{A}{2f\sqrt{gk}} \cdot l\,\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{(\mu-1)}}{\sqrt{\mu}-\sqrt{(\mu-1)}}.$$

Beym Gebrauch der Luftpumpe verfährt man nun freylich nicht ſo, wie hier vorausgeſetzt iſt: man öfnet

net den Hahn, bevor man anfängt den Stempel zurück zu ziehen, und die Luft folgt dem Stempel während ſeiner Bewegung beſtändig nach. So lange der Stempel in Bewegung iſt, bleibt die Dichtigkeit der Luft im Cylinder kleiner, als die Dichtigkeit der Luft unter der Klocke iſt, welches daher begreiflich iſt, weil durch den Hahn weiter keine Luft durchſtreichen kan, wenn die Luft im Cylinder eben ſo dicht iſt, als unter der Klocke. Die Luft ſtreicht mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{\left(k - \frac{k\gamma}{\delta}\right)}$ (17 §.) durch die Oefnung des Hahns, wenn δ und γ die Dichtigkeiten der Luft unter der Klocke und im Cylinder bedeuten: und dieſe Geſchwindigkeit wäre $= 0$, wenn $\gamma = \delta$ wäre. Man kan demnach nicht annehmen, daß in demſelben Augenblick, da der zurücktretende Stempel in Ruhe kommt, die Luft ſchon durch den ganzen Raum der Klocke, der Röhre und des Cylinders gleichförmig verbreitet ſey: es werden von nun an noch einige Zeitmomente erfordert, bevor ſich die Luft völlig ins Gleichgewicht ſetzt. Wenn demnach vermöge der mechaniſchen Anordnung, wodurch die Luft-Pumpe in Würkſamkeit geſetzt wird, der Hahn ſich in demſelben Augenblick ſchlöſſe, da der Stempel in Ruhe kommt; ſo würde bey jedem Zuge nicht ſo viel Luft in den Cylinder hinein treten, als die Rechnung des 21 §. Aeroſtat. vorausſetzt. Es würden demnach mehr Züge nöthig ſeyn, eine gegebene Verdünnung zu erhalten, als nach der Regel des 22 §. Aeroſtat. gefunden werden. Dieſer Umſtand iſt vornemlich bey ſolchen Luftpumpen in Erwägung zu ziehen, die ſtatt des Hahns mit Ventilen verſe-

hen ſind, und wovon ich im folgenden Abſchnitt die nähere Beſchreibung mittheilen werde. Uebrigens ſiehet man wohl, daß die Geſchwindigkeit der durch die Oefnung des Hahns durchſtreichenden Luft, und die Geſchwindigkeit des Kolbens nach einem gewiſſen Geſetz von einander abhängen werden. Jene Geſchwindigkeit iſt allemahl $=\sqrt{k\left(1-\frac{\gamma}{\delta}\right)}$ (17 §.), es mögen δ und γ, wie man will, von einander abhängen. Eben dieſe Geſchwindigkeit iſt demnach unveränderlich, wenn das Verhältniß $\gamma:\delta$ unveränderlich bleibt.

50 §.

Die Anordnung der Luftpumpe iſt ſo beſchaffen, daß die Luft aus dem Raum unter der Klocke durch eine kleine Oefnung in den Cylinder hineintreten muß: die Abmeſſungen der Luftpumpe ſind gegeben, und man ſucht, nach welchem Geſetz ſich die Geſchwindigkeit des Kolbens ändern muß, damit die Dichtigkeit der Luft unter der Klocke und im Cylinder in einem unveränderlichen Verhältniß bleiben.

Aufl. Wenn in der Zeit t der Kolben um den
35 Fig. Weg HE=w fortgerückt iſt, und man bezeichnet den Raum der Klocke und Röhre von L bis H mit A, den veränderlichen Raum im Cylinder von AB bis MN, aber mit Y; ſo hat man $A.\Delta=A\delta+Y\gamma$, wenn Δ die erſte Dichtigkeit der Luft unter der Klocke für den Anfang der Zeit t bedeutet, δ und γ aber die Dichtigkeiten der Luft in den Räumen A und Y

nach

nach Verlauf der Zeit t ſind. Die Fläche der kleinen Oefnung bey H ſey $= f$, die Fläche der Querſchnitte des Cylinders $= c$; ſo hat man $Y = cw$, und es wird $A(\Delta - \delta) = cw\gamma$. Nun ſey $\frac{\gamma}{\delta} = n$ alſo $\gamma = n\delta$, ſo wird ferner $A\Delta = (A + ncw)\delta$, alſo $\delta = \frac{A}{A + ncw} . \Delta$. Die Geſchwindigkeit der durch die Oefnung f durchſtreichendan Luft ſey $= \surd v$, ſo bläſt durch dieſe Oefnung in dem Element der Zeit dt die Maſſe $\delta f dt \surd v$, und um ſo viel wächſt die in dem Raum Y befindliche Maſſe $Y\gamma = A(\Delta - \delta)$. Demnach wird $\delta f dt \surd v = - A d\delta$; und weil $\surd v = \surd\left(k - \frac{k\gamma}{\delta}\right) = \surd k(1-n)$ iſt, ſo erhält man $f\, dt \surd k = - \frac{A}{\surd(1-n)} \cdot \frac{d\delta}{\delta}$.

Die Integration giebt $ft\surd k = \frac{A}{\surd(1-n)}\, l \frac{\Delta}{\delta}$, weil der Werth $\delta = \Delta$ dem Werth $t = 0$ zugehört. Es war aber vorhin $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{A + ncw}{A}$, alſo wird $ft\surd k = \frac{A}{\surd(1-n)}\, l \frac{A + ncw}{A}$, und die Differentiation giebt $f dt \surd k = \frac{A}{\surd(1-n)} \cdot \frac{ncdw}{A + nc^2 w}$, woraus man ferner $\frac{dw}{dt} = \frac{(A + ncw) f \surd k(1-n)}{Anc}$ erhält,

erhält, und dies iſt die geſuchte Geſchwindigkeit des Kolbens.

Man ſiehet hieraus, daß der Kolben mit beſchleunigter Bewegung fortrücken müſſe, und eben dieſe Rechnung hat zugleich auf eine Gleichung zwiſchen t und w geleitet. Demnach iſt man nun im Stande anzugeben, binnen wie vieler Zeit der Kolben durch den ganzen Raum des Kolbenzuges fortrücken müſſe, damit die Dichtigkeiten der Luft unter der Klocke und im Cylinder in einem gegebenen Verhältniß bleiben; die Vollkommenheit der Luftpumpe erfordert, daß dies Verhältniß nur klein, und n beynahe $=1$ ſey, damit ſich noch alles ins Gleichgewicht ſetzen könne, bevor die entgegen geſetzte Bewegung des Kolbens anfängt: widrigenfalls müſte man den Kolben ſo lange in Ruhe laſſen, bis die gleichförmige Verbreitung der Luft erfolgt wäre.

51 §.

Man verſtehe nun durch B den Raum des ganzen Kolbenzuges, und ſetze ſeine Länge $=b$, ſo hat man $B=c.b$, und man hat die Zeit eines ganzen Zuges, wenn man $w=b$ ſetzt. Dieſe Zeit wird demnach $=\frac{A}{2f\sqrt{gk(1-n)}}\,l\,\frac{A+nB}{A}$, da dann g die Höhe des freyen Falles bedeutet (117 §. Mechan.). Die Aenderungen, welche die Geſchwindigkeit des Kolbens leidet, ſind übrigens deſto weniger beträchtlich, je gröſſer der Raum der Klocke in Vergleichung mit dem innern Raum des Cylinders, oder den Raum des ganzen Kolbenzuges iſt. Es war nemlich $\frac{dw}{dt}=\left(1+\frac{ncw}{A}\right).\frac{f\sqrt{k(1-n)}}{nc}$,

und

und der veränderliche Factor $1 + \frac{ncw}{A}$ bleibt beynahe $= 1$, wenn A in Vergleichung mit *cb*, alſo auch mit *cw*, ſehr groß iſt, denn w bleibt beſtändig kleiner als *b*. Nimmt man A unendlich groß an, ſo wird $\frac{dw}{dt} = \frac{f\sqrt{k(1-n)}}{nc}$, und dies iſt der Fall, wenn beym Zurückziehen des Stempels keine Klocke auf dem Teller ſteht. Eben der Fall kommt vor, wenn die Luftpumpe gebraucht wird, die Luft in einem Gefäß zu verdichten, ſo wie es ſchon im 23 §. Aeroſtat. beſchrieben iſt. Wenn nemlich alsdenn der Stempel aus dem Cylinder herausgezogen wird; ſo muß die Luft durch eine kleine Oefnung, die ſonſt durch einen Stöpſel oder etwas dergleichen verſchloſſen bleibt, von auſſen in den Cylinder hineintreten, und dieſe während des Rückzuges hinein getretene Luft treibt der Stempel alsdenn beym folgenden Zuge in das Gefäß hinein, worin die Luft verdichtet werden ſoll. Für dieſen beſondern Fall hat man demnach $\frac{w}{t} = \frac{f\sqrt{k(1-n)}}{nc}$, und wenn $w = b$ geſetzt, giebt die Zeit eines ſolchen Rückzuges

$$= \frac{ncb}{2f\sqrt{gk(1-n)}} = \frac{nB}{2f\sqrt{gk(1-n)}}.$$

Weil dieſer Vorausſetzung gemäß $l\left(1 + \frac{nB}{A}\right) = \frac{nB}{A}$ iſt (315 §. Mech.), ſo giebt die im Anfang dieſes §. angegebene allgemeine Formul eben den

 Aus-

Ausdruck. Es ſey z. E. $A = B = \frac{1}{6}$ Cub. Fuß Pariſer Maaß, $f = 1$ Quadratlinie, und $n = \frac{9}{10}$; ſo wird $\frac{A + nB}{A} = 1 + n = \frac{19}{10}$, alſo $l\,\frac{A + nB}{A} = 0{,}6418539$. Ferner wird $1 - n = \frac{1}{10}$, $k =$ 26000 Pariſ. Fuß, $g = 15{,}1$ Pariſ. Fuß, alſo $gk(1-n) = 39260$, und $\sqrt{gk(1-n)} = 199{,}8$. Weil nun $\frac{A}{f} = \frac{1}{6} \,.\, 20736 = 3456$, ſo wird die geſuchte Zeit $= \frac{1728}{199{,}8} \,.\, 0{,}6418539 = 5\frac{1}{2}$ Secunden.

Um nun zu erfahren, wieviel Zeit noch zur völligen Herſtellung des Gleichgewichts der Luft erfordert werde, nachdem der Stempel wieder in Ruhe gekommen; ſetze man in der Formul des 26 §. $m = 1$, $v = \frac{9}{10}$, alſo $\frac{m+1}{m+v} = \mu = \frac{20}{19}$, und $\frac{1}{\mu} = \frac{19}{20}$. Die geſuchte Zeit iſt =

$$\frac{1}{\sqrt{(1+m)}} \,.\, \frac{A}{2f\sqrt{gk}}\; l\,\frac{1 + \sqrt{(1 - 1:\mu)}}{1 - \sqrt{(1 - 1:\mu)}}$$

und man erhält $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)} = \sqrt{\frac{1}{20}} = 0{,}2236$, alſo $\frac{1 + \sqrt{(1 - 1:\mu)}}{1 - \sqrt{(1 - 1:\mu)}} = \frac{12236}{7764}$, und hievon iſt der natürliche Logarithme $= 0{,}45487$. Weiter wird $\frac{A}{2f} = 1728$, $\sqrt{gk} = 626{,}58$, und $\sqrt{\frac{1}{1+m}}$

$= 0{,}707106$; Demnach iſt die geſuchte Zeit $= \frac{0{,}707106 . 1728 . 0{,}45487}{626{,}58} = \frac{0{,}32164 . 864}{313{,}29}$ $= 0{,}9$ Secunde. Dieſe Zeit zur vorigen addirt giebt ohngefehr $6\frac{1}{2}$ Secunden, und wenn man noch 1 Secunde auf die Umdrehung des Hahns rechnet, ſo werden zu einem Zuge $7\frac{1}{2}$ Secunden Zeit erfordert. Wofern alſo der Stempel etwa in eben ſo vieler Zeit zurück geſchoben wird, ſo werden zu jeder Auspumpung 15 Secunden Zeit erfordert. Weil nun vermöge der im 22 §. Aeroſtat. ſchon angeſtellten Rechnung 10 Auspumpungen nöthig ſind, die Luft unter der Klocke 1000 mahl zu verdünnen, ſo wird dazu eine Zeit von $2\frac{1}{2}$ Minuten erfordert.

52 §.

Wenn nach Umdrehung des Hahns die Verbindung zwiſchen der Klocke und dem Cylinder geſperret iſt, und man öfnet nun die andre Oefnung des Hahns, (welche bey der im 15 §. Aeroſtat. beſchriebenen Pumpe gewöhnlich mit einem kleinen Stöpſel verſehen iſt,) um die Verbindung der im Cylinder befindlichen Luft mit der äuſſern freyen Luft herzuſtellen, ſo ſchlupft ſoviel von der äuſſern Luft durch die Oefnung in den Cylinder hinein, als nöthig iſt, das Gleichgewicht zwiſchen der innern und äuſſern Luft herzuſtellen. Man kan dies verhindern, wenn man den Stempel vor Oefnung des Stöpſels im Hahn ſoweit zurück treibt, bis die Luft im Cylinder ihre natürliche Dichtigkeit hat: (dies Hineintreten der äuſſern Luft in den Cylinder, ſo lange die Luft in ihm dünner als die Atmoſphäre iſt, hat man bey neuern Luftpumpen auf andre Art zu verhindern gewuſt, wie

man aus den unten mitzutheilenden Beſchreibungen erſehen wird) wobey man leicht ſiehet, daß der Stempel ſchon durch den Druck der äuſſern Luft ſoweit würde hinein getrieben werden, wenn das ſtarke Reiben des Stempels an der innern Fläche des Cylinders nicht entgegen wäre. Er tritt indeſſen der Friction ungeachtet allemahl ſchon von ſelbſt bis auf eine gewiſſe Tiefe hinein, die von der Gröſſe der Friction, und der Dichtigkeit der Luft im Cylinder abhängt: allemahl aber wird das Gleichgewicht zwiſchen der äuſſern und innern Luft hergeſtellet werden, wenn man den Stöpſel öfnet, und die hiezu erforderliche Zeit würde ſich nach dem 28 §. berechnen laſſen. Wird nun der Stempel weiter hinein, und dadurch alle Luft, die noch im Cylinder war, hinaus getrieben; ſo kommen zwey Urſachen zuſammen, welche die Dichtigkeit der Luft im Cylinder während der Bewegung ändern. Der Raum, worin dieſe Luft eingeſchloſſen iſt, nimmt ab, und dieſer Umſtand vermehrt ihre Dichtigkeit und Federkraft. Sobald aber der Stempel in Bewegung kommt, und die Dichtigkeit dieſer Luft vergröſſert, ſobald fängt ſie auch an, durch die Oefnung des Hahns heraus zu blaſen, und dieſer Umſtand vermindert wieder ihre Dichtigkeit.

53 §.

Wenn die Pumpe gebraucht wird, die Luft in einem Gefäß zuſammen zu preſſen; ſo geht mit der Luft im Cylinder, während derjenigen Bewegung des Stempels, wodurch das Zuſammenpreſſen bewerkſtelliget wird, ohngefehr eben das vor. Der Unterſcheid beſtehet nur darin, daß die aus dem Cylinder hin-

hinaustretende Luft nun durch die Röhre HIK in das bey *k* feſtgeſchrobene, oder ſonſt auf andre Art ange- 35 Fig.
brachte Gefäß tritt. In demſelben wird nun die Dichtigkeit der darin eingeſchloſſenen Luft durch den neuen Zufluß vergröſſert, da ſtatt deſſen in dem vorhin im vorigen §. betrachteten Fall die Dichtigkeit der äuſſern Luft durch den neuen Zufluß nicht merklich geändert wird. Wenn man nun die jetzige Dichtigkeit der Luft im Cylinder $= \delta$, die Dichtigkeit der äuſſern Luft $= \gamma$ ſetzt; ſo überzeugt man ſich leicht, daß die Geſchwindigkeit der durch die kleine Oefnung des Hahns durchſtreichenden Luft, ſobald nur ſeit dem erſten Anfang der Bewegung wenige Augenblicke verfloſſen ſind, $= k \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)$ angenommen werden könne. Man muß nur bis auf den 17 §. zurück gehen, und erwegen, daß die dortige Gleichung

$$\frac{k\gamma}{\delta} = k + a - b - \frac{f}{A} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot K - v.$$

auch hier ihre Anwendung finde, nur mit dem Unterſcheid, daß *a*, A und K hier veränderlich ſind.

Um dies deutlich zu überſehen, ſtelle man ſich ein 36
paar Gefäſſe ABCD und EHIO, wie im 15 §, vor, Fig.
die mit einander vermittelſt der Oefnung FG zuſammen hängen. Das Gefäß ABCD ſey ein vertical ſtehender, oder auch ſchief liegender Cylinder voll Luft, auf die höchſte Fläche AD drücke ein Kolben, und treibe die Luft aus ABCD in EHIO hinüber. Es ſey ferner QPLK die centriſche Linie, MN ein unbeſtimmter Querſchnitt, und in der Zeit *t* ſey der Kolben aus AD in *ad* um den Weg KL $= r$ fortgerückt. Ueberdem ſey QP $= s$, *a*MN*d* $=$ Z, der im

Cylinder noch mit Luft angefüllte Raum von FG bis $ad = Y$, der Inhalt der Querſchnitte des Cylinders $= c$, und die ganze Länge der centriſchen Linie QPLK $= \lambda$, ſo iſt $Z = (\lambda - r - s)c$, und $Y = (\lambda - r)c$. Nun wird $K = \int \frac{Z}{z} ds = \int (\lambda - r - s) ds$, weil $z = c$ iſt, und man muß ſo integriren, daß dies Integral mit s zugleich verſchwindet. Bey der Integration ſelbſt wird r als unveränderlich betrachtet, und nach der Integration $s = \lambda - r$ geſetzt; ſo wird K eine Function von r, folglich auch von w, weil r und w ebenfalls von einander abhängen. Durch a müſte nun die veränderliche Höhe der Fläche ad über FG ververſtanden werden: man kan aber $a - b$ in Vergleichung mit k weglaſſen. Statt A ſchreibt man alsdenn $Y = (\lambda - r)c$, ſo wird

$$\frac{k\gamma}{\delta} = k - \frac{f}{c} \cdot \frac{dv}{(\lambda - r)dw} \cdot K - v.$$

Nun muß ſich r durch w ausdrücken laſſen, ob es gleich ſeine Schwierigkeit hat, die Gleichung zwiſchen r und w zu finden, ſo wie auch $\frac{\gamma}{\delta}$ als eine Function von w zu betrachten iſt. Um abzukürzen, ſchreibe man nun W ſtatt $\frac{\gamma}{\delta}$, und V ſtatt $\frac{K}{\lambda - r}$, n ſtatt $\frac{c}{f}$, ſo erhält man

$$v + \frac{V dv}{n dw} = k(1 - W), \text{ oder}$$

$$dv + \frac{ndw}{V}.v = \frac{nk(1-W)dw}{V}.$$

Weil nun V eine Function von w iſt, ſo ſey das Integral $\int \frac{dw}{V} = S$, und man nehme es ſo, daß es mit w zugleich verſchwindet; ſo iſt $\frac{dw}{V} = dS$, und man hat $dv + nvdS = \frac{nk(1-W)dw}{V}$.

Man multiplicire mit e^{nS}, und e ſey die baſis der natürlichen Logarithmen, ſo wird

$$e^{nS}dv + v.e^{nS}.ndS = \frac{nk(1-W)e^{nS}dw}{V},$$

oder

$e^{nS}dv + ve^{nS}ndS = nke^{nS}dS - nkWe^{nS}dS$, weil $\frac{dw}{V} = dS$ war. Die Integration giebt

$$e^{nS}.v = ke^{nS} - k\int We^{nS}.ndS + C,$$

und wenn das Integral $\int We^{nS}ndS = \Sigma$ geſetzt, und ſo genommen wird, daß es mit w und S zugleich verſchwindet, ſo erhält man $C = -k$, alſo

$$v = k - ke^{-nS} - k\Sigma e^{-nS}.$$

Es iſt aber $\Sigma = We^{nS} - \int e^{nS}dW + E$, (man vergleiche den 17 §.) alſo wird

$$v = k - ke^{-nS} - kW + ke^{-nS}\int e^{nS}dW - kEe^{-nS}.$$

Aus dieſer Gleichung folgt nun $v = k(1-W)$

=

$= k\left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)$, wenn $n = \frac{c}{f}$ eine etwas groſſe Zahl iſt, und das iſt ſie allemahl, wenn die Oefnung f in Vergleichung mit den Querſchnitten des Cylinders nur klein iſt.

54 §.

Dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß der Druck der Luft gegen den Stempel bey *ad* beſtändig der Höhe k zugehöre, alſo $= \delta c k$ ſey: ſo ſtark muß alſo die Kraft ſeyn, welche den Stempel in den Cylinder hinein treibt. Dieſe Kraft muß demnach veränderlich ſeyn, wenn ſich δ ändert. Wenn man annehmen wollte, daß gegen AD oder *ad* eine beſtändige Kraft drücke, ſo müſte man die Rechnung ſo anſtellen. Dieſe Kraft ſey dem Gewicht einer natürlichen Luftſäule von der Dichtigkeit D in der Höhe h gleich, und man gehe nun bis auf den 10 §. zurück, ſo findet die Gleichung

$$p = C + \frac{f dv}{Y dw} \int \frac{Z}{z} ds - \frac{f^2 v}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2}$$

ihre Anwendung, wenn man nemlich in dortiger Gleichung Y ſtatt A ſchreibt, und x Kürze halber wegen der ſchon bekannten Urſachen wegläſt. Das Integral $\int \frac{Z}{z} ds$ wird ſo genommen, daß es für $s = 0$ verſchwindet, und nach der Integration wird $s = \lambda - r$ geſetzt, da dann in der letzten Vorausſetzung zugleich $Z = 0$ wird, und $p = \frac{Dh}{\delta}$ geſetzt werden

muß.

muß. Dies giebt $C = \frac{Dh}{\delta} - \frac{fdv}{Ydw} . K$, und weil nun dem Werth $s = o$, die Werthe $\int \frac{Z}{z} ds = o$, $Z = Y$, $z = f$, $p = \frac{k\gamma}{\delta}$ zugehören, ſo erhält man $\frac{k\gamma}{\delta} = \frac{Dh}{\delta} - \frac{fdv}{Ydw} . K - v$, da dann $Y = c(\lambda - r)$ iſt. Weil nun $\frac{f}{c}$ ein ſehr kleiner Bruch bleibt, ſo hat man beynahe $v = \frac{Dh - k\gamma}{\delta}$.

Die Kraft, welche den Kolben treibt, lieſſe ſich auch durch das Gewicht einer gleichartigen Luftſäule von der Dichtigkeit G in der Höhe $= k$ ausdrücken, wenn man $Gk = Dh$, alſo $G = \frac{h}{k} D$ nimmt, ſo hätte man $v = \frac{(G - \gamma) k}{\delta}$.

55 §.

In dem Fall, wenn der Stempel die Luft aus dem Cylinder heraus in die freye Luft treibt, muß man durch γ die natürliche Dichtigkeit der Atmoſphäre verſtehen, die alsdenn unveränderlich bleibt. Ob nun gleich δ wenigſtens in den erſten Augenblicken der Bewegung Aenderungen leidet, ſo konnten doch wohl die im 50 §. ſchon erwehnten beyden Urſachen, welche

die

die Dichtigkeit δ ändern, einander größtentheils aufheben, ſo daß dieſe Dichtigkeit ſehr bald nach dem erſten Anfang der Bewegung beynahe beſtändig von einerley Gröſſe bliebe. Könnte dieſe Vorausſetzung beſtehen, ſo würde die Luft beynahe beſtändig mit einerley Geſchwindigkeit durch die Oefnung f herausblaſen, weil die Formul, welche v vermöge der Rechnungen des 53 und 54 §. beynahe ausdruckt, von keinen andern veränderlichen Gröſſen, auſſer γ und δ abhängt. In andern Fällen, wenn man die Luftpumpe dazu braucht, die Luft in einem Gefäß zuſammen zu preſſen, muß man durch γ die Dichtigkeit der in dieſem Gefäß befindlichen Luft und durch δ die Dichtigkeit der Luft im Cylinder verſtehen. Hier iſt nun γ veränderlich und wächſt während der Bewegung des Stempels beſtändig, und eben deswegen muß auch δ beſtändig wachſen, weil δ allemahl gröſſer als γ bleiben muß. Demnach kan in der Vorausſetzung des 54 §. $v = \frac{G+\gamma}{\delta} k$ nicht unveränderlich ſeyn, ſondern muß nothwendig beſtändig abnehmen, weil γ und δ zugleich wachſen. Sollte indeſſen das Verhältniß $\frac{\gamma}{\delta}$ ſich bald einer gewiſſen Grenze nähern, und hiernächſt $\frac{\gamma}{\delta}$ beſtändig beynahe einerley bleiben, ſo würde in der Vorausſetzung des 53 §. $v = k\left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)$ beynahe unveränderlich bleiben.

56 §.

56 §.

Wenn der Stempel aus AD in *ad* gerückt iſt, und man den Weg KL $= r$ ſetzt, ſo hängen γ und δ von r ab, und wenn man ein paar Gleichungen zwiſchen γ, δ, und r hätte, ſo würde man auch eine Gleichung zwiſchen v und r finden können. Eine Gleichung zwiſchen γ, δ und r ergeben folgende Schlüſſe. Der ganze Raum des Kolbenzuges von BC bis AD ſey $=$ B, der innere Raum des Gefäſſes EHIO (mit Inbegrif der Verbindungsröhre QR) $=$ A, die anfängliche Dichtigkeit der Luft in beyden Gefäſſen $= \Delta$; ſo iſt die ganze in beyden Gefäſſen zuſammen enthaltene Maſſe Luft $= (A + B)\Delta$. Wenn man die Länge des Kolbenzuges $= b$ ſetzt, ſetzt, alſo hier b ſtatt λ (53 §.) ſchreibt; ſo verwandelt ſich B in $Y = c(b - r)$, indem der Kolben aus AD in *ad* rückt, und in dem Raum Y iſt nun die Menge Luft $= \delta c(b - r)$ in dem Raum A aber die Menge $A\gamma$ enthalten. Weil nun in beyden Gefäſſen zuſammen noch ſoviel Luft enthalten iſt, als anfangs darin befindlich war; ſo giebt dies die Gleichung $(A + B)\Delta = A\gamma + \delta c(b - r)$. 36 Fig.

Setzt man noch die Geſchwindigkeit des Stempels $= q$, ſo hat man $dt = \frac{dr}{\sqrt{q}}$, und weil auch $dt = \frac{dw}{\sqrt{v}}$ iſt, ſo erhält man $dw = \frac{dr\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$. In der Zeit dt bläſt durch die Oefnung f die Menge Luft $\delta f dw = \frac{\delta f dr \sqrt{v}}{\sqrt{q}}$, und um ſoviel wächſt die in dem Gefäß EHIO enthaltene Menge Luft $A\gamma$; demnach hat man auch $\frac{\delta f dr \sqrt{v}}{\sqrt{q}} = A d\gamma$. Dies iſt eine

neue

neue Gleichung zwiſchen $\gamma, \delta, r, v,$ die aber nun überdem noch eine fünfte veränderliche Gröſſe q enthält. Es fehlt alſo noch eine Gleichung für q, wenn von den fünf Gröſſen γ, δ, r, v, q vier beſtimmt werden ſollen.

57 §.

Wenn man bis auf den 36 §. zurück gehet, ſo ſiehet man wohl, daß die dortige Aufgabe hier ihre Anwendung finde, wenn man eine Gleichung zwiſchen KL $= r$, und der Geſchwindigkeit des Stempels, oder der Fläche ad ſuchen wollte. Nur muß man bemerken, daß KL daſelbſt w hieß, und daß man hier r ſtatt des dortigen w ſetzen müſſe. Dieſem gemäß hat man

$$k = \frac{Gk}{\delta} + u - b + q - \frac{Y}{ydr} \cdot d\frac{y^2}{Y^2}q \cdot K.$$

Hier muß nun δ vermittelſt der Gleichungen des vor. §. beſtimmt werden, $u - b$ kann wegbleiben, und vermöge der im 37 §. ſchon angeſtellten Rechnung wird $\frac{Y}{ydr} \cdot d\frac{y^2}{Y^2}q \cdot K = \frac{dq(b-r)}{2dr} + q$, wenn man noch b ſtatt des dortigen λ der hieſigen Bezeichnung gemäß ſchreibt, alſo erhält man $k = \frac{Gk}{\delta} - \frac{dq(b-r)}{2dr}$, und man hat nun folgende vier Gleichungen

1) $v = \frac{G-\gamma}{\delta} \cdot k,$

2) $k = \frac{Gk}{\delta} - \frac{dq(b-r)}{2dr},$

3) $\frac{\delta f dr \sqrt{v}}{\sqrt{q}} = A d\gamma,$

4) $(A+B)\Delta = A\gamma + \delta c(b-r),$

da

da dann ſtatt der letztern auch ihre Differentialgleichung $0 = A\,d\gamma + c(b-r)\,d\delta - \delta c\,dr$ dienen kann. Wenn man nun drey von den fünf Gröſſen v, q, δ, γ, r nach einander wegſchaffen, und auf eine Gleichung kommen könnte, die nur zwey dieſer Gröſſen mit ihren Differentialien enthielte; ſo würde man alsdenn die Integration verſuchen, und auf ſolche Art dahin ſehen müſſen, daß man endlich auf eine Gleichung zwiſchen q und r käme. Ich habe es auf verſchiedene Art verſucht, bin aber bisher damit nicht zu Stande gekommen, und es ſcheint auch, daß von der völligen Endigung dieſer Rechnung eben nichts brauchbares für die Ausübung zu erwarten ſey. Ich will deswegen bey der Vorausſetzung des 53 §. bleiben, und $v = k\left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)$ annehmen. Eben dieſe Vorausſetzung verſtattet auch anzunehmen, daß v beynahe unveränderlich bleibe, wenn nemlich das Verhältniß $\frac{\gamma}{\delta}$ ſich nicht ſonderlich ändert. Die folgenden Rechnungen muß man alſo nur als einigermaſſen erträgliche Näherungen anſehen, damit man doch etwas habe, was bey Anordnung einer Luftpumpe zur Richtſchnur dienen könne.

58 §.

Die Luft ſoll durch die kleine Oefnung des Hahns mit unveränderlicher Geſchwindigkeit aus dem Cylinder heraus und in die freye Luft treten: man ſucht die Geſchwindigkeit des Stempels, und die Zeit, worin er einen gegebenen Weg zurück legen wird.

Aufl. Man ſetze $\frac{\gamma}{\delta} = n$, ſo ſoll vermöge der angenommenen Vorausſetzung n unveränderlich ſeyn, und man hat $v = k(1-n)$. Ueberdem iſt γ beſtändig einerley, weil hier durch γ die natürliche Dichtigkeit der Atmoſphäre verſtanden werden muß: folglich bleibt auch $\delta = \frac{1}{n}\gamma$ beſtändig einerley. Es iſt aber $\delta f dw = -d.\delta c(b-r) = c(\delta dr - (b-r)d\delta)$, alſo wird $fdw = cdr$, weil $d\delta = 0$ iſt, ſo daß $\frac{dw}{dr} = \frac{c}{f}$ ſeyn muß, folglich $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{q}} = \frac{c}{f}$, und dies giebt $\sqrt{q} = \frac{f}{c}\sqrt{v} = \frac{f}{c}\sqrt{k(1-n)}$. Demnach iſt auch $\sqrt{q}$ beſtändig, und es wird $\sqrt{q} = \frac{r}{t}$, folglich $t = \frac{r}{\sqrt{q}}$, oder $t = \frac{c.r}{f\sqrt{k(1-n)}}$.

Wenn die ganze Länge eines Kolbenzuges $= b$ geſetzt wird, ſo iſt die Zeit eines Kolbenzuges $= \frac{c.b}{f\sqrt{k(1-n)}}$, und dieſe iſt deſto kürzer, je kleiner n iſt, oder je gröſſer die Dichtigkeit der Luft im Cylinder in Vergleichung mit der Dichtigkeit der äuſſern Luft iſt.

Verſtehet man durch t die Zeit eines ganzen Kolbenzuges, ſo hat man $1-n = \frac{c^2b^2}{f^2t^2k}$, und n

$= \frac{f^2t^2k - c^2b^2}{f^2t^2k}$, alſo $\delta = \frac{1}{n}\gamma = \frac{f^2t^2k}{f^2t^2k - c^2b^2}.\gamma$, und die Kraft, welche erfordert wird, den Kolben in der Zeit t durch den Weg b fortzutreiben iſt $= \delta ck$. Wird dieſe $=$ K geſetzt, ſo hat man $K = \frac{f^2t^2ck^2\gamma}{f^2t^2k - c^2b^2}$. Wird die Zeit in Secunden ausgedrückt, ſo muß man wie bekannt iſt $2t\sqrt{g}$ ſtatt t ſchreiben, und es wird $K = \frac{4f^4gt^2k}{4fgt^2k - c^2b}.\gamma ck$.

Für den erſten Anfang der Bewegung ſind dieſe Formuln nicht brauchbar, ſondern alsdenn allererſt, wenn der Kolben merklich von ſeiner Stelle weggerückt iſt. Man kan ſich ohngefehr die Sache ſo vorſtellen, daß in den erſten Augenblicken der Bewegung, die Menge Luft, welche durch die Oefnung des Hahns durchdringt, in Vergleichung der ganzen im Cylinder anfangs befindlichen Menge noch nicht beträchtlich ſey; und daß der Stempel dieſe Luft erſtlich bis auf die Dichtigkeit $\delta = \frac{1}{n}\gamma$ zuſammen drücke, bevor die Bewegung in den Beharrungsſtand kommt, die den Formuln gemäß iſt.

59 §.

Die Luftpumpe wird gebraucht, die Luft in einem gegebenen Gefäß zuſammen zu drücken, und die Luft ſoll aus dem Cylinder in das Gefäß beynahe mit unveränderlicher Ge-

ſchwindigkeit hinein treten: man ſucht die Geſchwindigkeit des Stempels, und die Zeit, worin er einen gegebenen Weg zurück legen muß.

Aufl. Die Gleichung n. 4. im 57 §. giebt $(A+B).\frac{\Delta}{\delta} = \frac{A\gamma}{\delta} + c(b-r)$. Man ſetze $\frac{\gamma}{\delta} = n$, und nehme n unveränderlich an, weil $v = k\left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)$ unveränderlich ſeyn ſoll; ſo erhält man $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{n.A}{A+B} + \frac{c(b-r)}{A+B}$. Ferner ſey $A = a.c$, alſo $a = \frac{A}{c}$, ſo wird $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{na}{a+b} + \frac{b-r}{a+b}$. Ueberdem iſt $\delta f dt\sqrt{v} = A d\gamma$, welches die Gleichung n. 3. im 57 §. war, wenn man $dt\sqrt{v}$ ſtatt $dw = \frac{dr\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$ ſchreibt, und $\gamma = n\delta$, folglich wird $f dt\sqrt{k} = \frac{nA}{\sqrt{(1-n)}} \cdot \frac{d\delta}{\delta}$, und $ft\sqrt{k} = C + \frac{nA}{\sqrt{(1-n)}} l\delta$. Für den Anfang der Bewegung iſt $\delta = \Delta$, und $t = 0$, alſo $C = -\frac{nA}{\sqrt{(1-n)}} l\Delta$, und es wird $ft\sqrt{k} = \frac{nA}{\sqrt{(1-n)}} l\frac{\delta}{\Delta}$. Weil nun

$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{a+b}{na+b-r}$ war, ſo erhält man $t =$ $\frac{nA}{f\sqrt{k(1-n)}}\, l\, \frac{a+b}{na+b-r}$, und die Differentiation giebt $dt = \frac{nA}{f\sqrt{k(1-n)}} \cdot \frac{dr}{na+b-r}$, alſo wird $\sqrt{q} = \frac{dr}{dt} = \frac{f(na+b-r)\sqrt{k(1-n)}}{nA}$, und dies iſt die Geſchwindigkeit des Kolbens.

Weil die ganze Länge des Kolbenzuges $= b$ iſt, ſo wird die Zeit eines Kolbenzuges $= \frac{nA}{f\sqrt{k(1-n)}}$ $l\frac{a+b}{na}$. Dieſe ſey $= t$, und man dividire mit $2\sqrt{g}$ dem 117 §. Mech. gemäß; ſo beſtimmt die Gleichung $t = \frac{nA}{2f\sqrt{gk(1-n)}}\, l\, \frac{a+b}{na}$ auch n durch t, und man hatte $\delta = \frac{(a+b)\Delta}{na+b-r}$, woraus die am Stempel nöthige Kraft $= \delta ck$ gefunden wird.

Der V. Abſchnitt.

Beſchreibung der hauptſächlichſten Arten von Luftpumpen, die ſeit der erſten Erfindung bekannt geworden ſind.

60 §.

Ich habe im 21 §. der Aeroſtatik die Geſchichte von der erſten Erfindung der Luftpumpe ſchon kurz berührt: hier werde ich die erſte Einrichtung der Guerikiſchen ſowohl als der Boyliſchen Luftpumpe zuforderſt beſchreiben, und ſodann von den Aenderungen, die man nach der Zeit mit ihrer mechaniſchen Anordnung vorgenommen hat, ebenfals einige Nachricht geben. Vorläufig bemerke ich aber, daß dieſe Beſchreibung ſich eigentlich nur auf die mechaniſche Anordnung der Pumpe erſtrecken wird, und nicht ſo ſehr auf die Einrichtung der übrigen Geräthſchaft, die man zu den damit anzuſtellenden phyſikaliſchen Verſuchen nöthig hat; dahin die mancherley Arten von Klocken und Recipienten, und die Vorrichtungen gehören, welche dazu dienen, mit allerley Arten von Körpern ſowol in einer ſehr verdünneten als auch in einer ſehr verdichteten Luft mancherley Verſuche zu machen. Die Betrachtung der Luftpumpe in der letztern Abſicht iſt nicht ſo ſehr mathematiſch als phyſikaliſch; in der erſten Abſicht aber, was ihre mechaniſche Anordnung betrift, verdient ihre Structur auch in der Mathematik eine genauere Erwegung.

61 §.

Die zu den phyſikaliſchen Verſuchen nöthige Geräthſchaft lernt man am beſten aus ſolchen phyſikaliſchen Schriftſtellern kennen, welche ſich über dieſen Gegenſtand, und die Verſuche ſelbſt etwas ausführlich eingelaſſen haben. Man kan hier des Hrn. von **Wolff nützliche Verſuche**, und zwar beſonders das V und VI Cap. des I Theils mit vielen Nutzen zu Rath ziehen. Auch habe ich oben im 25 §. der Aeroſtat. ſchon des Hrn. Graveſands Phyſices Elementa Mathematica angeführt, wo man im IV Buch von allen dem, was hieher gehört, umſtändliche Beſchreibungen und ſaubere Zeichnungen antrift. Weil dies Buch nicht in jedermanns Händen ſeyn mögte, ſo will ich hier ſolchen Liebhabern der Naturlehre, die ohne daß ſie groſſe Werke nachſchlagen können, ſich doch hievon einige Kenntniß wünſchen, und vielleicht nur zum Vergnügen mit einer kleinen Pumpe Verſuche anſtellen wollen, ein Paar kleine Schriften empfehlen, wozu ſie leichter gelangen können. Die eine iſt des H. G. Mor. Lowiz **Sammlung der Verſuche, wodurch ſich die Eigenſchaften der Luft begreiflich machen laſſen**, Nürnb. 1754; und die andre des Hrn. Joh. von Muſſchenbröcks **Beſchreibung der doppelten und einfachen Luftpumpe nebſt einer Sammlung von verſchiedenen nützlichen und lehrreichen Verſuchen, welche man mit der Luftpumpe machen kan.** Dieſe kleine Schrift ward anfangs in Holland durch den Druck bekant gemacht, nach der Zeit aber ins Franzöſiſche überſetzt, und der im Jahr 1739 vom Herrn Maſſuet veranſtalteten franzöſiſchen Ueberſetzung der Naturlehre des Herrn Peter

van Muſſchenbröck als ein Anhang beygefüget. Im Jahr 1765 hat ſie Herr Thenn, ins deutſche überſetzt, und mit neuen Zuſätzen vermehrt zu Augsburg herausgegeben.

62 §.

Unter den Schriften, welche von der Luftpumpe, und ihrer ganzen Anordnung etwas umſtändliche Nachricht geben, ſind noch drey Aufſätze merkwürdig, welche den Herrn Nollet zum Verfaſſer haben, und in der Hiſtoire de l'Academie Royale des Sciences de Paris Anneé 1740 und 1741 unter folgendem Titel abgedruckt ſind: Memoire ſur les Inſtrumens, qui ſont propres aux Experiences de l'Air, Premiere, Seconde et Troiſieme Partie. Der erſte Aufſatz beſchäftiget ſich, nebſt einigen allgemeinen Betrachtungen über die vortheilhafte Anordnung einer Luftpumpe überhaupt, mit der Beſchreibung der einfachen Luftpumpe, mit einem Cylinder. Der zweyte Aufſatz beſchreibt die doppelte Luftpumpe mit zweyen Cylindern; und der dritte die bey allerley in verdünnter Luft anzuſtellenden Verſuchen nöthige Geräthſchaft. Hr. Nollet verſpricht nach einen vierten Aufſatz, der beſonders von ſolchen Luftpumpen Nachricht geben ſollte, die zum Zuſammenpreſſen der Luft dienen; eben dies Verſprechen wiederhohlt er im dritten Theil ſeiner Vorleſungen über die Experimental-Naturlehre, in der zehnten Vorleſung 212 S. der Ueberſetzung: mir iſt aber nicht bekant, ob dies Verſprechen von ihm erfüllt worden ſey. Man findet in eben dieſer zehnten Vorleſung der Nolletſchen Experimental-Naturlehre ebenfals eine ziemlich vollſtändige Erzehlung der mit der Luftpumpe anzu-

anzuſtellenden phyſikaliſchen Verſuche, mit der Beſchreibung der dazu nöthigen Geräthſchaft.

63 §.

Die erſte Luftpumpe, welche Otto Guerike brauchte, war ſehr einfach: ſie war völlig, wie eine Hand-Feuer-Sprütze eingerichtet, und nur in Nebendingen davon unterſchieden, die zu dem jetzigen beſondern Gebrauch dienten, um ſie bequem mit dem auszuleerenden Gefäß zu verbinden. Caſpar Schott, dem Guerike ſelbſt in vielen Briefen alle dahin gehörige Nachrichten mitgetheilet hat, giebt davon in ſeiner Technica Curioſa Lib. I. Cap. I. p. 8. 9. folgende Beſchreibung. An dem Haupt-Cylinder AB iſt ein andrer kurzer Cylinder AC ohngefehr unter einem halben rechten Winkel angeſetzt, 37 Fig. der dazu dient, den mit einem etwas engen Halſe EF verſehenen gläſernen Recipienten D mit der Pumpe bey C zu verbinden. Bey E befindet ſich am Halſe des Recipienten ein Hahn, den man verſchlieſſen kan, um der Luft den Rückweg zu ſperren, wenn man den ausgeleereten Recipienten von der Pumpe wegnehmen will, um andre Verſuche damit zu machen. Bey G iſt eine mit einem Ventil verſehene Oefnung, durch welche die Luft aus dem Recipienten in den Cylinder hinein tritt, wenn der Kolben I vermittelſt der Stange IK von A gegen B fortgezogen wird; etwas höher bey H iſt eine andre mit einem Ventil verſehene Oefnung, durch welche die Luft aus dem Cylinder heraus in die freye Luft tritt, wenn man den Stempel von B nach A zurück treibt, da dann das Ventil G der Luft den Rückweg nach den Recipienten verſchlieſt, ſo wie die äuſſere Luft das Ventil

H zudrückt, wenn ſich im Cylinder die aus dem Recipienten herausſtretende verdünnte Luft befindet. Der Hals des Recipienten, der Hahn bey E, und beſonders die Stelle bey C, wo der Hals Recipienten aufgeſetzt wird, müſſen gegen den Zugang der äuſſern Luft aufs ſorgfältigſte verwahrt werden. Um das Eindringen der äuſſern Luft an dieſen Stellen mit deſto mehrerer Sicherheit abzuhalten, ſetzte Guerike die Pumpe beym würklichen Gebrauch in ein Gefäß NOPQ, das ſo hoch mit Waſſer angefüllt war, daß der ganze Hals des Recipienten nebſt dem Hahn E mit Waſſer bedeckt würde. Uebrigens war mit dieſer Pumpe weiter keine mechaniſche Vorrichtung verbunden, die zur Erleichterung der Bewegung des Stempels dienen konnte: nur oben an der Kolbenſtange bey K befand ſich ein Querriegel LM, damit zwey Perſonen angreifen konnten; bey L und M wurden auch wohl Seile angebunden, damit allenfals ein dritter und vierter angreifen konnte, wenn die Arbeit zuletzt, nachdem die Luft im Recipienten ſchon ſtark verdünnt war, ſehr beſchwerlich ward.

64 §.

Es iſt nicht zu läugnen, daß dieſe erſte Guerikiſche Luftpumpe eben darum, weil ſie einfach iſt, ihre Vorzüge habe. Sie iſt wohlfeil, und ihre Bearbeitung macht nicht viele Umſtände. Nur war es unangenehm, daß man nach Schottens Bericht ganze Stunden Zeit brauchte, die Luft im Recipienten ſo weit zu verdünnen, daß ihre Federkraft unmerklich ward. Man ſiehet wohl, daß der Cylinder nicht viel über zwey Zoll im Lichten weit ſeyn konnte, wenn die Arbeit zuletzt nicht gar zu ſchwer werden ſollte,

weil alsdenn die Arbeiter die ganze Federkraft der natürlichen Luft überwinden müſſen. Und weil die ganze Länge des Zuges, um welche der Stempel von den arbeitenden Perſonen bewegt ward, auch wohl nicht über 2 Fuß betragen konte; ſo war der körperliche Raum des Kolbenzuges in Vergleichung mit der Gröſſe der Recipienten nur klein, zumahl da Guerike ziemlich groſſe Recipienten brauchte: und um deswillen wurden ſehr viele Züge zu einer beträchtlichen Verdünnung erfordert. Die eigentliche Beſchaffenheit der gebrauchten Ventile finde ich unter den Nachrichten, die Schott davon giebt, nicht weiter beſchrieben, als daß es heiſt, ſie wären aus Leder verfertiget worden. Eben dieſen Umſtand giebt auch Guerike ſelbſt nur ganz kurz an, in den Experim. Nov. Magdeburg. Lib. III. Cap. II. p. 73. Cap. IV. p. 77. und man ſiehet wohl, daß bey ihrer Verfertigung mehr Vorſicht nöthig geweſen iſt, als bey den Ventilen gemeiner Waſſerpumpen erfordert wird. Beſonders muſte das Ventil G leicht beweglich ſeyn, 37
damit es dem Durchgang der Luft nicht zu viel Wi- Fig.
derſtand entgegen ſetzte, wenn ſie ſchon verdünnet war. Hiernächſt waren auch die Recipienten um deswillen nicht bequem, weil man nicht füglich allerley Sachen hinein bringen konnte, um mit ihnen Verſuche in verdünnter Luft anzuſtellen: wie denn auch die erſten Verſuche, welche Guerike mit ſeiner Luftpumpe machte, vornemlich nur dienten, die Schwere und Federkraft der Luft zu beweiſen, und ſolche Begebenheiten in der Natur zu erklären, die von der Federkraft der Luft abhängen. Dieſe Verſuche bleiben in vieler Abſicht merkwürdig, weil ſie faſt alle im groſſen angeſtellet ſind, und deswegen nun nicht leicht

wieder nachgemacht werden, weil ſie koſtbare Zubereitungen erfordern. Man lernt ſie ſowol aus Guerikens eigenem Werk: Experimenta nova Magdeburgica, als auch aus Caſp. Schotti Technica Curioſa kennen, woſelbſt ſie im erſten Buch unter dem Titel: Mirabilia Magdeburgica umſtändlich erzehlt werden. Einer von dieſen Verſuchen iſt im Jahr 1754, grade hundert Jahr nach der Zeit, da Guerike die erſten öffentlichen Verſuche zu Regensburg angeſtellet hat, bey Gelegenheit der Feyer des Augsburgiſchen Religions-Friedens, auf Koſten der Schule zu Cloſter-Bergen bey Magdeburg, unter der Aufſicht und Veranſtaltung des Herrn G. C. Silberſchlags, wiederhohlt worden. Herr Silberſchlag erzehlt den Erfolg davon in ſeinen im Jahr 1768 herausgegebenen Cloſter-Bergiſchen Verſuchen auf der 69 u. f. f. S. und ſtreuet ſehr artige Anmerkungen darüber ein.

65 §.

Nachdem Robert Boyle aus Schotti Mechanica Hydraulico-Pneumatica die erſte Guerikiſche Luftpumpe, und die damit gemachten Verſuche kennen gelernet hatte, war er ſogleich darauf bedacht, ihren noch übrigen Mängeln abzuhelfen. Er brachte eine mechaniſche Vorrichtung an, um die Arbeit zu erleichtern, und zu verkürzen, und brauchte Recipienten, die oben offen waren, und mit einem Deckel verſchloſſen werden konnten. Die ganze Einrichtung ſeiner Pumpe iſt folgende. Auf einem hinlänglich
38 feſten Fußgeſtelle CD iſt der Cylinder AB in vertica-
Fig. ler Stellung befeſtiget, oben bey A wird der Recipient H, der eben ſo, wie der Guerikiſche mit einem

etwas

etwas engen Halſe, und dem Hahn I verſehen iſt, ſo aufgeſetzt, daß alles gegen das Eindringen der äuſſern Luft wohl verwahrt bleibt. Ganz oben hat der Recipient ſeinen Deckel LM, wo man ebenfals mit Kütte, oder auf andre Art dem Eindringen der äuſſern Luft am Rande des Deckels begegnen muß. Der Deckel hat in der Mitte eine Oefnung, die mit einem Zapfen NO verſchloſſen wird, der ſo genau paſſen muß, daß wenn man ihn gleich in ſeiner Hülſe umdrehet, dennoch keine Luft durchdringen kan. Seitwärts des Zapfens iſt unten am Deckel ein Haken P angebracht, und wenn man unten am Zapfen bey O einen Faden befeſtiget, der über dem Haken P liegt; ſo kan man damit die im Recipienten liegenden Sachen, wenn ſie ebenfals am Faden befeſtiget ſind, in verdünnter Luft durch Umdrehung des Zapfens von der Stelle bewegen, weil ſich alsdenn der Faden aufwickelt. Mit dem Kolben iſt die gezähnte Stange E verbunden, worin das Getriebe F greift, welches vermittelſt der Kurbel G umgedrehet wird. Man kan damit den Stempel nun auf- und abwärts winden, und Boyle, oder vielmehr Robert Hooke, deſſen Rath und Hülfe ſich Boyle bediente, hat dabey die Einrichtung der Fuhrmanns-Winde nachgeahmt. Wenn man den Hahn I öfnet, und alsdenn den Stempel abwärts windet, ſo tritt die Luft aus dem Recipienten in den Cylinder hinein: und damit die hineingetretene Luft, wenn man nach Verſchlieſſung des Hahns I den Stempel wieder hinauf windet, ihren Ausgang finde, iſt oben im Cylinder bey K eine kleine Oefnung gemacht, die nun geöfnet wird, beym Herauswinden des Stempels aber mit einem kleinen Stöpſel verſchloſſen bleibt. Dieſe Einrichtung der

Luft-

Luftpumpe nebſt ſeinen damit angeſtellten Verſuchen, hat Boyle in einer beſondern Schrift bekannt gemacht, die anfangs im Jahr 1659 in engliſcher Sprache, bald nachher aber in lateiniſcher Sprache im Jahr 1661 zu Oxfordt unter folgendem Titel gedruckt iſt: Nova Experimenta Phyſico-Mechanica de vi aeris elaſtica et ejusdem effectibus. Eben die Schrift ward bald darauf auch zu Haag nachgedruckt. Schotte hat im zweyten Buch ſeiner Technicæ Curioſæ unter dem Titel Mirabilia Anglicana einen Auszug daraus mitgetheilt.

66 §.

Nun wäre alſo die Frage, ob Boyle auf dieſe Art würklich die Luftpumpe anſehnlich verbeſſert habe? Die bequemere Einrichtung des Recipienten hatte dabey wohl die wenigſte Schwierigkeit, und mich dünkt, Hr. Nollet theilet die Ehre der erſten Erfindung der Luftpumpe unter Guerikon und Boylen nicht unpartheyiſch genug aus, wenn er dem letztern um deswillen den weſentlichſten und nützlichſten Theil derſelben zuſchreibt, weil er den Recipienten zum Gebrauch bequemer gemacht hat. (Man ſehe die Hiſtoire de l'Acad. Royale des Sciences A. 1740. pag. 416. Ed. Pariſ.) Der weſentlichſte Theil blieb doch wohl immer die Verdünnung der Luft im Recipienten, und nützliche Verſuche hat Guerike genug angeſtellt, ehe er von Boylens Verſuche nähere Nachricht hatte. Das aber hatte etwas mehr zu ſagen, vermittelſt einer bequemen mechaniſchen Anordnung es in die Wege zu richten, daß mit leichterer Arbeit und in kürzerer Zeit eine hinlängliche Verdünnung der Luft zuwege gebracht würde. Soviel iſt gewiß,

daß

daß die Fuhrmannswinde die Arbeit erleichterte: dagegen aber verlohr Boyle die Geſchwindigkeit der Züge. Dies letztere nicht allein hat Guerike in verſchiedenen Briefen an Schotten bey der Boyliſchen Pumpe ausgeſetzt: ſondern er hält auch aus verſchiedenen allerdings erheblichen Gründen dafür, daß ſie nicht ſo vollkommen Luftdichte ſey, wie die ſeinige, beſonders ſeine neuere, davon ich nachher Nachricht ertheilen werde. Boyle ſelbſt ſiehet es als die gröſte Schwierigkeit an, die Pumpe vollkommen Luftdicht zu machen, wobey es denn wohl vornemlich auf die Geſchicklichkeit des Künſtlers ankommt, der ſie verfertiget. Guerike brauchte das Waſſer als das vornehmſte Hülfsmittel, die Luft abzuhalten: und wenn man das, was Guerike mit ſeinen ausgeleerten Gefäſſen ausgerichtet hat, erwegen will, ſo ſiehet man allerdings, daß er die Verdünnung der Luft in denſelben ſchon ſehr weit, und ungemein viel weiter, als Boyle bey ſeinen erſten Verſuchen getrieben habe. Als Guerike die bald nachher zu beſchreibende Einrichtung ſeiner Pumpe veranſtaltet hatte, konte er die Luft im Recipienten mehr als 1000 mahl dünner machen, als die natürliche iſt (Exper. Nova Magdeb. Lib. III. Cap. V. et VI. pag. 78.) Boyle aber hatte den Verdruß, daß die äuſſere Luft oft alsdenn ſchon in ſeine Recipienten drang, wenn die innere 50 bis 70 mahl dünner, als die natürliche war (Schotti Techn. Curioſa Lib. II. Cap. VIII. pag. 105-107.)

67 §.

Einen Vorzug hat die Boyliſche Luftpumpe vor der Guerikiſchen voraus, und dieſer beſtehet darin,

daß

daß ſie nicht blos dient, die Luft im Recipienten zu verdünnen, ſondern auch gebraucht werden kan, die Luft in einem ſtatt des Recipienten auf die Pumpe aufgeſetzten Gefäß zu verdichten. Guerikens vorhin beſchriebene Pumpe konte dies nicht leiſten. Zu dieſem Gebrauch hätte man eine übrigens eben ſo eingerichtete Pumpe mit andern Ventilen verſehen müſſen. Es muß nemlich nun das Ventil bey G die Luft aus dem Cylinder nach den Recipienten durchlaſſen, der Luft im Recipienten aber den Rückweg nach den Cylinder verſchlieſſen. Statt des zweyten Ventils H kan eine bloſſe Oefnung dienen, durch welche die Luft von auſſen in den Cylinder hinein dringt, wenn der Stempel ſo weit bis über dieſe Oefnung weg zurück gezogen iſt. Eine ſolche Oefnung muß alsdenn weiter von G entfernt ſeyn, als das Ventil H davon entfernt war, weil nur ſoviel Luft jedesmahl durch das Ventil G durchgepreſt wird, als ſich zwiſchen dieſem Ventil und der ſtatt des Ventils H angebrachten Oefnung im Cylinder aufhält. Wird bey der Boyliſchen Pumpe der Hahn I verſchloſſen, der Stöpſel K geöfnet, und hierauf der Stempel herab gewunden, ſo füllt ſich der Cylinder mit Luft von natürlicher Dichtigkeit an: wenn hiernächſt der Stöpſel K verſchloſſen, der Hahn I geöfnet, und nun der Stempel wieder hinauf gewunden wird, ſo tritt die Luft aus dem Cylinder durch den Hahn I in den Recipienten, oder das ſtatt deſſelben aufgeſetzte Gefäß hinein. In dem gläſernen Recipienten würde ſich, wie man leicht ſiehet, die Luft wegen der Gefahr des Zerſprengens nicht ſehr verdichten laſſen, deswegen müſſen bey ſtarken Zuſammenpreſſungen auch ſtärkere Gefäſſe gebraucht werden.

68 §.

Um eben die Zeit, als Boyle mit ſeiner Luftpumpe beſchäftiget war, verfiel auch Guerike, ehe er noch von Boylens Bemühungen Nachricht erhalten hatte, auf eine andere Einrichtung der Luftpumpe, wobey er theils die Erleichterung der Arbeit, theils eine ſo viel möglich vollkommene Ausſchlieſſung aller äuſſern Luft zur Abſicht hatte. Im Anfang des Jahrs 1662 hatte Caſpar Schotte in einem Briefe an Guериken der Boyliſchen Schrift, und der darin beſchriebenen Luft-Pumpe erwehnt. Guerike antwortete hierauf unterm 28 Febr. 1662, daß er Boylens Werk noch nicht kenne, ſelbſt aber ſeine eigene Luftpumpe nun weit vollkommener und beſſer eingerichtet habe, als vorher. Auf Schottens Erſuchen ſchickte er ihm im April eben des Jahres eine Beſchreibung ſeiner verbeſſerten Luftpumpe, und Schotte machte ſie noch im I. Buch der Technica Curioſa, die im Jahr 1664 heraus kam, mit bekannt. Folgende kurze Beſchreibung wird einen Begrif davon geben. Ein gewöhnliches hölzernes Waſſer-Kûfen A von 1½ Ellen Höhe und 1 Ellen Breite, dient auſſer einer andern gleich zu erwehnenden Abſicht der Pumpe zugleich zum Fuß-Geſtelle. An der innern Seitenwand dieſes Gefäſſes iſt nemlich der Cylinder BC in verticaler Stellung befeſtiget, mit dem Stempel D iſt die Stempelſtange, wie bey der Boyliſchen, ſo verbunden, daß beym Herabziehen des Stempels die Luft aus dem Recipienten in den Cylinder tritt. Statt der Fuhrmanns-Winde aber iſt hier folgende mechaniſche Vorrichtung angebracht. Die Stempelſtange iſt bey E wieder auf- 39 Fig.

wärts gebogen, und der aufwärts gebogene Schenkel EF iſt ſo lang, daß das oberſte Ende F wieder über dem obern Rand des Gefäſſes A hervor raget. Bey F iſt ein Ring angebracht, und durch denſelben eine Druckſtange IK durchgeſteckt. Dem Cylinder BC gegen über iſt für dieſe Druckſtange eine Stütze ebenfalls auf dem Rande dieſes Gefäſſes gehörig befeſtiget, bey H befindet ſich der Zapfen, um welche die Druckſtange gedrehet werden kan. Der Cylinder BC iſt oben mit einem platten Deckel BV geſchloſſen, durch deſſen Mitte erſtreckt ſich eine kurze Röhre LM aufwärts, und bey L liegt vor dieſer Röhre im Cylinder ein Ventil, das ſich nach unten öfnet, nach oben aber ſchlieſſet. Seitwärts der Röhre iſt im Deckel BV bey T eine andre kleine Oefnung befindlich, über derſelben liegt ein Ventil, das ſich nach oben öfnet, und nach unten ſchlieſſet. Bey I und K an den äuſſern Enden müſſen nun ein paar Leute die Druckſtange wechſelsweiſe niederdrücken, wenn die Pumpe ihre Dienſte thun ſoll, und man ſiehet wohl, daß Guerike hier den Mechaniſmus der groſſen Feuerſprützen nachgeahmt habe. Wenn in die Röhre LM der Hals eines Recipienten, ſo wie bey der im 63 §. beſchriebenen Pumpe, geſteckt wird, ſo tritt die Luft aus dem Recipienten durch das Ventil L in den Cylinder, wenn das Ende I der Stange, und mit demſelben der Stempel D wieder gehoben wird, ſo ſchließt ſich das Ventil L zu, und die im Cylinder befindliche Luft tritt durch das Ventil T heraus.

69 §.

So brauchte aber Guerike dieſe ſeine verbeſſerte Pumpe nicht: er ſuchte nun noch alles gegen den Zu-

gang der äuſſern Luft vermittelſt des Waſſers zu verwahren. Ja er hatte überdem die Abſicht, durch Hülfe dieſer Maſchine einen vollkommen leeren Raum, ſo leer wie der Torricelliſche iſt, zuwege zu bringen. Zu dem Ende ſetzte er in LM eine andere Röhre MN, die ſo hoch war, daß ſie ſich durch die Decke des Zimmers RS, worin ſeine Pumpe ſtand, in ein andres im zweyten Stockwerk belegenes Zimmer erſtreckte. Auf den Boden dieſes Zimmers, da wo die Röhre durchgieng, ſetzte er ein Gefäß PQ, durch deſſen Boden die Röhre MN ebenfalls durchgeführt war. Bey N hatte dieſe Röhre eine Oefnung, woſelbſt der Hals des Recipienten aufgeſetzt ward. Nun füllte er vor dem Gebrauch beide Gefäſſe, ſowohl A als auch PQ mit Waſſer an. Der Cylinder BC ſtand ſo tief, daß das Waſſer im Gefäß A den ganzen Cylinder, das Ventil T, und die Stelle bey M, wo beyde Röhren zuſammen gefügt waren, bedeckte. Eben ſo ſtand auch das Waſſer in dem Gefäß PQ ſo hoch, daß es die Stelle bey N, und den daſelbſt im Halſe des Recipienten angebrachten Hahn bedeckte. Wenn nun die Pumpe gehörig bearbeitet ward, ſo fuhren allemahl über dem Ventil T ſtarke Waſſerblaſen in die Höhe, wenn der Stempel in die Höhe gezogen ward, die von der alsdenn heraustretenden Luft verurſachet wurden. Dieſe muſten aber nach und nach immer ſchwächer werden, wenn die Arbeit fortgeſetzt ward, und wenn beym fernern fortpumpen weiter keine Spur, auch der kleinſten Blaſen mehr, an dieſer Stelle im Waſſer bemerkt werden könnte, ſo ſchloß Guerike daraus, daß nun alle Luft aus dem Recipienten herausgetreten ſey. Weil er wohl einſahe, daß eine ſehr ver-

dünnte Luft nicht genug Federkraft beſitzen würde, das Ventil aufzuſtoſſen, ſo brachte er noch eine beſondre Vorrichtung dieſerwegen an. In dem Deckel des Cylinders befeſtigte er eine beſondere kleine Röhre, worin ein kleiner beweglicher Stempel genau paßte, ohne Luft durchzulaſſen. Mit demſelben konnte er das Ventil im Cylinder öfnen, wenn er glaubte, daß die Luft für ſich allein nicht mehr hindurch kommen würde. Die ſo zubereitete Pumpe diente ihm nun mit mehr Bequemlichkeit und in kürzerer Zeit, nicht nur die gläſernen Recipienten, ſondern auch andere ziemlich groſſe Gefäſſe auszuleeren, die er nachher brauchte, die Luft in kleinern Recipienten ſehr ſchnell, und ohne alles fernere Pumpen zu verdünnen. Er hat ein ſolches groſſes kupfernes Ge-
41 Fig. fäß A, das die Geſtalt einer Kugel hatte, oben ſowohl als unten bey B und C mit einem engen Halſe und Hahn verſehen laſſen, der Hals B ward bey N (39 Fig.) auf die zur Luftpumpe gehörige Röhre geſteckt, der Hahn C (41 Fig.) alsdenn verſchloſſen, und hiernächſt auf die vorhin beſchriebene Art das Gefäß A ausgeleert. Wenn er nun bey C den Hals G eines kleinen Recipienten F aufſetzte, und die Hähne C und G öfnete, ſo muſte ſich die im Recipienten F befindliche Luft ſehr ſchnell in den Raum beider Gefäſſe ausbreiten. Um auch hier die Hähne bey C und G nebſt der dortigen Zuſammenfügung gegen die äuſſere Luft zu verwahren, war über A ein anderes oben offenes nach Proportion kleineres Gefäß DE angebracht, und dies ward mit Waſſer ſo hoch angefüllt, daß beyde Hähne C und G damit bedeckt wurden. Das ſo zubereitete Gefäß A nannte Schotte einen **Ausleerungs- oder Verdünnungs-Keſſel**,

ſel (cacabum evacuatorium), und es war ſo groß, daß es 60 bis 70 Magdeburgiſche Maaß Waſſer faßte. (Guerike Exper. Nov. Magd. Lib. III. Cap. III. p. 75.).

70 §.

Man muß Guericken die Gerechtigkeit wiederfahren laſſen, daß die ganze Anordnung ſeiner zweyten Pumpe dem Zweck, welchen er ſich vorgeſetzet hatte, ſehr wohl angemeſſen geweſen ſey. Dem ungeachtet blieb es eine beſchwerliche Sache, mit der Maſchine umzugehen, und noch beſchwerlicher war es, ſie von einer Stelle zur andern zu bringen. Man muſte ein paar über einander gelegene Zimmer faſt allein für die Luftpumpe haben. Dies ſahe nun Guerike ſehr bald ſelbſt ein, und verfiel deswegen auf eine andre weit einfachere Einrichtung der ganzen Maſchine, die er ſelbſt in den Exper. Nov. Magdeb. Lib. III. Cap. IV. pag. 76. 77. beſchreibt. Der Cylinder BC iſt zwiſchen dreyen Füſſen eines eiſernen Fußgeſtelles in verticaler Stellung vermittelſt eiſerner Bänder, Ringe und Schrauben ſo befeſtiget, daß ſeine Axe von den dreyen Füſſen, worauf alles ruhet, gleich weit entfernt iſt. Der Cylinder iſt unten offen, und die Kolbenſtange DEF iſt eben ſo gekrümmt, wie in der 39 Fig. Sie iſt oben bey F ebenfalls mit einem Druckbalken verbunden, der hier aber nur einen Arm wie HFI hat, und ſtatt der Unterlage bey H dient hier der eine eiſerne Fuß des Geſtelles ſelbſt. Damit nun der Cylinder der Bewegung der Druckſtange nicht hinderlich ſey, iſt letztere bey H, wo ſie an der Unterlage befeſtiget wird, geſpalten, und beyde Aeſte HLGF, HLKF, ſind ſo ge- 40 Fig.

bogen, daß ſie den Cylinder BC umfaſſen, zwiſchen dem Ringe GFKL und dem Cylinder aber ſo viel Raum bleibt, daß die Druckſtange frey auf und nieder ſpielen kan. Oben bey B iſt der Cylinder mit ſeinem Deckel dem Ventil und der daſelbſt befindlichen Röhre ſo verſehen, wie in der 39 Fig. um dem Deckel des Cylinders aber iſt ein Gefäß wie PQ in der 39 Fig. angebracht, das beym Gebrauch mit Waſſer gefüllt wird, da dann die Stelle, wo der Recipient aufgeſetzt wird, und der dazu gehörige Hahn mit Waſſer bedeckt werden. Statt des groſſen Gefäſſes A in der 39 Fig. wird hier ein kleineres gebraucht, das am obern Rande mit dreyen Haken verſehen iſt, womit man es an den dreyen Bändern
41 Fig. zwiſchen den Füſſen des Geſtelles aufhängen kan. Wenn man es alsdenn mit Waſſer anfüllet, ſo iſt auch die untere Oefnung des Cylinders wie in der 39 Fig. mit Waſſer bedeckt. So hatte nun die Guerikiſche Pumpe, was ihre äuſſere Geſtalt betrift, mit der Boyliſchen ſchon viel ähnliches, nur daß der Mechaniſmus zur Bewegung des Kolbens bey beyden nicht einerley war. Guerike ſchreibt in der Vorrede zu den oft angeführten Experim. novis Magdeb. daß er mit Ausarbeitung dieſes Buchs am 14 März 1663 fertig geworden ſey; und im Anfang des Jahrs 1662 hatte er durch Schotten die erſte Nachricht von der Boyliſchen Luftpumpe erhalten. Ob ihn nun Boylens Einrichtung veranlaſſet habe, auf die jetzt beſchriebene compendiöſere Anordnung zu denken, weis ich nicht: ſoviel erhellet aber aus ſeiner damahligen Antwort an Schotten, daß er die im 68 und 69 §. beſchriebene Pumpe ſchon gehabt habe, als er die Boyliſche zuerſt kennen

nen lernte. In Deutſchland ward inzwiſchen die erſte und ſimpelſte Einrichtung der Guerikiſchen Luftpumpe von den Liebhabern der Naturkunde noch eine ziemliche Zeit beybehalten. Joh. Chriſt. Sturms Luftpumpe, die er im Collegio Curioſo, Norimb. 1676. Tentam. XIII. pag. 100. ſeqq. beſchreibt, iſt in der Hauptſache wie Guerikens erſte Pumpe beſchaffen; nur iſt das Ventil H (37 Fig.), durch welches die Luft aus dem Cylinder heraustreten muß, nicht im Cylinder ſelbſt, ſondern im Stempel angebracht: die Stempelſtange iſt hohl, und oben nicht weit von dem Querholz LM in derſelben eine kleine Oefnung befindlich, wodurch die Luft beym Rückzuge des Stempels heraus tritt. Sturm kannte ſchon die beyden letztern Guerikiſchen ſowohl, als auch die Boyliſche Pumpe, und er hat ihrer a. a. O. ebenfals erwehnet. 44 Fig.

71. §.

Nunmehro wird man im Stande ſeyn, zu beurtheilen, in wie weit Boyle recht habe, wenn er in der Vorrede zu ſeiner oben angeführten Schrift zwar Gueriken die Ehre der erſten Erfindung der Luftpumpe läſt, von ſich ſelbſt aber glaubt, er ſey der erſte, welcher eine bequeme Maſchine den Stempel zu bewegen angebracht habe. Guerike hat würklich zu eben der Zeit bey ſeiner Luftpumpe eine Mechaniſche Vorrichtung angebracht, wobey auch ſein Cylinder ſchon die verticale Stellung erhalten hat. Guerike hielte dafür, daß die Bewegung des Stempels vermittelſt der Fuhrmanns-Winde zu langſam ſey, und daß dabey zuviele Zeit unnöthiger Weiſe verlohren werde; ſie hat vermuthlich um deswillen

auch bey andern, die ſich nach der Zeit mit Verbeſſerung und bequemerer Einrichtung der Luftpumpe beſchäftigten, nicht durchgängig Beyfall erhalten. Man lies der Pumpe ſelbſt zwar die äuſſerliche Geſtalt der Boyliſchen, aber die Kurbel mit dem Trilling ward weggelaſſen, und ſtatt der gezähnten Stempelſtange, eine ganz einfache unten mit einer Art ei-
42 nes Steigbügels CD verſehene Stange AB gebraucht.
Fig. Bey Bearbeitung der Pumpe muſte man nun einem Fuß in den Steigbügel ſetzen, und durchs Niedertreten den Stempel herabziehen, auch mit eben dem Fuß wieder in die Höhe heben. So iſt Dionyſii Papini Luftpumpe beſchaffen, die er anfangs in den Nouvelles Experiences du Vuide, Paris 1675. angegeben, nachher aber in verſchiedenen Stücken noch verbeſſert, und nach dieſer verbeſſerten Einrichtung in einer andern zu London im Jahr 1687 herausgegebenen Schrift beſchrieben hat, die den Titel führt A continuation of the new Digeſter of Bores. M. ſ. hievon die Acta Eruditorum Lipſienſia de A. 1687. Menſ. Junii pag. 324 ſqq. woſelbſt eine Abbildung und nähere Beſchreibung der verbeſſerten Papiniſchen Luftpumpe mitgetheilt wird. Unter andern Verbeſſerungen, welche theils die Einrichtung des Kolbens und der Ventile, die hier beybehalten ſind, betreffen, theils dahin abzielen, die bey jedem Zuge in den Cylinder hineingetretene Luft, völlig beym Heben des Stempels wieder hinaus zu ſchaffen, verdient der Umſtand hier angemerkt zu werden, daß Papinus ſchon den jetzt noch gebräuchlichen Teller auf der Luftpumpe, und zwar oberhalb des Cylinders da angebracht hat, wo bey der Boyliſchen Pumpe der Hals des Recipienten aufgeſetzt wird.

Statt

Statt der Recipienten mit dem engen Halſe konte er alſo ſchon ſolche gebrauchen, die ohngefehr in der Geſtalt einer Klocke, oder eines umgekehrten Trinkglaſes, auf den Teller aufgeſetzt werden, die freylich in mancher Abſicht bequemer als die Guerikiſchen und Boyliſchen Recipienten ſind. Auch werden hier ſchon Mittel vorgeſchlagen, wie man die in der verdünnten Luft unter dem Recipienten befindlichen Körper von der Stelle bewegen könne, ohne der äuſſern Luft den Zugang zu geſtatten.

72 §.

In Holland und nachher in Deutſchland iſt die Fuhrmannswinde von neuen bey der Luftpumpe angebracht worden, doch hat man das äuſſerliche Anſehen der Boyliſchen Pumpe wieder geändert. Sengwerd, der zu Leiden Profeſſor war, ließ im Jahr 1697 daſelbſt von einem Künſtler eine Luftpumpe verfertigen, deren Einrichtung bald darauf in Deutſchland bekannt, und daſelbſt häufig nachgeahmt ward. Der Cylinder AB dieſer Sengwerdiſchen Pumpe wird auf ihrem Fußgeſtelle CD, welches hier zu- 44 Fig. gleich ſtatt eines Schranks, die Recipienten und andre Geräthſchaft darin aufzubewahren dienen kan, in einer gegen den Horizont geneigten Lage befeſtiget. Auf die Gröſſe des Neigungswinkels der Axe des Cylinders gegen den Horizont kommt nichts an, er iſt gewöhnlich nur klein ohngefehr ſo, wie ihn die Figur vorſtellet. Die Röhre GEF verbindet den Teller mit dem Cylinder, und H iſt der doppelt durch- 45 Fig. bohrte Hahn, ſo wie derſelbe in der 45 Fig. beſonders vorgeſtellet iſt, und gleich noch näher beſchrieben werden ſoll. Ferner iſt PQ das Lager-Geſtelle für

die Axe I des Trillings der in die gezähnte Stempelſtange K greift, und LMNO ein Kreuz-Haſpel an der Axe I des Trillings, vermittelſt welcher man den Stempel aus und einwärts winden kann. Wenn man ſich mitten durch den Körper des Hahns (45 Fig.) eine grade Linie als ſeine Axe vorſtellt, ſo iſt der Hahn einmahl bey Q ſenkrecht auf ſeine Axe durchbort; hiernächſt aber auch nach der Richtung der Axe TS ſelbſt von oben nach unten, jedoch nicht völlig bis zu den durch Q gebohrten Weg. Der Canal TS biegt ſich ſeitwärts nach R, ſo daß die Oefnungen des Canals Q mit der Oefnung R in einerley Ebene liegen, die Ebene RST aber auf dem Canal durch Q ſenkrecht ſteht. Der Schweif des Hahns wird mit dem durch Q gebohrten Canal parallel-geſetzt. Wenn alsdenn der Hahn ſo ſteht, wie er in der 44 Fig. gezeichnet iſt, ſo iſt der Weg aus der Klocke in den Cylinder offen, durch welchen die Luft beym Auswinden des Stempels in den Cylinder hineintreten kann. Drehet man hiernächſt den Hahn ſo weit um, daß ſein Schweif einen Quadranten durchläuft, ſo hängt nun der Cylinder mit dem Canal RST zuſammen, durch welchen alsdenn die vorhin in den Cylinder hineingetretene Luft beym Zurückwinden des Stempels ihren Ausweg findet. Der Canal ST kan nach Gefallen mit einem kleinen Stöpſel P (44 Fig.) verſchloſſen werden.

73. §.

Dieſe Luftpumpe ward bald nachher in Deutſchland faſt allgemein bekannt und beliebt, und dies hauptſächlich durch die Bemühungen des bekannten und verdienten Mechanici Leupold in Leipzig, der

ſie

ſie häufig für die deutſchen Mathematiker und Naturforſcher verfertiget, und eine eigene Abhandlung davon unter dem Titel: Deutliche Beſchreibung der ſo genannten Luftpumpe, zu Leipzig im J. 1707 herausgegeben hat. Hiezu iſt im Jahr 1721 eine Fortſetzung und einige Jahre nachher noch eine zweyte Fortſetzung gekommen. Eben dieſe Luftpumpe beſchrieben Teichmeyer in den Elementis Philoſophiæ naturalis experimentalis Jenæ 1717. p. 144. ſeqq. Herr von Wolff in den nützlichen Verſuchen I. Th. IV. Cap. 105. u. f. f. S. und in den Elementis Matheſeos Univerſæ T. II. Aerom. Cap. II. §. 40. p. 362 ſqq. Letzterer hat alle ſeine Verſuche mit einer Sengwerdſchen von Leupold verfertigten Luftpumpe angeſtellt, und Wolffens Empfehlung ſcheint dieſer Pumpe in Deutſchland ſoviel Beyfall zuwege gebracht zu haben, daß ihrer faſt in allen deutſchen Handbüchern der Naturlehre und practiſchen Mathematik bey Beſchreibung der nöthigen Werkzeuge Erwehnung geſchicht. Sengwerd hat ihr vermuthlich ſtatt der verticalen Stellung die von der horizontalen nicht viel abweichende ſchiefe Lage gegeben, um einen etwas längern Kolbenzug bekommen, der bey der Boyliſchen und andern ähnlichen deswegen nur kurz ſeyn kann, weil ſonſt der Recipient zu hoch würde zu ſtehen kommen, als daß man bequem genug wahrnehmen könte, was unter dem Recipienten vorgehet. Sonſt hat dieſe Pumpe wie die Boyliſche den langſamen Kolbenzug, und die Arbeit wird noch dazu dadurch aufgehalten, daß man bey jedem neuen Zuge und Rückzuge den Hahn anders drehen, den Stöpſel im Hahn das eine mahl öffnen, und das andre mahl wieder verſchlieſſen muß.

74 §.

74. §.

Um die Arbeit möglichſt zu verkürzen verfiel Hauksbee darauf, eine Pumpe mit zweyen verticalſtehenden Cylindern ſo zu verfertigen, daß der eine Kolben binnen der Zeit die Luft aus dem Recipienten anſaugen könnte, da der andre aus ſeinem Cylinder die beym vorigen Zuge angeſogene Luft wegſchaft. Er hat dieſe **doppelte Luftpumpe** in der Abhandlung: Phyſico-Mechanical Experiments on various ſubjects, Lond. 1709. angegeben, und man findet in den Actis Eruditorum, Suppl. T. V. pag. 403. eine Anzeige von dieſer Schrift ſowohl, als auch eine Zeichnung von der Luftpume. Beyde Cylinder ſtehen neben einander, und zwar ſo, daß die Oefnung, durch welche die Kolbenſtange hindurch gehet, oben befindlich iſt. Die Kolbenſtangen ſind gezähnt, und zwiſchen ihnen liegt ein kleines Sternrad, deſſen Zähne in die Stangen eingreifen. Das Fußgeſtelle iſt ein Tiſch mit vier Füſſen, auf deſſen Blade an einer Seite die Cylinder bey einander ſtehen, und zwar zwiſchen ein Paar Säulen, die oben mit einem Querſtück verbunden ſind, welches der Axe des kleinen Sternrades zur Unterlage dient. An der Axe dieſes Rades befindet ſich eine Kurbel, vermittelſt welcher das Sternrad wechſelsweiſe vor- und rückwärts jedesmahl ſo lange nach einerley Richtung gedrehet wird, bis die Kolben, die dadurch nach entgegengeſetzter Richtung getrieben werden, die ganze Länge des Cylinders durchlaufen haben. Unten am Boden ſind beyde Cylinder mit einer engen Röhre vereiniget, von welcher ſich eine andre enge Röhre bis zum Mittelpunct des Tellers erſtreckt. Dieſer wird von vier Säulen getragen, welche den Cylindern

dern gegen über auf der andern Seite des Tiſchblades aufgerichtet ſind. Die Kolben ſind mit Ventilen verſehen, welche ſich ſchlieſſen, wenn die Kolben ſteigen, und durch die während des Steigens in die Cylinder hineingetretene Luft aufgeſtoſſen werden, wenn die Kolben wieder ſinken, ſo daß alsdenn die Luft durch die Kolben ihren Ausweg findet. Die Cylinder ſtehen unten mit ihrer Verbindungs-Röhre in einer 2 Zoll hohen Cyſterne mit Waſſer, um das Eindringen der äuſſern Luft abzuhalten.

75 §.

Leupold ward hiedurch veranlaſſet, ebenfalls eine doppelte Luftpumpe zu verfertigen, wovon man in den Actis Eruditorum A. 1713. p. 95. 96. eine Beſchreibung mit beygefügter Zeichnung antrift. Die Cylinder ſtehen auch hier neben einander vertical auf einem artig verzierten Fußgeſtelle aus Nußbaumholz, ohngefehr in der Geſtalt eines Tiſches mit drey Füſſen: aber die Kolben hängen mit ihren Zugſtangen, wie bey den groſſen Feuerſprützen, an einem gehörig unterſtützten eiſernen Wagebalken. Neben jeden Cylinder ſtehen ein paar Säulen, die eine etwas vorwärts, die andre etwas hinterwärts der Cylinder: die beiden vordern und die beiden hintern ſind oberwärts mit einem Bogenſtück verbunden, und beide Bogenſtücke enthalten in ihrer Mitte die Zapfenlager für die Axe des Wagebalkens, woran die Kolbenſtangen hängen. Dieſer Wagebalken iſt gleicharmig und nur ſo lang, als die Entfernung der Kolbenſtangen vom Mittelpunct der Bewegung es erfordert: an der Axe deſſelben iſt aber noch ein anderer gleicharmiger Wagebalken mit dem vorigen parallel

rallel angebracht, deſſen Arme länger, als die Arme des vorigen ſind, und er dient dazu, daß man jedes Ende deſſelben mit einer Hand angreifen, und durch abwechſelndes Niederdrücken und Heben die Kolben in Bewegung ſetzen kann. Die Kolben ſind, wie bey der Haukſbeeſchen Pumpe, mit Ventilen verſehen, die Leupold auf eine ihm eigene vortheilhafte Art eingerichtet haben ſoll, wovon aber an der angezogenen Stelle keine nähere Beſchreibung beygefügt iſt, weil er ſie damals noch als ein Geheimniß für ſich behalten hat. Das hintere Bogenſtück trägt zugleich mit einer noch etwas weiter hinter demſelben befindlichen Stütze den Teller, worauf die Klocken geſetzt werden, und dieſer Teller hat mit beiden Cylindern unten vermittelſt einer Communications-Röhre Gemeinſchaft. Der ganze Mechaniſmus dieſer Pumpe iſt einfach, und erfordert ungleich weniger Aufwand als andre. Leupold ſelbſt giebt in der zweyten Fortſetzung ſeiner Beſchreibung der ſo genannten Luftpumpe ebenfalls von ſeiner doppelten Pumpe eine kurze Nachricht, und an der angeführten Stelle in den Actis Eruditorum wird von ihr gerühmt, daß man beträchtlich groſſe Gefäſſe damit ſehr ſchnell und ungemein leicht ausleeren könne. Die Anordnung iſt würklich bequem, und ſcheint vor der Hauckſbeeſchen mit den gezähnten Stangen und Sternrade einige Vorzüge zu haben. Nur mögte man das einzige daran ausſetzen können, daß die an der Druckſtange hängenden Stempelſtangen ſich nothwendig bey Bearbeitung der Pumpe etwas auf die Seite legen, und deswegen die Stempel nicht beſtändig völlig vertical ſchieben. Die beiden letztern Guerickiſchen Pumpen haben eben dieſen Fehler, doch hat er

bey

bey der Leupoldſchen Pumpe ſo viel nicht zu ſagen, als bey den Guerikiſchen, weil bey den letztern die wieder aufwärts gebogene Kolbenſtange lange nicht ſo frey ſpielen kann, als die grade herab hängende Leupoldſche.

76 §.

Man wird nun bey den bisher beſchriebenen mancherley Arten von Luftpumpen unter andern dieſen Unterſcheid bemerkt haben, daß einige derſelben Ventile haben, andre aber ſtatt der Ventile nur einen Hahn, der bey jedem neuen Zuge in ſeine gehörige Stellung gebracht werden muß. In dieſem Stück war ſchon die Boyliſche Pumpe von der Guerikiſchen unterſchieden. Ob nun gleich die Ventile ihre groſſe Bequemlichkeit haben, ſo hat man dies doch an ihrem Gebrauch ausgeſetzt, daß ſie dem freyen Durchgang der Luft deſto mehr hinderlich fallen, je mehr ſie ſchon unter dem Recipienten verdünnt iſt. Wenn ſie ſich nicht ungemein leicht öfnen, ſo iſt freylich zu fürchten, daß die Federkraft einer ſehr verdünnten Luft nicht mehr ſtark genug ſey, ſie aufzuſtoſſen. Deswegen haben Graveſand ſowohl, als Nollet, die Hähne den Ventilen vorgezogen. Weil es aber doch bey dem Auspumpen ſehr aufhält, daß man bey jedem Zuge den Hahn anders drehen muß, bevor man die Arbeit fortſetzen darf; ſo ließ Graveſande die Anordnung ſeiner Luftpumpen ſo machen, daß einerley Mechaniſmus ſowohl die Kolben zu bewegen diente, als auch jedesmahl beym Anfang eines neuen Zuges den Hahn wieder in ſeine rechte Lage verſetzte. Nollet hat nachher eine ähnliche Anordnung bey ſeiner doppelten Luftpumpe angebracht. Wenn

ich

ich blos der Zeitordnung folgen wollte, ſo müſte ich zuerſt die Graveſandſchen Luftpumpen beſchreiben: weil aber die Nolletſchen nicht ſo ſehr zuſammen geſetzt ſind, ſo will ich von ihnen zuerſt eine Beſchreibung machen.

77 §.

Die einfache Nolletſche Luftpume, die ich deswegen einfach nenne, weil ſie nur einen Cylinder hat, kommt in Abſicht des äuſſerlichen Anſehens am meiſten mit der Boyliſchen und Papiniſchen überein. Der Cylinder ſtehet auf ſeinem Fußgeſtelle vertical, und die Stempelſtange wird wie bey der Papiniſchen
42 Fig. vermittelſt des Steigbügels CD mit dem Fuß herunter gezogen. Weil es aber beſchwerlich iſt, die Stange mit dem Fuß auch in die Höhe zu heben, ſo hat Nollet mit der Kolbenſtange, nahe über dem Steigbügel bey B eine andre aufwärts gehende Stange EF verbunden, die mit einem Handgriff GH verſehen iſt, welchen man mit der Hand anfaſſen, und alsdenn ohne Beyhülfe des Fuſſes den Stempel wieder in die Höhe ziehen kann. Der Hahn iſt oberhalb des Cylinders zwiſchen ihm und dem ganz oben befindlichen Teller wie bey der Boyliſchen Pumpe angebracht, jedoch mit dem Unterſcheid, daß hier der Stöpſel K (38 Fig.) nicht nöthig iſt, um die Luft aus dem Cylinder zu laſſen. Der
43 Fig. Nolletſche Hahn AB iſt nemlich wie der Sengwerdſche doppelt durchbohrt, einmahl nach einer Richtung, die ſeine Axe bey C ſenkrecht ſchneidet, und zweytens nach der Richtung der Axe ſelbſt von D bis E, doch ſo, daß ſich der Canal DE nicht völlig bis zu den vorigen erſtreckt, der durch C gehet, ſondern

von

von E nach F fortgeführt iſt. Die Oefnung F muß mit den beyden äuſſern Oefnungen des Canals C im Umfang eines Kreiſes liegen, deſſen Ebene auf der Axe DE ſenkrecht iſt. Wenn nun der Schweif GH des Hahns in der Ebene des Winkels DEF liegt; ſo iſt der Weg aus der Klocke nach dem Cylinder offen, wenn der Schweif GH horizontal ſtehet: dieſer Weg aber iſt verſchloſſen, und dagegen ein Weg aus dem Cylinder in die freye Luft offen, wenn der Schweif GH vertical herab hängt. Beym Gebrauch dieſer Pumpe muß man alſo darin geübt ſeyn, daß man jedesmahl vor dem Niedertreten, den Hahn in die horizontale, und vor dem Heraufziehen in die verticale Stellung bringt. Bey dieſem letztern Stande des Hahns muß der Stempel heraufgezogen, und die in den Cylinder hinein getretene Luft durch den Weg FED hinausgetrieben werden. Was nun bey jedem Zuge aus der Klocke in den Cylinder tritt, iſt verdünnte Luft: bleibt demnach der Hahn bey D offen, ſo ſchlupft die äuſſere Luft gleich bey Eröfnung des Weges FED in den Cylinder hinein ſo lange bis die innere Luft ſo dichte, als die äuſſere iſt. Um dies Eindringen der äuſſern Luft abzuhalten, ſetzt Noller nach Graveſands Beyſpiel vor der Oefnung D ein klein Ventil, das der äuſſern Luft den Weg verſperret. Dies wird nun die innere Luft aufſtoſſen, wenn der hinaufſteigende Stempel ſie ſo weit zuſammen gedrückt hat, daß ihre Dichtigkeit die natürliche zu übertreffen anfängt. Man ſiehet wohl, daß dies die Arbeit beym Heraufziehen des Stempels ſehr erleichtern werde, und eben dieſe Abſicht ſoll durch das Ventil erreicht werden.

78 §.

Die vom Hrn. Nollet angegebene doppelte Luftpumpe kommt in Anſehung des Mechaniſmi, der die Kolben zu bewegen dient, mit der Hauksbeeſchen Pumpe überein. Zwiſchen den beyden neben einander verticalſtehenden Cylindern AB und CD liegt
46 Fig. das Stern-Rad E, welches in die gezähnten Kolbenſtangen F und G greift. Bey der Nolletſchen Pumpe aber ſind die Oefnungen der Cylinder, durch welche die Kolbenſtangen hindurch gehen, unten befindlich, und dies hat den Vortheil, daß alles compendiöſer eingerichtet werden kann. Gleich über beyden Cylindern iſt ein Aufſatz AMND angebracht, worin der Hahn O ſteckt, vermittelſt deſſen, nachdem er ſo oder anders umgedrehet wird, aus dem einen oder dem andern Cylinder ein Weg bis zur Verbindungsröhre PQ mit dem Teller ſich öfnet, der bey Q aufgeſetzt wird. Hauksbee iſt genöthiget, beyde Cylinder unten durch eine Communications-Röhre zu verbinden, und von derſelben eine ziemlich lange Röhre bis nach den Teller hinauf zu leiten. Nollet führt ſehr richtige Gründe an, weswegen er geſucht habe, eine ſo lange Verbindungsröhre zu vermeiden. An der Axe des Nolletſchen Sternrades iſt übrigens ebenfals eine Kurbel ER angebracht, welche das Rad zu drehen, und vermittelſt deſſelben die Kolbenſtangen zu bewegen dient. Eben die Kurbel drehet zugleich bey dem Anfang eines jeden neuen Zuges den Hahn O gehörig um, und dies vermittelſt eines am äuſſerſten Ende R derſelben angebrachten kleinen Zapfens, der das Ende vom Schweif OR des Hahns ergreift, ſolches durch den Bogen RS mit herum führet, es aber bey S verläſt, da

dann die Kurbel in ihrem Kreiſe ſo lange weiter umgedrehet wird, bis die Kolben die ganze Länge ihrer Cylinder durchlaufen haben. Die Einrichtung muß ſo gemacht ſeyn, daß nun am Ende dieſes Zuges die Kurbel wieder in dieſelbe Lage ES gekommen iſt, die ſie hatte, als ſie den Schweif OS des Hahns verließ. Denn nun muß man die Kurbel zurück von S nach R drehen, und beym Anfang dieſes Zuges muß ſie den Schweif des Hahns OS von neuen ergreifen, und denſelben bis in die Lage QR wieder zurück führen. Bliebe nun der Schweif OS in dieſer Lage ſtehen, wenn die Kurbel beym Umlauf von R nach S ihn verläſt, ſo würde dieſe Kurbel ihn bey der entgegengeſetzten Bewegung von S nach R nicht wieder ergreifen können. Deswegen iſt das Schwanzſtück OS des Hahns auf der Axe O deſſelben nicht völlig unbeweglich befeſtiget, ſondern ſo, daß es ſich um einen kleinen Winkel ROr=SOs frey drehen kann, ohne die Axe O mit umzudrehen. Daher kommt es nun, daß der Schweif OS in dem Augenblick, da ihn die Kurbel verläſt, wegen ſeines eigenen Gewichts um den Winkel SOs zurückfällt. Nun kan die Kurbel auf ihrem Rückwege ihn wieder ergreifen, und bis in die Lage OR zurück führen. Sobald ihn alsdenn die Kurbel verläſt, verfällt er wegen ſeines Gewichts in die Lage Or, damit ihn die Kurbel auf ihrem Rückwege abermahl ergreifen, und dies Spiel beſtändig ſo abwechſeln könne.

79 §.

Dieſer Mechaniſmus zur Bewegung des Hahns erforderte eine beſondre Einrichtung und Verbindung der Kolben mit ihren Stangen. Durch Umdrehung

drehung der Kurbel wird das Sternrad gedrehet, und mit demſelben werden die Kolbenſtangen in Bewegung geſetzet: aber die Kolben ſelbſt müſſen ſich nicht mit dem Hahn zugleich bewegen, ſondern der Hahn muß jedesmahl ſchon in ſeine rechte Stellung gebracht ſeyn, bevor die Kolben ihre Bewegung anfangen. Dies letztere muß jedesmahl in dem Augenblick geſchehen, da die Kurbel bey R und S den Schweif des Hahns fallen läſt. In ſolcher Abſicht
46 Fig. ſind nun die Kolben in der Mitte nach der Länge ihrer Axe von H nach T, und von K nach L durchbohrt, jede Kolbenſtange hat einen Zapfen wie HI und KL, der ſo lang als die innere Höhlung des zugehörigen Kolben iſt, und am äuſſerſten Ende iſt jeder Zapfen bey H und L mit einem Knopf verſehen, der in der Höhlung des Kolbens frey beweglich iſt. Die untere Platte eines jeden Kolbens iſt in der Mitte durchbohrt, und die Oefnung ſo groß, daß der Zapfen der Stange in derſelben zwar frey hin und her ſpielen, der daran befindliche Knopf aber nicht hindurch kommen kan. Stellt man ſich nun den einen Kolben bey B in ſeinem niedrigſten, den andern bey D in ſeinem höchſten Stande, und zugleich die Kurbel in der Lage ER vor, und nimmt an, daß letztere jetzt von R nach S gedrehet wird, ſo ſteigt die Kolbenſtange F und die andre G ſinkt. Weil aber der Knopf H frey bis T ſteigen, und L frey bis K ſinken kann, ſo kommen die Kolben nicht mit in Bewegung, bevor der Knopf H in T und der Knopf L in K angelangt iſt. In dem Augenblick, da dies erfolgt, muß nun die Kurbel ſich um den Winkel RES gedrehet haben, und den Schweif des Hahns OS fallen laſſen. Man muß

dem=

demnach noch die Gröſſe des Winkels ROS kennen, um darnach die Kurbel nebſt der Länge des Schweifs an dem Hahn zu proportioniren, und man ſiehet leicht, daß dies von der innern Beſchaffenheit des Hahns, und der Art, wie derſelbe durchbort wird, abhängen wird.

80 §.

Es ſey AB die Hülſe, worin der Hahn ſteckt, und DE der Canal, welcher von dem Teller herunter ſenkrecht auf die Axe des Hahns zuläuft. Durch DE ſtelle man ſich eine Ebene ſenkrecht auf der Axe des Hahns vor, ſo wird der Kreis FDH die Durchſchnitts-Figur mit der innern Fläche der Hülſe vorſtellen, ſo wie der Kreis um *c* (48 Fig.) den Durchſchnitt mit dem Hahn ſelbſt vorſtellet. Jeder von dieſen Kreiſen ſey in fünf gleiche Theile getheilet, und zwar ſo, daß der erſte Theilungspunkt des Kreiſes FDH in D fällt. Vom 3ten Theilungspunkt erſtreckt ſich ein Canal HI nach den einen, und vom 4ten Theilungspunkt ein andrer Canal FG nach den andern Cylinder. In der Ebene deſſelben Kreiſes wird nun der Hahn erſtlich mit dreyen Canälen durchbort, die ſich vom 1ſten, 2ten und 4ten Theilungspunkt bis an den Mittelpunkt *c* erſtrecken. Ferner iſt der Hahn *ab* nach der Länge ſeiner Axe *de* jedoch nicht völlig bis *c* durchbort, ſondern der Canal *de* theilt ſich in zwey Aeſte, *ef* und *eh*, davon der eine auf den 3ten, der andere auf den 5ten Theilungspunkt des Kreiſes um *c* (48 Fig.) zuläuft, ſo daß der Bogen zwiſchen *f* un *h* $\frac{2}{5}$ 360° faſſet. Wenn nun der Hahn in der Hülſe ſo ſteckt, daß num. 1. in D fällt, ſo fällt n. 4 in F und n. 3. in H; alſo iſt

47 Fig.

48 Fig.

49 Fig.

der Weg FG von dem einen Cylinder Y bis zum Canal DE offen, und der Weg HI von dem andern Cylinder Z bis zum Canal *de* in der Axe des Hahns, der mit der äuſſern Luft Gemeinſchaft hat. Bey dieſem Stande des Hahns muß nun der Stempel in Y ſinken, und in Z ſteigen. Unter der Klocke geht ein Theil Luft weg in den Cylinder Y hinein, und die in Z über dem Kolben ſtehende Luft geht durch den Weg IH (47 Fig.) und *hed* (49 Fig.) zum Hahn hinaus. Wird ferner der Hahn ſo gedreht, daß n. 2. in D fällt, ſo fällt n. 4. in H, und n. 5. in F; nun hat alſo der Canal FG mit der äuſſern Luft, der Canal HI aber mit DE Gemeinſchaft. Ueber dem Kolben in Y ſteht nun verdünnte Luft, bleibt demnach der Hahn bey *d* offen, ſo tritt der am Ende des 77. §. ſchon erwehnte Fall ein, und um deſſenwillen wird auch hier vor *d* ein klein Ventil geſetzt.

Wenn der Schweif des Hahns mit dem Canal *e* 4 (48 Fig.) parallel an ſeiner Axe befeſtiget iſt, ſo muß er in der Lage OR (46 Fig.) mit FG (47 Fig.) und in der Lage OS (46 Fig.) mit HI (47 Fig.) parallel ſeyn, folglich der Winkel ROS $\frac{1}{5}$ 360° oder 72° betragen. Man lernt übrigens beyde Nolletſche Luftpumpen am beſten aus dem eigenen Aufſatz des Herrn Nollet in der Hiſtoire de l'Academie de Paris A. 1740 kennen, welchen ich im 62 §. ſchon angeführt habe, und woraus ich nach folgende Abmeſſungen für die zu den gewöhnlichſten Verſuchen nöthigen Klocken herſetze.

Durch-

Durchmeſſer des Umfangs	Höhe der Klocke.	Dicke des Glaſes
9 Zoll	12 Zoll	2 Linien
6 =	8 =	$1\frac{1}{2}$ =
4 =	10 =	$1\frac{1}{2}$ =
4 =	6 =	$1\frac{1}{2}$ =
3 =	4 =	1 =

81 §.

Graveſand hat beyderley Art Luftpumpen, die doppelte ſowohl, als auch die einfache, durch den berühmten holländiſchen Mechanicum, Johann van Muſchenbrock, einen Bruder des groſſen Naturforſchers, Peter van Muſchenbrock, verfertigen laſſen. Ihre Anordnung iſt eben nicht die einfachſte, und was dieſen Umſtand betrift, ſo haben darin die Nolletſchen vor ihnen vieles voraus. Nach des Herrn Peter van Muſchenbrocks Bericht (Introd. ad. Phil. Nat. Tom. II. §. 2120. p. 867.) iſt nach Volders Angabe die erſte Luftpumpe in Holland zu Leiden verfertiget worden, man hat ſie ſchon im Jahr 1675 auf dem phyſiſchen Laboratorio der dortigen Academie gebraucht, und ſie hat ſich noch daſelbſt befunden, als Muſchenbrock das angeführte Werk geſchrieben hat, woraus dieſe Nachricht genommen iſt. Von der Einrichtung der Volderſchen Pumpe wird hier keine nähere Nachricht ertheilt, von der Graveſandſchen aber, davon auch nur ganz kurz Erwehnung geſchicht, gerühmt, daß man vermittelſt derſelben in ſehr kurzer Zeit und mit leichter Mühe die Luft in den Recipienten und Klocken ſtark verdünnen könne. Doch iſt nach Muſchenbrocks Urtheil bis dahin noch keine ganz vollkommene Luft-

pumpe zu Stande gebracht worden, wiewohl er eine andre von der vorigen verſchiedene gröſſere und weitere Luftpumpe ſehr rühmt, die nach ſeiner Erzehlung von ſeinem Vater-Bruder ſowohl, als auch von ſeinem Vater vor 80 Jahren (Muſchenbroeck ſchrieb dieſe Stelle etwa um das Jahr 1760) erfunden worden. Von dieſer Luftpumpe habe ich ſonſt keine Nachricht finden können, und ſie wird vermuthlich auch unter den phyſiſchen Inſtrumenten zu Leiden aufbewahret, ohne daß eben nähere Beſchreibungen von ihrer Einrichtung bekannt geworden ſind.

82 §.

Was nun zuerſt die Anordnung der Graveſandſchen doppelten Luftpumpe betrift; ſo werden die Kolben wie bey der Hauksbeeſchen vermittelſt eines Sternrades bewegt, das in gezähnte Kolbenſtangen eingreift. An der Axe des Sternrades iſt eine Druckſtange angebracht, die aus zweyen gleichlangen Hebels-Armen beſtehet, ſo daß man jedes Ende mit einer Hand angreifen, und durch abwechſelndes Heben und Niederdrücken den Kolben die nöthige Bewegung mittheilen kan. Die Cylinder ſtehen aufrecht, und haben ihre Oefnung oben, den Boden unten: hieſelbſt hängen ſie mit derjenigen Röhre zuſammen, durch welche die Luft aus der aufgeſetzten Klocke in ſie hinein treten muß, und dieſe Röhre iſt hier ziemlich lang, weil der Teller oberhalb der Cylinder angebracht iſt. Jeder Cylinder hat unten ſeinen eigenen Hahn, der ohngefehr ſo beſchaffen iſt, wie bey der Nolletſchen einfachen Pumpe, und die Schweife beyder Hähne ſind mit einer horizontal dazwiſchen liegenden Stange ſo verbunden, daß beyde

allemahl zugleich auf folgende Art in Bewegung kommen. An der Axe des Sternrades hängt hinterwärts der Pumpe ein Schwengel der ſich in zwey Arme ſpaltet, und weil er an der Axe des Rades befeſtiget iſt als ein Pendul ſich hin und her ſchwingt, wenn die Pumpe in Bewegung iſt. Auf der Mitte derjenigen Stange, welche beyde Hähne verbindet iſt eine beſondre Vorrichtung angebracht, die bey dem Anfang eines jeden neuen Zuges einer von den Armen des Schwengels ergreift, und auf ſolche Art beyde Hähne zugleich umdrehet: während der Zeit, daß dies letztere geſchicht, bleiben die Kolben in Ruhe, und ſie ſind um deswillen mit ihren zugehörigen Stangen ohngefehr ſo, wie bey der doppelten Nolletſchen verbunden. Indem der eine Stempel ſteigt, und ein Theil Luft aus dem Raum unter der Klocke heraus zieht, treibt der während der Zeit herabſinkende Stempel im andern Stiefel die beym vorigen Zuge hineingetretene Luft durch den Kopf des unten angebrachten Hahns heraus, der wie der Nolletſche wegen der im 80 §. angeführten Urſache ebenfals mit einem Ventil bedeckt iſt.

83 §.

Die Graveſandſche einfache Luftpumpe hat ebenfals eine gezähnte Kolbenſtange, worin ein Sternrad greift, das eben ſo, wie bey der doppelten in Bewegung geſetzt wird. Weil das Rad hier nie einen ganzen Umlauf vollendet, ſo iſt nicht nöthig, daß es die gewöhnliche Geſtalt eines Rades habe, das einen ganzen Kreis ausmacht: es kan ein Kreis-Ausſchnitt genügen, deſſen Bogen gehörig mit Zähnen verſehen iſt. Auf dem Fußgeſtelle dieſer Pum-

pe iſt eine hölzerne Tafel vertical befeſtiget, und an dieſer Tafel iſt der Cylinder durch ſtarke Schrauben in einer gegen den Horizont ſchiefen Lage feſt gemacht. Der Cylinder hat oben ſeine Oefnung, durch welche die Kolbenſtange durchgehet, und unten iſt der Hahn ſo wie bey der doppelten Pumpe angebracht; er wird durch ähnliche Vorrichtung wie die Hähne der doppelten Pumpe zu rechter Zeit umgedrehet, und um deswillen iſt der Kolben mit ſeiner Stange, ſo wie bey der vorigen verbunden. Von dem Boden des Cylinders iſt die Verbindungsröhre nach den Teller hinauf geleitet, der wie bey der doppelten Pumpe oben über dem ganzen Geſtelle der Pumpe angebracht iſt. Mehr Nachricht von der Einrichtung dieſer Pumpen giebt Graveſand ſelbſt in den Elem. Phil. Nat. Math. T. II. Lib. IV. Cap. IV. und Johann von Muſſchenbroeck in der Abhandlung, wovon ich im 61 §. eine nähere Nachricht gegeben habe. In dieſer letzten Schrift werden die beyden Graveſandſchen Pumpen nebſt der Sengwerdſchen und der einfachen Nolletſchen beſchrieben, ſo wie ſie jetzt der berühmte Hr. Brander in Augsburg verfertiget. Ich ſehe unter andern aus dieſer Schrift, daß Hr. Brander bey der Sengwerdſchen Pumpe Hahn und Stempel eben ſo wie bey der Graveſandſchen einrichtet.

84 §.

Durch die Sengwerdſchen, Graveſandſchen und Nolletſchen Luftpumpen iſt der Gebrauch der Hähne ſtatt der Ventile beynahe allgemein eingeführt worden, weil es ſcheint, daß dieſe Arten von Luftpumpen ſeit ihrer Bekantwerdung den meiſten Beyfall

gefun-

gefunden haben. Nur in England ſind die Ventile mehr gebräuchlich geblieben, und es iſt nicht zu läugnen, daß ſie vor den Hähnen viele Bequemlichkeit voraus haben, wenn man ſie ſo einrichten kan, daß ſie nicht allein hinlänglich luftdicht, ſondern auch ſo leicht beweglich ſind, daß eine äuſſerſt verdünnte Luft ſie noch aufzuſtoſſen vermögend iſt. Sonſt blieb auch dies noch ein Mangel bey den mit Ventilen verſehenen Pumpen, daß ſie gewöhnlich nur zum Verdünnen, und nicht zum Zuſammenpreſſen der Luft dienen konten. Dem letzteren Mangel hat man in Engeland bey dieſer Art Luftpumpen nicht nur abgeholfen, ſondern auch den Ventilen die ihnen noch fehlende Vollkommenheit zu geben geſucht. Wie weit man es darin gebracht habe, wird ſich aus einer nähern Beſchreibung der Smeatonſchen Luftpumpe beurtheilen laſſen, deren ich ſchon im 25 §. Aeroſtat. vorläufig erwehnt habe.

85 §.

Dieſe Luftpumpe hat nur einen Cylinder, und gehört alſo in ſolcher Abſicht in die Claſſe der einfachen Pumpen. Der Cylinder ſteht vertical und aufrecht, die Oefnung für die Stempelſtange iſt oben, der Boden des Stiefels unten, und zur Bewegung des Kolbens iſt die Fuhrmanns-Winde beybehalten worden: die Kolbenſtange iſt wegen einer gleich anzuführenden Urſache länger als gewöhnlich, und mehr denn doppelt ſo lang, als der Cylinder: ſie iſt aber nur ſo weit mit Zähnen verſehen, als ſie über dem Cylinder hervorragt, wenn der Kolben ganz unten am Boden des Cylinders ſteht. Dieſe letzte Einrichtung war nöthig, weil man auch im Cylinder

der den Raum über dem Kolben bis an die obere Oefnung des Cylinders, wo die Stange durchgehet, gegen den Zugang der äuſſern Luft verwahren wollte. Man hat um deswillen die oberſte Oefnung des Cylinders mit einem Deckel verſchloſſen, woſelbſt die Kolbenſtange durch einen ledernen Ring durchgehet, der an dieſelbe feſt anſchlieſſen muß, ſo wie der Kolben ſelbſt an der innern Fläche des Cylinders anſchlieſſet. Das mit Zähnen verſehene Stück der Kolbenſtange, welches bey dieſer Einrichtung nie in den Cylinder hineintritt, muß noch etwas länger ſeyn, als das Stück, welches in dem Cylinder ſteckt, wenn der Kolben auf dem Boden deſſelben liegt, und die Kurbel mit dem Trilling muß in hinlänglicher Höhe über dem oberſten Deckel des Cylinders befeſtiget ſeyn. Man hat dies auf die Art zuwege gebracht. Das Fußgeſtelle der Pumpe iſt wie ein Tiſch mit vier Füſſen eingerichtet, und die Bänder zwiſchen den Füſſen, nebſt dem Tiſchblade, dienen dem Cylinder zur Befeſtigung. Oben über dem Tiſchblade ſtehen zu beiden Seiten des Cylinders und der hervorragenden Stange ein paar lothrechte Säulen, die oben ſo mit einander verbunden ſind, daß der Verband der Axe des Trillings zur Unterlage dient, die zugleich ſo hoch über dem Deckel des Cylinders erhaben iſt, als die Länge des Zuges erfordert. Auf demſelben Tiſchblade ſtehen vier andre Säulen, welche eine Platte tragen, worauf der Teller befeſtiget iſt, nebſt noch einem Schraubengeſtelle, welches die Klocke zu befeſtigen dient, wenn man unter derſelben die Luft verdichten will.

86 §.

Die 50 Fig. ſtellet einen verticalen Schnitt durch die Axe des Cylinders AB und einer von dem Boden des Cylinders ſeitwärts horizontal fortlaufenden Röhre CD vor. Der Kolben E hat ein Ventil, welches die Luft von unten nach oben durchläſt, ihr aber von oben nach unten den Rückweg verſchlieſſet. Im Boden des Cylinders liegt ein andres Ventil F, welches die Luft ebenfalls nach oben durchläſſet, ihr aber den Rückweg nach unten verſchlieſſet. Nun ſiehet man wohl, wenn die Röhre CD ununterbrochen bis zum Teller der Luftpumpe hinauf geführet, und alsdenn der Cylinder oben offen wäre, daß die Pumpe blos zum Verdünnen der Luft unter der Klocke dienen würde. Sie ſollte aber auch zum Verdichten dienen: deswegen hat man die Röhre CD nicht allein vermittelſt eines daſelbſt angebrachten Hahns unterbrochen, ſondern auch die Einrichtung ſo gemacht, daß ſich dieſe Röhre vermittelſt des Hahns in zwey Aeſte vertheilt, davon ein jeder nach Gefallen verſchloſſen werden kan. Die Zeichnung ſtellet einen Schnitt durch die Axe des Hahns vor: EFGH iſt die Hülſe, und *efgh* der coniſche Zapfen des Hahns, der in dieſer Hülſe paſſet. Ferner iſt IK der Kopf des Hahns, der mit dreyen horizontalen Schweifen, wie KL verſehen iſt, die am Mittelpunct K gleiche Winkel mit einander einſchlieſſen. Die innere Einrichtung des Hahns ſelbſt aber lernt man am beſten kennen, wenn man ſich durch die horizontale Axe der Röhre CD eine Ebene vorſtellt, welche die Axe des Hahns ſenkrecht ſchneidet: ihr Durchſchnitt mit dieſer Röhre ſey in der 51 Fig. CD, ihr Durchſchnitt mit der Hülſe des Hahns der Ring

50 Fig.

51 Fig.

DMN*dmn*

DMN*dmn*. Der Umfang dieſes Ringes iſt in drey gleiche Bogen getheilt, und der Mittelpunct der Oefnung D, womit die Röhre CD zuſammenhängt, iſt der erſte von den Theilungspuncten. Da wo die übrigen beyden Theilungspuncte hinfallen, bey M und N, hat die Hülſe ebenfalls Oefnungen. Von M geht eine Röhre hinauf nach den Teller, worauf die Klocke ſteht; von N aber geht eine andre Röhre nach der oberſten Oefnung des Cylinders hinauf, und hängt daſelbſt mit dem innern Raum des Cylinders ſo zuſammen, wie es bey OPQ in der 50 Fig. vorgeſtellet iſt. Die Ebene des Kreiſes *dmn* ſtellt nun zugleich einen horizontalen Querſchnitt des Hahns vor, der
52 Fig. in der 52 Fig. beſonders gezeichnet iſt. Hieſelbſt iſt V der Mittelpunct dieſes Kreiſes in der Axe des Hahns, die Peripherie iſt in drey gleiche Bogen getheilt bey num. 1. 2. 3; von n. 1. erſtreckt ſich ein Canal bis n. 2. Bey n. 3. geht ein Canal gegen die Axe des Hahns zu, biegt ſich aber bey Y aufwärts, ſo wie es die 50 Figur bey DYZ vorſtellt. Mit V1, V2 und V3 ſind die drey Schweiſe des Hahns parallel.

Wenn nun der Hahn in ſeiner Hülſe ſteckt, und die Oefnung n. 1. auf D zutrift, ſo trift n. 2. auf M, und n. 3. auf N zu: alſo iſt ein Weg von C durch D und M nach den Raum unter der Klocke, und überdem ein Weg oben von dem Cylinder bey O durch P, Q, N, und Y bis Z offen, ſo daß die Luft unter der Klocke mit der Luft im Cylinder unter dem Kolben, und überdem die Luft über dem Kolben mit der äuſſern Luft Gemeinſchaft hat. Demnach dient nun die Pumpe, die Luft unter der Klocke zu verdünnen, und deswegen iſt auf dem mit V1 paral-

parallelen Schweif des Hahns der Buchſtab E geſtochen, welches ein Merkmal, den Hahn recht zu ſtellen, abgiebt. Beym Heraufziehen des Stempel tritt von der Luft unter der Klocke ein Theil durch den Weg MDCF in den Raum unter dem Stempel im Cylinder, und die über dem Kolben befindliche Luft nimmt den Ausweg durch OPQNY. Beym Herabwinden des Stempels ſchlieſt ſich das Ventil F, und die unter dem Kolben vorher hinein getretene Luft ſteigt durch das Kolben-Ventil über den Kolben hinauf. Ob nun gleich dieſe Luft ſchon verdünnt iſt, ſo würde ſie doch, ſobald ſie über den Kolben hinauf komt, mit der äuſſern Luft einerley Dichtigkeit annehmen, wenn die Verbindung durch OPQ mit der äuſſern Luft beſtändig offen bliebe. Um dies zu verhindern, iſt bey O ein kleines Ventil angebracht, welches das Eindringen der äuſſern Luft hindert, bis durch Verengerung des Raums über dem Stempel die daſelbſt befindliche Luft anfängt dichter zu werden, als die äuſſere, da ſie dann das Ventil aufſtößt, und ihren Ausweg findet.

Wenn man den Hahn in ſeiner Hülſe ſo drehet, daß n. 3. auf D zutrift, ſo trift n. 1. auf M, und n. 2. auf N zu. Demnach hat nun die äuſſere Luft durch Z, Y, C, F mit der Luft unter dem Stempel im Cylinder Gemeinſchaft: von der Luft über dem Stempel aber geht ein Weg durch OPQ, und N, M (zwiſchen dieſen Oefnungen liegt nun der Canal von n. 1. bis 2. (52 Fig.)) bis zu der Luft unter der Klocke hinauf. Dieſemnach dient nun die Pumpe dazu, die Luft unter der Klocke zu verdichten. Beym Heraufziehen des Stempels tritt die äuſſere Luft durch ZYDC, öfnet das Ventil F, und begiebt ſich

in den Raum, der unter dem Stempel leer wird; die über dem Stempel ſchon befindliche Luft geht zugleich durch OPQ in den Raum unter der Klocke. Beym Herabwinden des Stempels ſtößt die vorhin in den Cylinder von auſſen hinein getretene Luft das Kolben-Ventil auf, und begiebt ſich in den Raum über den Kolben, da ſie denn wegen des Ventils bey O ihre natürliche Dichtigkeit anfangs behält, bis ſie der hinauf gehende Stempel ſo weit verdichtet hat, daß ihre Dichtigkeit diejenige zu übertreffen anfängt, welche die unter der Klocke jetzt befindliche Luft ſchon erlangt hat. Das Ventil O dient alſo bey beyderley Arbeit, die Mühe zu erleichtern, und ein ähnlicher Vortheil war auch bey der Graveſandſchen und Nolletſchen Pumpe angebracht.

87 §.

Es iſt ſchon lange, daß man die ledernen Ventile bey Luftpumpen verworfen hat. Man ſchneidet ſtatt deſſen aus einem Stück von einer Blaſe einen Streifen, der die nöthige Breite hat, und ſpannet denſelben grade über der Oefnung aus, die man mit einem Ventil ſchlieſſen will. Man ſiehet wohl, daß dies die Stelle eines Ventils vertrete, wenn dies Stück Blaſe nach Art eines Bandes nur an beyden Enden befeſtiget iſt. Von der Seite, wo die Blaſe aufliegt, drückt die Luft ſie nur deſto feſter an: wenn aber die Luft von der andern Seite drückt, ſo hebt ſie die Blaſe in der Mitte ein wenig, und bläßt alsdenn zu beyden Seiten heraus. Mit dergleichen Ventilen hatte Hauksbee ſchon ſeine Luftpumpe verſehen, und man kan ihnen keinen Mangel als nur den einzigen zur Laſt legen, daß eine ſehr verdünnte Luft,

wenn ſie durch eine ſehr kleine Oefnung gehen ſoll, nicht Federkraft genug hat, die Blaſe zu heben. Soviel ſiehet man indeſſen wohl, daß ſich der Druck der Luft gegen die Blaſe durch Erweiterung der Oefnung vergröſſern läſt, welche die Blaſe als ein Ventil ſchlieſſen ſoll: dabey aber verfällt man in eine andre Unbequemlichkeit, die nicht weniger erheblich iſt. Wenn nun von der andern Seite, wo die Blaſe aufliegt eine viel dichtere Luft, gegen die Blaſe drückt, ſo entſteht bey einer groſſen Oefnung in der Blaſe eine Vertiefung, und man läuft wohl gar Gefahr, daß die Blaſe zerreiſſe. Smeaton hat bey ſeinen Ventilen beyde Fehler zu vermeiden geſucht, und vielleicht ſind die Leupoldſchen Ventile, welche er bey der im 75 §. beſchriebenen doppelten Luftpumpe gebraucht hat, den Smeatonſchen ſchon ähnlich geweſen, welches ich nicht ſagen kan, weil mir keine weitere Nachricht von dieſer Leupoldſchen doppelten Pumpe auſſer der daſelbſt angeführten bekannt iſt.

88 §.

Das Bodenſtück des Stiefels bey der Smeatonſchen Luftpumpe hat eine runde Vertiefung FS, womit unten die Röhre CD zuſammen hängt. Dieſe Vertiefung iſt im Durchmeſſer dreymahl weiter, als die Röhre CD, und über ihre obere Oefnung iſt die Ventilblaſe ausgeſpannt. Demnach iſt hier die Fläche der Ventil-Oefnung neunmahl weiter, als ſie ſeyn würde, wenn die Röhre CD unmittelbar mit der Blaſe bedeckt wäre, alſo der Druck der Luft gegen die Blaſe neunmahl ſtärker, als wenn das Ventil wie ſonſt gewöhnlich eingerichtet wäre. Damit nun hier nicht die andre Unbequemlichkeit eintrete, 50 Fig.

 und

und die unter dem Stempel befindliche Luft, wenn der Stempel ſie zuſammen drückt, die Blaſe zerſprenge; ſo bringt Smeaton über der Oefnung FS ein zartes Netz von Metall an, das aus ſieben Sechsecken beſtehet, wovon ihrer ſechs um das ſiebende in
53 Fig. der Mitte befindliche herum liegen. Dies Netz IK befindet ſich in der Mitte einer metallenen Scheibe ABCD, welche auf dem Boden des Stiefels liegt. Der Blaſe giebt Smeaton die Geſtalt ABCD, ſo daß ſie an vier Enden um den Rand des Ringes gelegt, und ſo befeſtiget wird; zwiſchen dieſen vier Stellen bey A, B, C, D, ſind die Bogen E, F, G, H, ein klein wenig erhöhet, damit der Stempel, wenn derſelbe unten an dem Ventil etwas angedruckt wird, die Blaſe nicht beſchädige.

89 §.

Wenn nun der Stempel unten an dem Ventil allenthalben genau anſchlieſt; ſo wird auf dieſe Art auch zuwege gebracht, daß alle Luft, die unter dem Kolben vorhanden iſt, durch das Kolben-Ventil hinauf zu treten gezwungen wird. Eben darum iſt in der Mitte der übrigens ebenen und glatten Grundfläche des Kolbens eine kleine Oefnung *c* befindlich,
50 Fig. der Kolben iſt hohl, und gleich über die Oefnung *c* liegt das Ventil *ab*. Durch das darüber befindliche Stück des Kolbens gehen ein paar kleine Oefnungen *m* und *n* hindurch, um die durch das Ventil getretene Luft hinauf zu laſſen. Nun wird nur ein ſehr geringer Theil der bey jedem Zuge während des Auspumpens in den Cylinder hineingetretene Luft zwiſchen dem Kolben und dem Boden-Ventil ſtecken bleiben, etwa ſoviel, als den kleinen Canal *c* bis an die

die Blaſe *ab* ausfüllt. Dieſe iſt indeſſen wegen des bey O angebrachten Ventils mit der Luft unter der Klocke beynahe gleich ſtark verdünnt, und kan deswegen bey dem folgenden Zuge der fernern Verdünnung nicht merklich hinderlich ſeyn. Wenn das Ventil bey O nicht befindlich wäre, ſo würde die unter dem Kolben zurück bleibende Luft mit der äuſſern gleiche Dichtigkeit haben, und alsdenn der fernern Verdünnung ſo ſehr hinderlich ſeyn, daß man ſie nur bis auf eine gewiſſe Grenze treiben könte. Verhielte ſich der Raum, worin ſie unter dem Kolben zurück bleibt, zum ganzen Raum des Kolbenzuges wie 1 : *n*, ſo würde dieſe Luft nachdem der Stempel hinauf gezogen worden, *n* mahl dünner ſeyn, als die natürliche, und wenn alsdenn die Luft unter der Klocke ſchon eben ſo ſtark verdünnt wäre, ſo könnte in den Cylinder nichts mehr hinein treten, und die Verdünnung lieſſe ſich nicht weiter treiben. Wenn die Pumpe ſtatt des Ventils bey F einen Hahn hätte, wie die Sengwerdſche und andre, ſo würde eben die Urſache der Verdünnung ſehr hinderlich ſeyn, wenn zwiſchen dem Kolben, wenn er, ſo weit es angehet in den Cylinder hinein getrieben iſt, und dem Hahn ſoviel Raum übrig bliebe, daß ſein Verhältniß gegen den körperlichen Inhalt des Kolbenzuges einigermaſſen beträchtlich wäre; und dies um ſo mehr alsdenn, wenn kein Ventil wie O angebracht werden kan, daß der äuſſern Luft den Weg von der andern Seite in den Cylinder zu kommen verſchlieſt. Man findet ſchon im 19 §. der Aeroſt. eine hieher gehörige Anmerkung, und ſelbſt Boylens Luftpumpe ſcheint anfangs dieſen Mangel ſehr merklich gehabt zu haben: das iſt vielleicht eine von den

Urſachen, weswegen er ſich beklagt, daß er die Verdünnung nicht ſehr weit treiben könne. Hier bey der Smeatonſchen komt nun auch alles darauf an, daß der Stempel oben an den Deckel des Cylinders in ſeinem höchſten Stande recht genau anſchlieſſe, und daß bey O zwiſchen dem dortigen Ventil und dem Kolben ſo wenig Luft als möglich iſt, ſtecken bleibe, weil ſie daſelbſt mit der äuſſern einerley Dichtigkeit hat, doch iſt ſie hier ſo ſchädlich nicht, als bey ſolchen Pumpen, wo ſie zwiſchen dem Hahn und Kolben ſtecken bleibt, welches man ſo überſiehet. Geſetzt es bleibe bey O ein Raum, der n mahl kleiner iſt, als der Raum des Kolbenzuges, ſo wird ſich doch die darin zurück gebliebene Luft, wenn der Kolben herabſinkt, durch den ganzen Raum des Kolbenzuges ausbreiten, und n mahl dünner werden, als die äuſſere Luft. Geſetzt unter dem Kolben in ſeinem niedrigſten Stande bleibe auch ein kleiner Raum, ſo iſt die darin zurück bleibende Luft auch n mahl dünner, als die äuſſere Luft. Eben dieſer Raum ſey m mahl kleiner, als der Raum des Kolbenzuges, ſo wird die darin befindliche Luft, wenn der Kolben wieder ganz hinaufgeſtiegen iſt, $n \times m$ mahl dünner, als die äuſſere ſeyn, und bis auf dieſe Grenze wird ſich die Verdünnung der Luft unter der Klocke auch treiben laſſen.

90 §.

Man hat bey den neuern Luftpumpen unter andern bequemen Einrichtung auch ein Barometer angebracht, welches hier der Index Mercurialis heiſt, weil daſſelbe vermöge der Art, wie es mit der Pumpe verbunden wird, anzeigen muß, wie weit die Luft

unter der Klocke ſchon verdünnt ſey. Es ſey AB 54 Fig.
der Teller, und CD eine hindurch gehende bey C
offene Röhre: in dieſe ſey bey D eine gläſerne über
28 Pariſer Zoll lange Röhre DG geſteckt, und bey
D alles gegen das Eindringen der äuſſern Luft verwahret. Das unten bey G offene Ende der gläſernen Röhre ſtehe in einem Gefäß HI mit Queckſilber, und EF ſey die Verbindungsröhre zwiſchen dem Teller und der Pumpe. So lange nun über dem Teller die Luft ſich im natürlichen Zuſtande befindet, ſo lange ſteht das Queckſilber im Gefäß HI und in der Röhre gleich hoch. Wenn aber die Klocke über dem Teller ſteht, und unter derſelben durch Bearbeitung der Pumpe die Luft verdünnt wird, ſo ſteigt das Queckſilber in der Röhre hinauf, und zwar deſto höher, je weiter die Verdünnung getrieben wird. Könte man alle Luft unter der Klocke wegſchaffen, ſo würde das Queckſilber, nachdem ſolches bewerkſtelliget wäre, in der Röhre ſo hoch ſtehen, als es zu der Zeit in jedem an eben dem Ort befindlichen Barometer ſteht. Und wenn die Pumpe vollkommen luftdicht iſt, und man läſt alles in dem erwehnten Zuſtande einige Tage nach einander bleiben, ohne daß man mit Fleiß Luft unter die Klocke kommen läſt; ſo muß das Queckſilber während dieſer Zeit eben ſo, wie in andern Barometern ſteigen und fallen. Man weiß ſchon, daß man es bis zur völligen Ausleerung des Raums unter der Klocke nicht bringen wird, daß alſo das Queckſilber in der Röhre nicht völlig die wahre Barometerhöhe erreichen werde. Hat man nun an der Röhre eine gehörig eingetheilte Tafel angebracht, ſo wird man aus der Höhe, auf welche das Queckſilber durch Bearbei-

 tung

tung der Pumpe gebracht werden kan, beurtheilen können, wie weit ſich die Verdünnung der Luft unter der Klocke treiben laſſe. Einen ſolchen Zeiger hatte Hauksbee bey ſeiner Pumpe angebracht; Leupolds doppelte Pumpe, die beyden Graveſandſchen und die Smeatonſche haben ihn ebenfals. Der Smeatonſche Zeiger iſt aber etwas anders eingerichtet, damit er auch dienen könne, wenn man die Luft unter der Klocke verdichtet hat, anzuzeigen, wie weit die Verdichtung getrieben ſey. Ferner dient der vorhin beſchriebene Zeiger eigentlich auch nur dazu, von der Federkraft der unter der Klocke noch befindlichen Luft zu urtheilen; denn dieſe mit dem Druck der Queckſilber-Säule zuſammen iſt der Federkraft der Atmoſphäre gleich, ſo daß man nur die Höhe des Queckſilbers im Zeiger von der dermahligen Barometerhöhe abziehen darf, um die Höhe einer Queckſilber-Säule zu haben, deren Druck ſo groß iſt, als die Federkraft der unter der Klocke eingeſchloſſenen Luft. Weil die Federkraft der Dichtigkeit nicht genau proportional iſt, ſo läſt ſich daraus auf die eigentliche Dichtigkeit der verdünnten Luft nicht mit Sicherheit ſchlieſſen. Deswegen braucht Smeaton ein andres Werkzeug, welches dazu dient, die Dichtigkeit dieſer Luft unmittelbar zu meſſen.

91 §.

55 Fig. Smeatons Mercurial-Zeiger iſt eine unten bey F umgebogene Röhre, wovon beyde Schenkel vertical ſind. Der längere Schenkel hängt oben bey G mit dem Teller der Pumpe, wie die vorhin beſchriebenen zuſammen, und der kürzere iſt bey C zugeſchmolzen. In dieſe Röhre bringt man Queckſilber hinein, und

zwar ſo, daß ein Theil des Schenkels CF mit Luft angefüllt bleibt. Wenn dies ſo eingerichtet wird, daß das Queckſilber in beyden Schenkeln gleich hoch bis an die Horizontallinie AB ſteht; wenn die Oefnung G mit der äuſſern Luft Gemeinſchaft hat; ſo iſt die Federkraft der in BC eingeſchloſſenen Luft mit der Federkraft der äuſſern einerley. Fängt man nun an, die Luft unter der Klocke wegzupumpen, ſo tritt das Queckſilber aus dem kürzern Schenkel in den längern hinein, und ſteigt in dem letztern deſto höher, je weiter das Auspumpen getrieben wird. Wenn nun nach etlichen Auspumpungen das Queckſilber aus BFA in den Raum DE getreten iſt, und man ſetzt die Länge des Theils BFA der Röhre, ſoweit ſie mit Queckſilbers anfangs angefüllet war $= l$, ſo iſt auch DE $= l$; und wenn die Höhen, welche der Federkraft der Luft in dem Raum CFD und unter der Klocke zugehören, mit p und q bezeichnet werden; ſo hat man $q + l = p$, oder $q = p - l$. Die Federkraft der in CFD eingeſchloſſenen Luft, oder die ihr zugehörige Höhe p findet man aus dem Verhältniß der Räume CB und CBFD. Man ſetze die Barometerhöhe $= h$, die Länge CB $= a$, und AE $= x$, ſo iſt CBFD $= a + l + x - l = a + x$, und es wird $p = \frac{a}{a+x} . h$, alſo $q = \frac{ah}{a + x} - l$. Demnach erkennet man die Federkraft der verdünnten Luft aus der Höhe, um welche ſich das Queckſilber über die Horizontallinie AB erhebt. Wenn man die Luft unter der Klocke ganz wegpumpen könte, ſo wäre alsdenn $q = 0$, alſo $(a+x)l = ah$, und $x = \frac{a(h-l)}{l}$.

So lang muß demnach wenigſtens das Stück AG der Röhre ſeyn, damit man verſichert ſey, daß das Queckſilber nicht aus der obern Oefnung G der Röhre austreten und die Pumpe beſchädigen könne. Auf einer gehörig befeſtigten Tafel HI kan man nun Abtheilungen anbringen, um die Gröſſe der Höhe AE ſogleich zuerkennen: und wenn man es noch bequemer haben wollte, ſo könte man ſie ſo einrichten, daß ſie gleich das Verhältniß der Federkraft der verdünnten Luft zur Federkraft der natürlichen unmittelbar anzeigten. Setzt man nemlich $\frac{q}{h} = z$, und $\frac{l}{h} = n$; ſo iſt $z = \frac{a}{a+x} - n$, alſo $(a+x)(z+n) = a$, woraus $x = \frac{a(1-(z+n))}{z+n} = a\left(\frac{1}{z+n} - 1\right)$ folgt. Nimmt man nun die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, u. ſ. f. für z an, berechnet die dazu gehörigen Werthe von x, und nimmt die Höhen AE dieſer Rechnung gemäß an; ſo kan man bey den ſo gefundenen Puncten E dieſelben Brüche nach der Ordnung hinſetzen, da dann der Zeiger die Federkraft der verdünnten Luft unmittelbar angeben wird.

92 §.

Um die eigentliche Dichtigkeit der unter der Klocke verdünnten Luft zu erfahren, giebt Smeaton folgendes Werkzeug an. Ein hohles gläſernes Gefäß
56 DE, das unten bey E offen iſt, und ohngefehr ſo wie
Fig. eine Birne ausſiehet, hängt mit einer engen Röhre FG zuſammen, die oben bey G zugeſchmolzen iſt. Die Abſicht, wozu es gebraucht werden ſoll, erfordert,

dert, daß man das Verhältniß vom Inhalt des ganzen Gefäſſes zum Inhalt der Röhre FG oder auch eines Theils von ihr, der eine bekannte Länge hat, vorher zu finden ſuche. In ſolcher Abſicht darf man nur vermittelſt einer ſehr ſchnellen Wage das Gewicht von ſoviel Queckſilber ſuchen, als einmahl das ganze Gefäß, und hiernächſt den gegebenen Theil der Röhre füllt: das Verhältniß dieſer Gewichte iſt mit dem geſuchten Verhältniß einerley. Alsdenn weiß man auch das Verhältniß kleinerer Theile der Röhre zum Inhalt des Gefäſſes, und man iſt im Stande auf einer an FG befeſtigten Tafel Abtheilungen zu machen, die bey G aufangen, wovon jede ein Tauſendtheilchen vom Inhalt des ganzen Gefäſſes anzeigt. Nun muß man eine Klocke zur Hand haben, durch deren Kopf bey A ein Stift BC ſo gehet, daß man ihn auf- und abwärts bewegen kan, ohne doch Luft durchzulaſſen. Wenn dieſer Stift einen Haken hat, ſo hängt man das Gefäß DE mit ſeiner Tafel vermittelſt eines daran befindlichen Ringes daran auf, und ſetzt unter demſelben ein Gefäß KL mit Queckſilber, doch ſo, daß anfangs die Oefnung E das Queckſilber nicht erreicht. Nun läſt man die Pumpe arbeiten, und die Verdünnung ſo weit treiben, als es angehet; alsdenn drückt man den Stift BC tiefer hinein, damit ſich die Oefnung E ins Queckſilber eintauche, läſt darauf die freye Luft wieder unter die Klocke, welche nun das Queckſilber ins Gefäß hineintreiben, und vermittelſt deſſelben die verdünnte Luft zuſammenpreſſen wird, die darin noch übrig war, und mit der verdünnten Luft unter der Klocke einerley Dichtigkeit hatte. Dieſe Luft wird ſich nun in einem kleinen Raum oben bey G begeben

haben, und aus den auf der Tafel angebrachten Abtheilungen erkennt man das Verhältniß dieſes Raums zum Inhalt des Gefäſſes, folglich auch das Verhältniß ihrer jetzigen Dichtigkeit zur vorigen, da ſie durch den Raum des ganzen Gefäſſes ausgebreitet war. Weil die Oefnung E ziemlich weit iſt, ſo können Luft und Queckſilber einander ausweichen, und man kan das Queckſilber durch dieſe Oefnung ausgieſſen, ſo daß der in FG hineingetretene Theil zurück bleibt. Hält man alsdenn die Röhre horizontal, ſo wird die bey G befindliche Luft blos von der Atmoſphäre zuſammen gepreſt, und ihre Dichtigkeit iſt alsdenn der Dichtigkeit der äuſſern Luft gleich. Die Tafel zeigt alſo nun, wievielmahl ſie vorher dünner geweſen ſey, als die äuſſere Luft. Man könte demnach dies Gefäß den Dichtigkeits-Zeiger nennen, ſo wie die Röhre im vor. §. eigentlich der **Elaſticitäts-Zeiger** war. Smeaton nennt jenes von ſeiner Geſtalt die Birnprobe.

93 §.

55 Fig. Der Smeatonſche Elaſticitätszeiger dient nun auch, wie man leicht ſiehet, die Dichtigkeit der unter der Klocke zuſammengepreſten Luft zu erkennen, wenn die Pumpe zum verdichten gebraucht wird. Alsdenn ſteigt das Queckſilber in dem Schenkel BC höher hinauf, und ſinkt in dem andern Schenkel unter A. Es ſey von B nach K geſtiegen, ſo iſt es von A nach L geſunken, und AL = BK: ziehet man alſo LM horizontal, ſo iſt MK = 2BK. Wenn nun p und q die Höhen bedeuten, welche der Federkraft der in den Räumen CK und unter der Klocke eingeſchloſſenen Luft zugehören, h aber die Barometerhöhe iſt; ſo

ſo hat man MK $+p=q$, oder $2y+p=q$, wenn man BK $=y$ ſetzt. Ferner iſt $p=\frac{a}{a-y}h$, alſo

$$2y+\frac{ah}{a-y}=q,$$

und dieſe Gleichung giebt q durch y, ſo wie auch umgekehrt y durch q. Es wird nemlich $2ay-2yy+ah=aq-qy$, und daraus folgt $yy-(a+\frac{1}{2}q)y=-\frac{1}{2}a(q-h)$, alſo $y=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2}q)\pm\surd(\frac{1}{4}(a+\frac{1}{2}q)^2-\frac{1}{2}a(q-h))$, oder auch $y=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2}q)\pm\surd(\frac{1}{4}(\frac{1}{2}q-a)^2-\frac{1}{2}ah)$. Nimmt man nun $q=zh$ an, und ſetzt alsdenn ſtatt z nach einander die Zahlen 2, 3, u. ſ. w. ſo kan man berechnen, wie groß BK $=y$ ſey, wenn die Federkraft der Luft unter der Klocke zweymahl, dreymahl u. ſ. f. gröſſer iſt, als die Federkraft der Atmoſphäre. Bringt man alsdenn daſelbſt Abtheilungen auf der Tafel an, und ſetzt die Zahlen 2, 3, u. ſ. f. dabey; ſo zeigt der Stand des Queckſilbers unmittelbar, wie vielmahl die Federkraft der Luft unter der Klocke gröſſer ſey, als die Federkraft der Atmoſphäre.

94 §.

Was nun noch insbeſondre die Verdichtung der Luft unter der Klocke betrift, ſo ſiehet man wohl, daß ſich dies nicht bewerkſtelligen laſſe, wofern die Klocke nicht durch eine äuſſere Gewalt gegen den Teller angedrückt wird. Daher war das im 85 §. ſchon erwehnte Schraubengeſtelle nöthig, welches die Klocke zu befeſtigen dient. In der 57 Fig. ſtellet AB die horizontal liegende ebene Tafel vor, welche hier zugleich ſtatt des Tellers dient, und von vier Säulen getragen wird, ſo wie es ſchon im 85 §. iſt beſchrieben 57 Fig.

ben

ben worden. In der Mitte wird die Klocke aufgeſetzt, und ihr zu beyden Seiten ſtehen ein paar Stützen ſo, daß man ſie auch nach Gefallen wegnehmen kan, wenn ſie nicht gebraucht werden: ihre oberſten Zapfen DG und FH ſind mit Schraubengewinden verſehen. Ferner iſt IK ein Querſtück mit Oefnungen, durch welche die Schrauben bey G und H durchgeſteckt werden, L und M ſind die Mutterſchrauben, welche dies Querſtück gegen die Klocke andrücken. Eine Klocke die zu dieſem Gebrauch dienen ſoll, muß ſehr ſtark, und aus ſehr dicken Glaſe verfertiget ſeyn, wenn man nicht der Gefahr ausgeſetzt ſeyn will, daß die eingeſchloſſene zuſammengepreſte Luft ſie zerſprenge. Um ſich ſowohl ſelbſt als auch andre, die dem Verſuch vielleicht beywohnen, in Sicherheit zu ſetzen, daß man nicht durch ein unvermuthetes Zerſpringen der Klocke beſchädiget werde, iſt es ſehr rathſam, die Klocke mit einem Gitter von ſtarken Eiſen-Drat zu überziehen.

95 §.

Ueberhaupt darf man die Zuſammenpreſſung der Luft wegen der eben erwehnten Gefahr nicht weit treiben. Wenn die innere Luft dreymahl dichter als die äuſſere iſt, ſo leidet die Klocke ſchon einen Druck, der doppelt ſo ſtark iſt, als der Druck der Atmoſphäre, und es iſt bey dieſer Gewalt, welche die Klocke leidet, ſchon ſehr zu fürchten, daß ſie ſpringen dürfte. So weit als man es hier wagen darf, läſt ſich alſo die Luft ſchon mit einer kleinen Handpumpe, ohne alle weitere mechaniſche Anordnung zu-
57 Fig. ſammen drücken. Von einer ſolchen kleinen Pumpe ſtellet OP den Cylinder vor, der unten bey O ein

Ventil

Ventil hat, die Luft aus dem Cylinder heraus, aber nicht wieder einzulaſſen, Q iſt die mit einem bequemen Handgrif verſehene Kolbenſtange, und bey R hat der Cylinder nahe unter dem Kolben, wenn er am höchſten ſteht, eine kleine Oefnung, um die Luft in den Cylinder von auſſen hinein zu laſſen. Man kennt die Würkung einer ſolchen Pumpe ſchon aus demjenigen, was bey Gelegenheit der Guerikiſchen Luftpumpe oben im 67 §. iſt angemerkt worden. Hat man nun eine ſolche Klocke zur Hand, welche oben mit einer kleinen Röhre verſehen iſt, die man mit einem Hahn S ſchlieſſen kan, und iſt die Druckpumpe OP ſo eingerichtet, daß man ſie auf der Röhre der Klocke anſchrauben, oder ſonſt befeſtigen kann; ſo darf nur das Querſtück IK in der Mitte eine Oefnung haben, durch welche die zur Klocke gehörige Röhre hindurch gehet, um nun alles, wie es die Figur vorſtellet, zuſammen zu ſetzen. Wenn alsdenn AB wie ein Tiſchblad mit kurzen Füſſen verſehen iſt, ſo dient dieſe Einrichtung als eine bequeme Druckpumpe mit der nöthigſten Geräthſchaft, die in ſolchem Fall zu empfehlen iſt, wenn man etwa ſonſt eine Luftpumpe hätte, die allein zum verdünnen eingerichtet wäre.

Metallene Gefäſſe können den Druck einer weit ſtärker verdichteten Luft ertragen, als gläſerne Klocken: allein damit iſt die Unbequemlichkeit verbunden, daß man nicht ſehen kan, was in der verdichteten Luft vorgehet, welches doch bey manchen phyſicaliſchen Verſuchen zu wünſchen iſt. Um dieſe Abſicht zu erreichen, bedient man ſich metallener Cylinder, und ſetzt in die Mitte beider Grundflächen ſehr dicke Glasſcheiben. Einen ſolchen Cylinder befeſti-

get man in horizontaler Lage auf einem Fußgeſtelle, und bringt alsdenn oberwärts eine Röhre mit einem Hahn an, womit eine kleine Handpumpe wie vorhin verbunden wird. M. ſ. Graveſandii Phyſices Elem. Mathem. T. II. Lib. IV. Cap. V. §. 2216 ſqq. pag. 610. ſqq. Bey dem allen bringt man noch wohl eine Vorrichtung an, wodurch das Auge des Beobachters bey unvermuthetem Zerſpringen einer Glasſcheibe gegen Beſchädigung in Sicherheit geſetzt wird. Leupold hat in ſeiner oben angeführten Beſchreibung der Luftpumpe ein ſo zubereitetes Gefäß angegeben, worin er die Luft mit der Sengwerdſchen Pumpe verdichtet, wovon man auch die Acta Erud. A. 1708. p. 354. 355. nachſehen kan.

Der VI. Abſchnitt.

Nähere Anleitung zur Berechnung des Effects und der mechaniſchen Anordnung einer Luftpumpe.

96 §.

Wenn eine Luftpumpe ihre Dienſte thun ſoll, es ſey durch Verdünnung oder Zuſammenpreſſung der Luft, in einem dazu geſchickten Gefäſſe; ſo muß der Stempel in Bewegung geſetzt, und eine Zeitlang darin erhalten werden. Dazu iſt Kraft nöthig, weil der Stempel wegen mehr als einer Urſache der Bewegung widerſtehet. Hier wird man eben nicht darauf verfallen, durch andre Arten von Kräf-

Kräften die Luftpumpe in Arbeit zu ſetzen, als durch menſchliche Kräfte, und die Bequemlichkeit des Gebrauchs erfordert, daß eine Perſon der Arbeit gewachſen ſey. Weil überdem eine Menge nützlicher und lehrreicher Verſuche mit der Luftpumpe angeſtellet wird, wovon man gemeiniglich eine ziemliche Anzahl nach einander zu machen hat, ſo muß die Arbeit für eine Perſon auch nicht zu beſchwerlich ſeyn. Dies ſind etwa die Umſtände, worauf man zu ſehen hätte, wenn man eine vortheilhafte Anordnung einer Luftpumpe, was ihren Mechanismus betrift, angeben wollte. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die nöthigen Vorſichtigkeits-Regeln nicht ausgeſchloſſen werden, die man bey Anordnung der Ventile, der Hähne, der Kolben, der Verbindungs-Röhren u. ſ. f. zu beobachten hat, damit alles vollkommen luftdicht ſey, auch keine Luft irgendwo ſtecken bleibe, wo man ſie nicht haben will; wie ſolches alles im vorhergehenden ſchon gelegentlich mitgenommen worden. Man findet bey den angeführten Schriftſtellern, und beſonders beym Nollet allerley brauchbare hieher gehörige Nachrichten. Ueber die beſte Proportion aller Theile einer Luftpumpe aber, in ſo fern ſie die eigentliche mechaniſche Anordnung ausmachen, habe ich bisher nur weniges bey andern Schriftſtellern gefunden: und unter allen, die ich kenne, iſt Hr. **Nollet** der einzige, der bey Anordnung ſeiner Luftpumpen Gründe aus der Mechanik und Maſchinenlehre angegeben hat, warum er dieſe und keine andre Abmeſſungen aller Theile wähle. Doch fehlt ſeinen Unterſuchungen über dieſen Gegenſtand, die er in den Aufſätzen anſtellt, wovon ich im 62 §. Nachricht gegeben habe, noch etwas, daß ſich durch Hülfe der im

vorigen Abſchnitt vorgetragenen Theorie ergänzen läſt, und wovon das folgende ſogleich einen nähern Begrif geben wird.

97 §.

Die Würkung der Luftpumpe hat alle Aehnlichkeit mit der Würkung der Waſſerpumpen: binnen der Zeit, da der Stempel ſich vom Boden des Stiefels entfernt, ſoll Luft hineintreten, und zwar ſoviele Luft, als nach der Natur dieſer flüßigen Maſſe angehet, damit ſo wenig Züge, als möglich erfordert werden, eine verlangte Verdünnung oder Verdichtung der Luft unter der Klocke zuwege zu bringen. Dieſe Züge ſollen auch in ſo kurzer Zeit geſchehen, als die eben erwehnte erſte Abſicht verſtattet. Denn bey ſehr ſchnellen Zügen wird jedesmahl weniger Luft in den Cylinder hinein treten, als bey langſamen Zügen, wie man würde überſehen können, wenn es auch nicht durch theoretiſche Gründe im IV Abſchnitt ſchon beſtättiget wäre. Auf diejenige Menge Luft, welche bey jedem Zuge nach Proportion der Zeit des Zuges in den Cylinder hinein treten wird, ſcheint Hr. Nollet ſo ſehr nicht Rückſicht genommen zu haben, er ſucht nur alles ſo einzueichten, daß eine Perſon mit aller Bequemlichkeit den Widerſtand des Kolbens überwinden könne, und jeder Zug nicht gar zu viele Zeit erfordere. Ich werde nun verſuchen in wie weit ſich jener Umſtand mit in Rechnung bringen laſſe.

98 §.

Alle Abmeſſungen einer Saug-Luftpumpe ſind gegeben, nebſt der Zeit eines Kolbenzuges: man ſucht, in welchem Verhältniß die

Luft unter der Klocke durch eine gegebene Anzahl von Kolbenzügen verdünnt werden könne, wenn man annimmt, daß ſich das Ventil im Boden des Stiefels, oder der ſtatt deſſen angebrachte Hahn, am Ende des Zuges augenblicklich ſchlieſſe.

Aufl. Wenn man die im 50 und 51 §. gebrauchten Bezeichnungen hier beybehält, ſo iſt A der Raum unter der Klocke und der Verbindungsröhre bis an den Hahn am Boden des Stiefels, oder das ſtatt des Hahns daſelbſt angebrachte Ventil, B iſt der Raum des Kolbenzuges, oder $B = cb$, wenn c den Querſchnitt des Cylinders, und b die Länge des Zuges bedeutet: ferner iſt f die Gröſſe der Oefnung, durch welche die Luft aus der Klocke in den Cylinder tritt, k die im 18 §. beſtimmte Höhe, und g die Höhe des freyen Falles in einer Secunde. Ueberdem iſt δ die Dichtigkeit der Luft unter der Klocke, γ ihre Dichtigkeit im Cylinder während des Zuges, und $u = \frac{\gamma}{\delta}$. Wenn alsdenn t die Zeit eines Kolbenzuges bedeutet, ſo kan man $t =$

$$\frac{A}{2f\sqrt{gk(1-n)}}\, l\, \frac{A+nB}{A}$$

(51 §.) annehmen. Bedeutet nun Δ die Dichtigkeit der Luft unter der Klocke im Anfang des Zuges, ſo hat man während des Zuges $\delta = \frac{A}{A+ncw}.\Delta$, und um ſie für das Ende des Zuges zu haben, muß man $w = b$ ſetzen, da dann $cb = B$ wird, und $\delta = \frac{A.\Delta}{A+nB}$. Für das

Ende des erſten Zuges iſt nun Δ die Dichtigkeit der Atmoſphäre, oder derjenigen Luft, die anfangs unter der Klocke war. Für den Anfang des zweyten Zuges iſt $\frac{A\Delta}{A+nB}$ das, was Δ für den Anfang des erſten war, alſo wird für das Ende des zweyten Zuges $\delta = \frac{A^2\Delta}{(A+nB)^2}$. Dies iſt nun Δ für den Anfang des dritten Zuges, und am Ende deſſelben wird $\delta = \frac{A^3\Delta}{(A+nB)^3}$. So überſiehet man leicht, daß nach r Zügen $\delta = \frac{A^r\Delta}{(A+nB)^r}$ ſeyn müſſe. Kan demnach aus der Gleichung $t = \frac{A}{2f\sqrt{gk}(1-n)}\, l\, \frac{A+nB}{A}$ die Zahl n gefunden werden, ſo hat man aus der Gleichung $\delta = \frac{A^r\Delta}{(A+nB)^r}$ die geſuchte Dichtigkeit der Luft unter der Klocke, wenn ſtatt r die Anzahl der geſchehenen Züge geſetzt wird.

Der Werth von n kan durch Näherungs-Methoden gefunden werden, dergleichen im vorhergehenden ſchon verſchiedene mahl in ähnlichen Fällen ſind gebraucht worden. Man weis zum voraus, daß n ein eigentlicher Bruch, aber doch beynahe $= 1$ ſey, wofern t nicht ſehr klein angenommen wird: deswegen kan man bey Berechnung des Bruchs $\frac{A+nB}{A}$, anfangs

anfangs n muthmaßlich annehmen. Wenn alsdenn

$$\text{log. nat.}\ \frac{A+nB}{A} = L$$ geſetzt wird, ſo erhält

man $$\sqrt{(1-n)} = \frac{AL}{2ft\sqrt{gk}},$$ und $$n = 1 - \frac{A^2L^2}{4f^2t^2gk}.$$ Giebt dieſe Gleichung nun noch einen Werth von n, der von dem angenommenen verſchieden iſt, ſo muß man ihn ſtatt des vorigen brauchen, und die Rechnung wiederholen, bis beyde Werthe wenigſtens ſehr nahe übereinkommen.

99 §.

Die einfache Nolletſche Pumpe hat einen Cylinder von 26 Linien im Durchmeſſer, und die Höhe des Zuges beträgt 1 Fuß. Demnach faſſet der Raum des Kolbenzuges 76415 Cubic-Linien. Der Inhalt der größten Klocke, die etwa zu dieſer Pumpe gebraucht werden dürfte, faſſet ohngefehr 1000 Cubic-Zoll, alſo 1728000 Cubic-Linien, und die Zeit des Kolbenzuges ſchätzt Hr. Nollet auf 2 Secunden. Dem Canal zwiſchen dem Cylinder und dem Teller giebt er $1\frac{1}{2}$ Linien im Durchmeſſer, doch macht er die Oefnung des Hahns um ein weniges enger. Ich will dafür $\frac{5}{4}$ Linien annehmen, ſo iſt die Fläche dieſer Oefnung 1,225 Quadrat-Linien. Sollte vielleicht bey der Bewegung der Luft durch kleine Oefnungen etwas vorgehen, was der Zuſammenziehung des durch eine kleine Oefnung ſprützenden Waſſerſtrahls ähnlich wäre, ſo dürfte bey Anwendung der Formuln des vor. §. auf dies Exempel f etwa auf 1 Quadrat-Linie zu ſchätzen ſeyn. Weil die Zeit t

hier ziemlich kurz iſt, ſo will ich die Vorausſetzung $n = \frac{3}{5} = 0{,}6$ verſuchen, ſo giebt die fernere Rechnung

$B = 76415$

$n = 0{,}6$

$nB = 45849$

$A = 1728000$

$A + nB = 1773849$

$l(A + nB) = 6{,}2489167$

$lA = 6{,}6375437$

$l.Brig.\ \frac{A + nB}{A} = 0{,}011373$

$2{,}3025$

$0{,}022746$

3411

22

5

$L = 0{,}026184$

Wenn man nun auch g und k in Linien ausdrückt, ſo iſt $g = 15{,}1 \times 144$, und $k = 26000 \times 144$; alſo findet man ferner

$l4 = 0{,}6020600$

$lf^2 = 0{,}1762722$

$lt^2 = 0{,}6020600$

$l15{,}1 = 1{,}1789769$

$l26000 = 4{,}4149733$

$l144^2 = 4{,}3167250$

$11{,}2910674$

$lA = 6{,}2375437$

2

$lA^2 = 12{,}4750874$

$11{,}2910674$

$1{,}1840200$

Die zugehörige Zahl iſt $15{,}27637$

Man hat demnach $\frac{A^2}{4f^2t^2gk} = 15{,}27637$, und dies mit $L = 0{,}026184$ multiplicirt, giebt $0{,}399934$ ſehr nahe $= 0{,}4$, alſo $n = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ wie der zuerſt angenommenen Vorausſetzung gemäß iſt. Frägt man nun, wie vielmahl die Luft nach 200 Zügen

Zügen unter der Klocke ſchon verdünnet ſey, ſo ſetzt man in der Gleichung $\delta = \frac{A^r \Delta}{(A+nB)^r}$ die Zahl $r = 200$, da dann dieſe Gleichung auch ſo ausgedrückt werden kan, $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{(A+nB)^r}{A^r}$, und man erhält

$$l\,\frac{A+nB}{A} = 0{,}0113730$$

$$l\,\frac{(A+nB)^{200}}{A^{200}} = 2{,}2746000,$$

folglich $\frac{\Delta}{\delta} = 188$. Nach 200 Zügen wäre alſo die Luft 188mahl dünner, als die natürliche. Nimt man $r = 250$, ſo wird $l\,\frac{\Delta}{\delta} = 2{,}8432500$, und $\frac{\Delta}{\delta} = 697$. Um alſo die Luft unter der Klocke ohngefehr 700mahl dünner zu machen, als die natürliche iſt, würden 250 Züge nöthig ſeyn. Wenn nun nicht allein jeder Zug 2 Secunden, und der Rückzug etwa 1 Secunde währet, ſo vergeht darüber eine Zeit von etwa 12 Minuten.

100 §.

Es bleiben dieſelben gegebenen Stücke, wie im 98 §, man ſucht, in wie viel Zeit die Luft unter der Klocke in einem gegebenen Verhält-

niß gegen die natürliche verdünnet werden könne.

Aufl. Aus der Gleichung für t ſucht man die Zahl n wie im 98 §, ſo kan man die Zahl r aus der Gleichung $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{(A+nB)^r}{A^r}$ finden. Es wird nemlich $r\,l\,\frac{A+nB}{A} = l\,\frac{\Delta}{\delta}$, folglich $r = \frac{l(\Delta:\delta)}{l((A+nB):A)}$, und hieraus findet man die Anzahl der nöthigen Kolbenzüge, folglich auch die geſuchte Zeit, weil die Zeit eines Zuges bekannt iſt.

Wenn man dieſe Auflöſung auf das Exempel des vorigen §. anwenden, und die Zeit ſuchen will, welche erfordert würde, die Luft unter der Klocke 800 mahl dünner zu machen, als die natürliche iſt; ſo erhält man $\frac{\Delta}{\delta} = 800$, alſo $l\,\frac{\Delta}{\delta} = 2{,}9030900$, und es war $l\,\frac{A+nB}{A} = 0{,}0113730$. Jener Logarithme durch dieſen dividirt, giebt 255, und ſo viele Züge werden zu der verlangten Verdünnung erfordert. Dauret alſo nicht jeder Zug 2 Secunden, und jeder Rückzug 1 Secunde; ſo werden während der Arbeit 12 bis 13 Minuten verflieſſen.

101 §.

Wenn die Luftpumpe, wie die einfache Nolletſche mit einem Hahn verſehen iſt, und man verſchlieſt ihn allererſt in dem Augenblick, wenn ſich die Luft ins

völlige Gleichgewicht geſetzt hat; ſo kan man bey Auflöſung der Aufgabe des 98 §. ſowohl, als auch der kurz vorhergehenden die Regeln des 24 und 25 §. der Aeroſtat. zum Grunde ſetzen. Alsdenn aber muß man wiſſen, wieviele Zeit von dem letzten Augenblick der Bewegung des Kolbens bis dahin verflieſſe, da die Luft im Cylinder mit der Luft unter der Klocke ins Gleichgewicht kommt: und dies läſt ſich vermittelſt der im 26 §. gefundenen Formul berechnen. Man muß nun $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{(A+B)^r}{A^r}$,

und $r = \frac{l(\Delta:\delta)}{l((A+B):A)}$ annehmen.

Hier iſt nun $A = 1728000$
und $B = 76415$

alſo $A+B = 1804415$
und $l(A+B) = 6,2563364$
$lA = 6,2375437$

folglich $l\frac{A+B}{A} = 0,0187927$

Ferner ward im vor. §. $\frac{\Delta}{\delta} = 800$ angenommen,

alſo $l\frac{\Delta}{\delta} = 2,9030900$, und dieſer Logarithme

durch den vorigen dividirt giebt 155. Bey dieſer Vorausſetzung würden alſo 100 Züge weniger nöthig ſeyn, als bey der vorigen, um die Luft unter der Klocke 800 mahl dünner zu machen, als die natürliche iſt. Bleibt nun übrigens die Vorausſe-

tzung, daß der Stempel binnen 2 Secunden die ganze Länge des Cylinders durchlaufe, ſo iſt am Ende des Zuges der Cylinder mit Luft angefüllt, deren Dichtigkeit nur $\frac{3}{5}$ von der Dichtigkeit der Luft unter der Klocke beträgt. Um demnach zu berechnen, wieviele Zeit noch bis dahin verflieſſe, daß ſich alles ins Gleichgewicht ſetzt, muß man der Bezeichnung des 26 §. gemäß $\frac{G}{\Delta} = \nu = \frac{3}{5}$, $m = \frac{A}{B} = \frac{1728000}{76415} = 22{,}6$, und $\mu = \frac{m+1}{m+\nu} = 1{,}017241$ annehmen. Dies giebt $\sqrt{\mu} = 1{,}008583$, $\sqrt{(\mu-1)} = 0{,}165048$, und $\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{(\mu-1)}}{\sqrt{\mu}-\sqrt{(\mu-1)}} = \frac{1173631}{843535} = 1{,}391328$. Hievon iſt der Brigg. Log. $= 0{,}1434294$ und die Multiplication mit $2{,}302585$ giebt den natürlichen Logarithmen dieſer Zahl $= 0{,}3302575$. Wenn ich ihn $= L$ ſetze, ſo iſt die geſuchte Zeit

$$= \frac{A \,.\, L}{2f\sqrt{((1+m)gk)}} = \frac{1728000 \,.\, 0{,}3302575}{2.f.144\sqrt{23{,}6.15{,}1.26000}} = \frac{6000 \,.\, 0{,}3302575}{1{,}225\sqrt{23{,}6.15{,}1.26000}} = \frac{79}{145}$$

beynahe $= \frac{8}{15}$ Secunde. Es iſt demnach faſt nicht mehr, als eine halbe Secunde zur völligen Herſtellung des Gleichgewichts nöthig, und weil mit Umdrehung des Hahns vor dem Rückzuge wohl eine Secunde Zeit hingehen, und die halbe Secunde wohl verfloſſen ſeyn wird,

bevor

bevor der Hahn die Verbindungsröhre zwiſchen dem Teller und Cylinder ſchlieſſet, wenn man nicht ungemein ſchnell verfährt; ſo kan man wohl verſichert ſeyn, daß bey dieſer Pumpe die Verdünnung nach der Regel des 24 und 25 §. der Aeroſtat. berechnet werden könne. Nach jedem Rückzuge muß der Hahn von neuen gedrehet werden, und wenn man auch hierauf eine Secunde Zeit rechnet, ſo ſcheint es daß ein Zug und Rückzug binnen höchſtens 5 Secunden erfolgen werde, wenn man der Arbeit gewohnt iſt. Vermöge der vorhin angeſtellten Rechnung würden nun 155 Züge nöthig ſeyn, die Luft 800 mahl dünner zu machen, alſo würde eine Zeit von 775 Secunden, oder 13 Minuten dazu erfordert werden. Bey der Vorausſetzung des 99 §. fand man ebenfals 12 bis 13 Minuten, alſo ſcheint es, daß Ventile eben nicht vortheilhafter ſeyn würden, als der Hahn. Doch muß ich hiebey noch folgendes erinnern. Die im 98 §. angenommene Vorausſetzung, daß ſich das Ventil am Ende des Zuges augenblicklich ſchlieſſe, wird in der That nicht ſo ganz genau zutreffen. Denn wofern im letzten Augenblick des Zuges die Luft im Cylinder noch nicht eben ſo dicht, als in der Klocke iſt; (und das iſt der Rechnung gemäß), ſo wird die ſtärkere Federkraft der Luft in der Klocke das Ventil noch ſo lange offen erhalten, bis beym Rückzuge der Kolben merklich von der Stelle gerückt iſt. Binnen der Zeit wird alſo noch etwas mehr Luft in den Cylinder hinein treten, als jener Vorausſetzung gemäß iſt: und wenn dies ſeine Richtigkeit hat, ſo ſind würklich nicht völlig ſoviel Züge nöthig, als bey jener Vorausſetzung würden erfordert werden.

102 §.

Die Nolletſche doppelte Pumpe hat ein Paar Cylinder von 20 Linien im Durchmeſſer, und die Länge des Kolbenzuges erſtreckt ſich auf 7 Zoll. Hier wird alſo B = 26376 Cubiclinien, und wenn ich annehme, daß dieſelbe Klocke, wie bey der vorigen gebraucht wird, ſo bleibt A = 1728000 Cubic Linien. Die Oefnung f iſt ebenfals etwa $\frac{5}{4}$ Linien im Durchmeſſer, alſo $f = 1{,}225$ Quadrat-Linien, die Zeit t aber beträgt nicht über $1\frac{1}{2}$ Secunden. Nun fand man oben im 99 §. die Zahl $\frac{A^2}{4f^2t^2gk} = 15{,}27637$, und dort war $t = 2$; weil nun hier $t = 1{,}5$, alſo $t^2 = 2{,}25$ iſt, ſo wird für die jetzige Vorausſetzung $\frac{A^2}{4f^2t^2gk} = \frac{4}{2{,}25} \cdot 15{,}27637 = 27{,}158$. Es muß alſo $n = 1 - 27{,}158 \cdot l\frac{A+nB}{A}$ ſeyn, und wenn man hier $n = 0{,}71$ annimmt, ſo findet man

$$
\begin{array}{rr}
B = & 26376 \\
n = & 0{,}71 \\
\hline
 & 263{,}76 \\
 & 184632 \\
\hline
nB = & 18727 \\
A = & 1728000 \\
\hline
A+nB = & 1746727
\end{array}
$$

$$l(A+nB) = 6{,}2422250$$
$$lA = 6{,}2375437$$

Brigg. $l.\ \frac{A+nB}{A} = 0{,}0046813$

Dies mit 2,3025851 multiplicirt giebt

log. nat. $\frac{A+nB}{A} = 0{,}010778$, und die fernere Multiplication mit 27,158 giebt 0,2906 . . . . , alſo etwas ſehr weniges mehr als 0,29, ſo daß beynahe $n = 1 - 0{,}29 = 0{,}71$ der Vorausſetzung gemäß gefunden wird.

Um die Zeit zu finden, welche nach geendigtem Zuge noch bis zur völligen Herſtellung des Gleichgewichts der Luft verflieſſen wird, ſetze man dem 26 §. gemäß $v = \frac{G}{\Delta} = 0{,}71$, $m = \frac{A}{B} = \frac{1728000}{26376}$ $= 65{,}5$, und $\mu = \frac{m+1}{m+v} = \frac{66{,}51}{66{,}22} =$ 1,004379. Alſo wird $\sqrt{\mu} = 1{,}002187$, $\sqrt{(\mu-1)}$ $= 0{,}066174$ und $\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{(\mu-1)}}{\sqrt{\mu}-\sqrt{(\mu-1)}} = \frac{1068361}{936013}$ $= 1{,}1414$. Hievon iſt der Brigg. Logarithme = 0,0574379, und die Multiplication mit 2,3025851 giebt für eben die Zahl den natürlichen Logarithmen $= 0{,}1322256$. Vorhin iſt gefunden $\frac{A^2}{4f^2t^2gk}$ $= 27{,}158$ und es war $t^2 = 2{,}25$, alſo iſt $\frac{A^2}{4f^2gk}$

=

$= 27,158 \times 2,25 = 61,1055$ und $\frac{A}{2f\sqrt{gk}} =$
$7,817$. Dies durch $\sqrt{(1+m)} = \sqrt{66,5} = 8,1548$ dividirt giebt 0,9586, und die geſuchte Zeit wird $= 0,9586 \times 0,1322256 = 0,1267$ Secunden. Dieſe Zeit iſt ſo kurz, daß man wohl annehmen kan, ſie werde ohngefehr ſoviel ausmachen, als darüber hingehet, die Bewegung der Kolben in die entgegengeſetzte zu verwandeln, und man kan bey Berechnung der nöthigen Anzahl Kolbenzüge, um eine gegebene Verdünnung der Luft unter der Klocke zuwege zu bringen, nach der Regel des 25 §. Aeroſtat. rechnen. Man findet alsdenn

$$A = 1728000$$
$$B = 26376$$
$$A+B = 1754376$$
$$l\,A+B = 6,2441227$$
$$l\,A = 6,2375437$$
$$l\frac{A+B}{A} = 0,0065790$$

Verlangt man nun eine 800 mahl dünnere Luft als die natürliche iſt, ſo hat man $l\frac{\Delta}{\delta} = 2,9030900$, und dieſer Log. durch jenen dividirt giebt 441, und ſoviel Züge werden erfordert. Die Kurbel braucht $1\frac{1}{2}$ Secunden Umlaufszeit, und muß überdem bey jedem Zuge noch um $\frac{1}{7}$ des Umlaufs weiter rücken, um den Hahn zu drehen. Rechnet man nun hiezu auch noch $\frac{1}{7} \cdot 1,5 = 0,2$ Secunden, ſo erfordert jeder Zug 1,7 Secunden und die ganze Arbeit währet

$441 \times 1,7 = 750$ Secunden, oder $12\frac{1}{2}$ Minuten. Nach der Rechnung des 101 §. ward bey der einfachen Nolletſchen Pumpe eben ſoviel Zeit erfordert, um eben den Effect zu bewürken; alſo wäre bey dieſer doppelten Pumpe gar keine Zeit erſpart. Es würde aber füglich ein ziemlicher Theil haben erſpart werden können, wenn Nollet dabey nicht vorzüglich darauf geſehen hätte, die Mühe der Bearbeitung aufs möglichſte zu erleichtern. Die Hand, welche die Kurbel drehet, hat nach ſeiner Anordnung nur 12 Pf. Widerſtand zu überwinden, da er ihr wohl etwas mehr Widerſtand hätte geben können: allein es ſollte ſeine doppelte Luftpumpe auch für ſolche Perſonen beſtimmt ſeyn, welche der Arbeit ganz und gar nicht gewohnt ſind, und dieſen muſte er ſo wenig Beſchwerde, als möglich war, verurſachen.

103 §.

Nach dieſen Maximen würde man nun die erſten Guerikiſchen und Boyliſchen Pumpen prüfen, und ihren Effect berechnen können, wenn nicht die Nachrichten von ihnen, die ſich in den oben angezogenen Schriften finden, zu mangelhaft wären. Weder Schotte noch Guerike ſelbſt haben die Abmeſſungen der Magdeburgiſchen Pumpen angezeigt: nur von Boylens Pumpe finde ich, daß der Cylinder 3 Zoll weit, und 14 Zoll lang geweſen ſey; (Schotti Technica Curioſa Lib. II. Cap. I. pag. 94.) aber die Abmeſſungen der Kurbel und ihres Trillings ſind nicht angegeben. Eine eben ſo unvollkommene Anzeige finde ich auch bey den übrigen oben angezogenen Schriftſtellern, wenn ſie die ſpäter angegebenen Luftpumpen beſchreiben, nur allein Nollet iſt in dieſem

ſem Stück ſehr genau. Die von Leupolden verfertigte Sengwerdiſche Luftpumpe, welche Hr. v. Wolf in ſeinen nützlichen Verſuchen beſchreibt, hatte einen Cylinder von $4\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmeſſer, und 2 Fuß Länge (a. a. O. 114 S.) die Abmeſſungen der Winde ſind nicht angegeben. Leupold ſelbſt giebt in ſeiner Beſchreibung die Weite des Cylinders zu 4 Zoll die Länge zu $\frac{3}{4}$ Elen Leipziger Maaß an. Hauksbee gab den Cylindern ſeiner doppelten Pumpe 2 Zoll Weite, und 12 Zoll Höhe, wie ich aus der im 74 §. angeführten Nachricht davon erſehe: aber die Anzeige der übrigen Abmeſſungen fehlt. Von Leupolds doppelten Luftpumpe wird nicht einmahl die Gröſſe der Cylinder beſtimmt angegeben.

Ich werde deswegen nun verſuchen, wie weit ſich dasjenige, worauf man bey dem Mechaniſmo einer Luftpumpe zu ſehen hat, auf analytiſche Formuln bringen laſſe, und wie man ſich verhalten müſſe, um bey der Anordnung einer Luftpumpe die vortheilhafteſten Abmeſſungen ausfündig zu machen.

104 §.

Alle Abmeſſungen einer Saug-Luftpumpe ſind gegeben, nebſt der Zeit eines Kolbenzuges: man ſucht die am Kolben nöthige Kraft, die Friction für jetzt noch beyſeit geſetzt.

Aufl. Wenn die äuſſere Grundfläche des Kolbens, da wo die Stange befeſtiget iſt, dem völligen Druck der Atmoſphäre ausgeſetzt iſt, ſo leidet der Kolben nach innen den Druck $= G.c.k.$ Ich behalte aus dem vorhergehenden die Bedeutung der Buchſtaben bey, ſo daß c den Querſchnitt des Cylinders, und G die Dichtigkeit der Atmoſphäre, k

aber die Höhe einer gleichartigen Luftſäule bezeichnet, deren Gewicht eben ſo groß als der Druck der Luft gegen die Fläche c iſt. Wenn nun für einen gewiſſen Augenblick der Zeit t die Dichtigkeit der Luft im Cylinder $=\gamma$ iſt, ſo leidet der Kolben nach auſſen einen Druck $=\gamma ck$, folglich iſt der geſamte Druck nach innen $=(G-\gamma)ck$, und eben ſo groß muß die Kraft ſeyn, welche den Kolben heraus zu ziehen ſtrebt. Aus dem 50 §. würde nun γ gefunden, und durch die Zeit eines Kolbenſpiels ausgedrückt werden können. Wäre dieſe $=t$, die Länge des Zuges $=b$, und die Dichtigkeit der Luft in der Klocke $=\delta$, ſo hätte man $\gamma=n\delta$, und n müſte aus der Gleichung

$$2ft\surd gk=\frac{A}{\surd(1-n)}\;l\frac{A+ncb}{A}$$ gefunden werden (50. 51. §.) Wenn nun gleich n eine beſtändige Gröſſe wäre, ſo würde doch δ veränderlich bleiben, und ſo wie der Kolben fortrückt, abnehmen. Deswegen müſte die Kraft $(G-\gamma)ck$ wachſen, und könnte nicht während des ganzen Zuges einerley bleiben.

Man ſiehet leicht, daß dieſe Veränderlichkeit ſich auf alle folgenden Kolbenzüge erſtrecke, weil δ und γ beſtändig kleiner werden. Wofern die Pumpe ihre Dienſte gehörig leiſtet, ſo müſſen endlich δ und γ beynahe unmerklich werden, ſo daß zuletzt die am Kolben nöthige Kraft $=Gck$ wird. Dieſe Grenze wird nun der Widerſtand des Kolbens, dem die erforderliche Kraft gleich ſeyn muß, eigentlich nie erreichen: wenn man indeſſen die allgemeinen Gründe der Maſchinenlehre hier, ſo gut es ſich thun läſt, anwenden will, ſo iſt man genöthiget, dieſen Widerſtand als beynahe beſtändig zu betrachten. Und

weil

weil man in Fällen von dieſer Art den gröſten Werth des Widerſtandes in Rechnung zu bringen gewohnt iſt; damit man verſichert ſeyn könne, daß die angebrachte Kraft ihn allemahl überwinde, ſo muß man hier dieſen Widerſtand $= Gck$ annehmen.

105 §.

Weil der Stempel an der innern Fläche des Cylinders durchgängig ſehr genau anſchlieſſen muß; ſo iſt hier die Friction ſehr ſtark, und der daher rührende Widerſtand der Bewegung ſehr beträchtlich. Hr. Nollet hat gefunden, daß dieſer Widerſtand 24 Pfund betragen habe, wenn der Stempel ſeiner einfachen Pumpe, die 26 Linien im Durchmeſſer hat, die Länge des Zuges von 1 Fuß in 2 Secunden durchlaufen muſte. Bey gröſſerer Geſchwindigkeit des Stempels würde nun dieſer Widerſtand etwas gröſſer, und bey geringerer Geſchwindigkeit etwas kleiner ſeyn. Uebrigens iſt hier wohl bey einerley Geſchwindigkeit der Widerſtand der Gröſſe der reibenden Fläche proportional: folglich dem Product aus der Höhe des Stempels in den Umfang, oder Durchmeſſer, ſeiner Grundfläche; und bey gleich hohen Kolben dem Durchmeſſer der Grundfläche.

106 §.

Man drücke nun dieſen Widerſtand ebenfalls durch das Gewicht einer gleichartigen Luftſäule auf der Grundfläche c in der Höhe k aus; und nehme die Dichtigkeit dieſer Säule $= \varphi$ an; ſo hat man den Ausdruck φck für die Gröſſe dieſes Widerſtandes. Es ſey dieſer Widerſtand $=$ R, und der Durchmeſ-

ſer des Cylinders $=d$, ſo iſt $c=\frac{1}{4}\pi dd$, und $R=\frac{1}{4}\pi.\varphi.dd.k$. Man ſetze, in einem beſondern Fall ſey dieſer Widerſtand, vermittelſt eines Verſuchs, $=\varrho$ befunden, für einen Kolben, deſſen Durchmeſſer $=\delta$ war, ſo hat man für dieſen Fall $\varrho=\frac{1}{4}\pi.\varphi.\delta\delta.k$, alſo $\varphi=\frac{\varrho}{\frac{1}{4}\pi\delta\delta k}$. Hiedurch wird alſo für dieſen beſondern Fall φ beſtimmt, und ich will dieſen Werth von φ nun $=\psi$ ſetzen, ſo iſt $\varrho=\frac{1}{4}\pi.\psi.\delta\delta.k$. Der Kolben, womit der Verſuch gemacht iſt, habe die Höhe $=\alpha$, und ein andrer Kolben habe die Höhe a, den Durchmeſſer d. Dieſer Kolben werde mit eben der Geſchwindigkeit wie der vorige bewegt, und der von der Friction abhängende Widerſtand ſey $=R$, ſo iſt $\alpha\delta : ad = \varrho : R$, alſo $R=\frac{ad}{\alpha\delta}.\varrho$. Man ſubſtituire nun die obigen Werthe von R und ϱ, ſo hat man $\varphi dd=\frac{ad}{\alpha\delta}.\psi\delta\delta$, folglich $\varphi=\frac{a}{\alpha}.\frac{\delta}{d}.\psi$.

Nun läſt ſich ψ durch den angeführten Nolletſchen Verſuch beſtimmen, wenn man $\delta=26$ Linien, $\varrho=24$ Pf. und $k=26000$ Fuß annimmt. Dies giebt $\psi=\frac{24.72^2}{785.13^2\,26}$, ohngefehr $\frac{1}{30}$ Pfund. Es iſt aber $G=\frac{7}{80}$ bis $\frac{7}{85}$, oder ohngefehr $\frac{1}{12}$ Pf. folglich wird ψ etwa $=\frac{2}{5}G$ angenommen werden können, und man erhält $\varphi=\frac{2}{5}.\frac{a}{\alpha}.\frac{\delta}{d}.G$.

Der Nolletſche Kolben war etwa 26 bis 27 Linien hoch, und hatte 26 Linien im Durchmeſſer, demnach wird $\frac{\delta}{\alpha} = 1$, und $\varphi = \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{d} \cdot G$.

107 §.

Das mechaniſche Moment der Kraft, welche die einfache Luftpumpe in Bewegung ſetzen ſoll, iſt gegeben, man ſucht die Zeit eines Kolbenzuges.

Aufl. Wenn man den Widerſtand des Kolbens $= R$, ſeine Geſchwindigkeit $= \beta$, die angebrachte Kraft $= F$, ihre Geſchwindigkeit $= \alpha$ ſetzt; ſo iſt nach dem allgemeinen Geſetz der Maſchinenlehre $F\alpha = R\beta$. Wegen der am Ende des 105 §. angeführten Gründe nehme man $R = Gck$ an, und ſetze die Zeit eines Kolbenzuges $= t$, alſo $\beta = \frac{b}{t}$, ſo wird

$$F\alpha = \frac{Gcbk}{t}, \text{ und } t = \frac{Gcbk}{F\alpha}.$$

Hiebey iſt nun noch keine Rückſicht auf die Friction des Stempels an der innern Fläche des Cylinders genommen worden, die aber nunmehro den Schlüſſen des vor. §. gemäß leicht in Rechnung gebracht werden kan. Der geſamte Widerſtand des Stempels mit Inbegrif der Friction iſt $= (G + \varphi)ck$; wenn man dieſen nun durch R verſtehet, und den Werth von φ aus dem 106 §. hier braucht, ſo hat man $R = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{d}\right) Gck$. Will man ſich nicht blos auf die Nolletſche Erfahrung allein einſchrän-

ſchränken, ſo kan man η ſtatt $1 + \frac{2}{3}\frac{a}{d}$ ſchreiben, da dann η vermittelſt anderer Verſuche noch näher zu beſtimmen bleibt. Man hat alsdenn $F\alpha = \frac{\eta Gcbk}{t}$, und $t = \frac{\eta Gcbk}{F\alpha}$. Nun kann man F durch eine Menge Luft ausdrücken, die mit der natürlichen einerley Dichtigkeit hat, und deren Gewicht der angebrachten Kraft gleich iſt, ſo iſt dies eben ſo viel, als wenn man $G = 1$ ſetzt, und man hat $t = \frac{\eta cbk}{F\alpha}$. Will man F durch eine Menge Waſſer ausdrücken, deren Gewicht der angebrachten Kraft gleich iſt, ſo wird $t = \frac{\eta cbk}{800F\alpha}$.

108 §.

Wenn die Luftpumpe doppelt iſt, ſo geht die Zeit des Rückzuges nicht umſonſt verlohren: könnte man nun vorausſetzen, daß zum Rückzuge des Stempels entweder gar keine, oder doch nur eine geringe Kraft erfordert würde; ſo lieſſe ſich der Effect der doppelten Pumpe vermittelſt der Formul des vor. §. berechnen, wenn man nachfolgende Schlüſſe damit verbände. Weil $t = \frac{\eta Gcbk}{F\alpha}$ die Zeit eines Kolbenzuges iſt, ſo iſt die Anzahl der Züge, die in der Zeit T erfolgen, $= \frac{T}{t}$, weil die doppelte Pumpe ſo würkt, als wenn bey einer einfachen die Züge unun-

terbrochen nach einander erfolgten. Dieſe Anzahl der Züge ſey $=\nu$, ſo hat man $\nu = \frac{T}{t} = \frac{F\alpha T}{\eta Gcbk}$, und wenn alsdenn δ die Dichtigkeit der Luft unter der Klocke nach Verlauf der Zeit T bedeutet, ſo findet man $\frac{G}{\delta} = \frac{(A+nB)^{\nu}}{A^{\nu}}$ (98 §.), woraus ſich der Effect der Luftpumpe beurtheilen läſt, weil man daraus erſiehet, wie ſtark die Luft in einer Klocke von gegebener Gröſſe in gegebener Zeit, vermittelſt der angebrachten Kraft verdünnt werden könne.

Drückt man nun die gefundene Gleichung ſo aus: $\eta G\nu cb = \frac{F\alpha T}{k}$; ſo hat ſie viel ähnliches mit der Fundamentalgleichung für die Waſſerpumpen (314. 358. 365 §. Hydraul.). Es iſt nemlich cb der Raum des Kolbenzuges, und ηGcb eine flüßige Maſſe von der Dichtigkeit ηG, die dieſen Raum füllet. Wäre die Maſſe unelaſtiſch, ſo wäre $\eta G\nu cb$ diejenige Menge einer ſolchen flüßigen Maſſe, welche die angebrachte Kraft in der Zeit T vermittelſt einer Pumpe auf eine Höhe $=k$ heben könnte.

109 §.

Es bleiben dieſelben gegebenen Stücke, wie im 107 §, man ſucht die Zeit eines Rückzuges.

Aufl. Wenn man die geſamte Kraft, welche den Kolben in den Cylinder wieder hinein treibt, $=K$,

$= K$, und nun die Zeit des Rückzuges $= t$ ſetzt, ſo hat man aus dem 58 §. $K = \frac{4f^2gt^2k}{4f^2gt^2k - c^2b^2} \cdot Gck$. (Ich ſchreibe hier G ſtatt des dortigen γ, weil G die Dichtigkeit der Atmoſphäre bedeutet). Gewöhnlich iſt nun die auswendige Grundfläche des Kolbens, da wo die Stange befeſtiget wird, dem Druck der Atmoſphäre ausgeſetzt, der hier $= Gck$ war, und überdem leidet der Kolben den Druck $\frac{F\alpha}{\beta}$ (107 §.) $= \frac{F\alpha t}{b}$, alſo müſſen beide Preſſungen zuſammen $= K$ ſeyn. Dies giebt $\frac{F\alpha t}{b} + Gck =$ $\frac{4f^2gt^2k}{4f^2gt^2k - c^2b^2} \cdot Gck$, und daraus folgt $\frac{F\alpha t}{b} = \frac{c^2b^2}{4f^2gt^2k - c^2b^2} \cdot Gck$. Die Auflöſung dieſer Gleichung würde nun die geſuchte Zeit t geben.

Man ſetze $\frac{c^2b^2}{4f^2gt^2k - c^2b^2} = \lambda$, ſo wird $F\alpha t =$ $\lambda Gcbk$, und $t = \frac{\lambda Gcbk}{F\alpha}$. In der Zeit T wird alſo die Anzahl der Rückzüge $= \frac{T}{t} = \frac{F\alpha T}{\lambda Gcbk}$, und wenn dieſe $= \nu$ geſetzt wird, ſo hat man $\lambda G\nu cb = \frac{F\alpha T}{k}$, und man kan $\lambda G\nu cb$ als diejenige Men-

ge einer unelaſtiſchen flüßigen Maſſe betrachten, welche die angebrachte Kraft in der Zeit T auf die Höhe k bringen würde, wenn die Dichtigkeit dieſer Maſſe $= \lambda G$ wäre, da dann λ von der Zeit eines jeden Rückzuges abhängt.

Der Widerſtand des Kolbens wäre demnach vermöge dieſer Rechnung $= \lambda Gck$ jedoch mit Beyſeitſetzung der Friction. Um ſie mit in Rechnung zu bringen, kan man dem 106 §. gemäß den daher rührenden Widerſtand des Kolbens $= \varphi ck$ annehmen, ſo iſt ohngefehr $\varphi = \frac{2}{5} . \frac{a}{d} G$. Um aber dieſe Beſtimmung an keine Hypotheſe zu binden, ſey $\varphi = \zeta G$, ſo iſt der geſammte Widerſtand des Kolbens $= (\lambda + \zeta) Gck$, und man muß in den Formuln des vor. §. $\lambda + \zeta$ ſtatt λ ſchreiben, alſo $(\lambda + \zeta) G\gamma cb = \frac{F\alpha T}{k}$ ſetzen.

Die Rechnung im 58 §. ſetzte voraus, daß der Cylinder im Anfang der Bewegung mit Luft von einerley Dichtigkeit mit der äuſſern angefüllt ſey. Wenn alſo die Luftpumpe mit einem Hahn wie die Nolletſche und Graveſandſche, und die Oefnung dieſes Hahns mit einem Ventil verſehen iſt, das der äuſſern Luft den Zugang verſchlieſſet; ſo findet die Gleichung für λ hier nicht ſo ſchlechthin ihre Anwendung. Der Kolben drückt nun die dünnere Luft im Cylinder anfangs zuſammen und zwar ſo weit bis ihre Dichtigkeit die Dichtigkeit der äuſſern Luft zu übertreffen anfängt. Von dieſem Augenblick an findet die Rechnung des 58 §. erſtlich ihre Anwendung, wenn durch b der noch übrige Theil der Lage

 des

des Kolbenzuges verſtanden wird: ſo lange aber noch keine Luft heraus treten kan, würde ihre Bewegung dem 36 und 37 §. gemäß berechnet werden müſſen. Dies ändert ſich aber alles mit jedem folgenden Zuge, ſo daß *b* bey jedem folgenden Zuge kleiner als beym vorhergehenden angenommen werden müſte. Auf eine ſo umſtändliche Rechnung aber kan man ſich hier ſchwerlich einlaſſen, die auch um ſo weniger nöthig iſt, weil man es auch ſonſt bey andern Maſchinen fürs ſicherſte hält, den Widerſtand aufs höchſte in Anſchlag zu bringen.

110 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer einfachen Luftpumpe anzugeben, wenn ſie, wie hier allemahl gewöhnlich iſt, durch eine, oder höchſtens zwey Perſonen in Bewegung geſezt werden ſoll.

Aufl. Man kan anfangs die Sache ſo betrachten, als wenn alle Kolbenzüge ununterbrochen in der Zeit T und hiernächſt auch alle Rückzüge nach einander in der Zeit Θ erfolgten, ſo iſt die Zeit, welche während der ganzen Arbeit verflieſt, $= T + \Theta$. Die Zeit eines Zuges ſey $= t$, die Zeit eines Rückzuges $= \vartheta$, und man ſchreibe B ſtatt *cb*, ſo hat man die beyden Hauptgleichungen

1) für die Kolbenzüge $\eta GB = \frac{F\alpha t}{k}$ (107 §.)

2) Für die Rückzüge $(\lambda + \zeta) GB = \frac{F\alpha\vartheta}{k}$ (109 §.)

und die Zahl $\nu = \frac{T}{t} = \frac{\Theta}{\vartheta} = \frac{T+\Theta}{t+\vartheta}$ (178 §.

Geom.) iſt für beyde einerley. Man nehme $S = T + \Theta$, und $\Theta = \varepsilon T$ an, ſo iſt $S = (1+\varepsilon)T$, alſo 3) $v = \frac{S}{(1+\varepsilon)t} = \frac{\varepsilon T}{\vartheta} = \frac{\varepsilon S}{(1+\varepsilon)\vartheta}$, und 4) $\vartheta = \varepsilon t$. Ferner hat man 5) $l\frac{G}{\delta} = v\, l\frac{A+nB}{A}$, und wenn noch 6) $L = \text{log. nat.}\ \frac{A+nB}{A}$ angenommen wird, ſo iſt 7) $n = 1 - \frac{A^2L^2}{4f^2t^2gk}$, (98 §.) wo f die Oefnung bedeutet, durch welche die Luft aus der Klocke in den Cylinder tritt. Setzt man ferner die Oefnung, durch welche die Luft aus dem Cylinder heraustreten muß, $= h$, ſo giebt ſich 8) $\lambda = \frac{B^2}{4gh^2\vartheta^2k - B^2}$ (109 §.) Man hat demnach acht Gleichungen, und die Gröſſen $F, \alpha, k, G, \eta, \zeta$, ſind allemahl als gegeben anzuſehen. Von folgenden dreyen $S, A, \frac{G}{\delta}$, kan man noch zwey als gegeben betrachten, und es ſcheint am natürlichſten zu ſeyn, daß man A und $\frac{G}{\delta}$ als gegeben betrachtet: je kürzer alsdenn die Zeit $S = T + \Theta$ iſt, worin die Luft in einer Klocke von gegebener Gröſſe $= A$ bis zu einem gegebenen Verhältniß gegen die natürliche Luft verdünnt werden kan, deſto beſſer iſt die Luftpumpe. Ueberdem ſind nun noch folgende Gröſſen $B, v, \varepsilon, t, n, L, f, \lambda, h, \vartheta$, unbeſtimmt, zuſammen eilf, wenn S mitgerechnet wird. Hievon werden

acht durch obige Gleichungen beſtimmt, und drey kan man willkührlich annehmen. Die Rechnung ſelbſt wird alsdenn am bequemſten ſo geführt.

Weil B $= c . b$ war, und $\frac{b}{t}$ die Geſchwindigkeit des Kolbens iſt, ſo ſetze man dieſe $= \beta$, und man hat $b = \beta t$, oder $t = \frac{b}{\beta}$. Man ſiehet aber wohl, daß es nicht vortheilhaft ſey, wenn die Bewegung des Kolbens ſehr ſchnell iſt, denn man weis aus dem obigen, daß bey jedem Zuge deſto weniger Luft in den Cylinder trete, je ſchneller ſich der Kolben bewegt: und überdem iſt auch die Friction bey ſchnellerer Bewegung des Kolbens ſtärker, als wenn derſelbe nur langſam fortrückt. Deswegen kan man am füglichſten β willkührlich, und zwar ſo annehmen, daß dieſe Geſchwindigkeit nicht über $\frac{1}{2}$ Fuß in einer Secunde ausmacht. Die äuſſerliche Einrichtung, welche man der Pumpe geben will, wird auch b einigermaſſen beſtimmen. Ja wenn man ſie mit einer Druckſtange nach Art der beyden neuern Guerikiſchen, oder der doppelten Leupoldſchen verſehen wollte, ſo wäre b durch β, α, und die Tiefe beſtimt, um welche die arbeitenden Perſonen das Ende der angegriffenen Druckſtange niederdrücken können. Iſt dieſe Tiefe $= w$, ſo wird $b = \frac{\beta}{\alpha} w$, und dies beſtimmt alsdenn $t = \frac{b}{\beta}$. Demnach iſt nun B $=$ $c . b = \frac{F \alpha t}{\eta G k}$ beſtimmt, und wenn der Durchmeſſer

des Cylinders $= d$ geſetzt wird, ſo hat man $c = \frac{1}{4}\pi dd$ $= \frac{F\alpha t}{\eta G b k}$, alſo $d = \sqrt{\frac{4 F \alpha t}{\pi \eta G b k}} = \sqrt{\frac{4B}{\pi b}}$. Ueberdem weiß man, daß es vortheilhaft ſey, wenn n ſehr wenig kleiner als 1 iſt, alſo kan man auch n dieſem gemäß willkührlich annehmen, ſo giebt ſich L aus der Gleichung n. 6. und $f = \frac{A.L}{2t\sqrt{(1-n)gk}}$ aus der Gleichung n. 7. Alsdenn iſt in der Gleichung n. 5. auch v beſtimmt, und weil man noch eine dritte Gröſſe willkührlich annehmen kan, ſo wird man von ſelbſt dahin geleitet werden, ϑ zu wählen, weil ϑ ſchon durch die Einrichtung der Maſchine und die angebrachte Kraft gewiſſermaſſen beſtimmt iſt. Denn vorhin iſt $\beta = \frac{b}{t}$ ſchon beſtimmt, alſo auch $\frac{\alpha}{\beta}$. Sollen nun F und α beym Rückzuge eben die Werthe wie beym Kolbenzuge ſelbſt behalten, ſo muß $\frac{b}{\vartheta} = \beta = \frac{b}{t}$, alſo $\vartheta = t$ ſeyn. Wenn aber F und α beym Rückzuge anders ausfallen, ſo wird zwar nicht $\vartheta = t$, aber ϑ wird doch durch F, α, und die ſchon feſtgeſetzte Einrichtung der Maſchine beſtimmt. Dadurch werden in den Gleichungen n. 2. n. 4. und n. 3. auch λ, ε, und S beſtimmt, da dann aus der achten Gleichung $h = \frac{B}{2\vartheta}\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda g k}}$ gefunden wird. Obige acht Gleichungen ſind alſo unter folgender Form zur Rechnung am brauchbarſten:

1) $B = \frac{F\alpha t}{\eta G k}$

2) $\lambda = \frac{F\alpha\vartheta}{GBk} - \zeta$

3) $S = (1+\varepsilon)\nu t$

4) $\vartheta = \varepsilon t$

5) $l\frac{G}{\delta} = \nu\, l\frac{A+nB}{A}$

6) $L = \text{log. nat.}\frac{A+nB}{A}$

7) $f = \frac{A.L}{2t\sqrt{(1-n)gk}}$

8) $h = \frac{B}{2\vartheta}\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda gk}}$

Uebrigens iſt noch $B = c.b$ und der Durchmeſſer des Cylinders $d = \sqrt{\frac{4B}{\pi b}}$. Dieſen Durchmeſſer kan man zuerſt in der Vorausſetzung $\eta = \frac{7}{5}$ berechnen, und wenn man hiernächſt ſiehet, daß die Höhe des Kolbens füglich kleiner als ſein Durchmeſſer ſeyn kan, ſo ſetzt man nun $\eta = 1 + \frac{2}{5}\frac{a}{d}$, und wiederhohlt die Rechnung, ſo wird d noch etwas gröſſer, als vorhin gefunden werden, welches allemahl vortheilhaft iſt, wenn die Pumpe zum Verdünnen dienen ſoll.

111 §.

Um dieſe Rechnung durch die Anwendung auf ein Beyſpiel zu erläutern, will ich annehmen, man wollte eine einfache Luftpumpe ſo wie die Nolletſche anordnen. In ſolcher Abſicht erwege man zuförderſt, daß ein Menſch, welcher den Fußtritt dieſer Pumpe niedertritt, gar wohl mit einer Gewalt von 80 Pfunden und darüber in denſelben würke, wenn derſelbe nicht zu ſchnell, und etwa nur $\frac{1}{2}$ Fuß in einer Secunde ſinkt. Man kan alſo wohl annehmen, daß

F

F ſo groß ſey, als das Gewicht von $\frac{5}{4}$ Cubicfuß Waſſer, wenn gleich franzöſiſch Maaß verſtanden, und ein Cubicfuß Waſſer 70 Pf. ſchwer geſchätzt wird. Wenn demnach die Luft 800 mahl leichter als Waſſer angenommen wird, ſo hat man $F = \frac{5}{4} . 800 . G = 1000 G$, und $F\alpha = 500 G$, weil $\alpha = \frac{1}{2}$ angenommen wird. Hier iſt nun $\beta = \alpha$, alſo $\beta = \frac{1}{2}$, und weil b vermöge der Einrichtung der Pumpe ohngefehr = 1 Fuß ſeyn muß, ſo wird $t = \frac{b}{\beta} = 2$ Secunden.

Dies giebt $B = \frac{1000}{26000} . \frac{5}{7} = \frac{5}{182}$ Cub. Fuß $= \frac{5 . 1728}{182}$ oder 47,4725 Cubic. Zoll, alſo $\frac{B}{b} = \frac{47,4725}{12} = 3,956$ Quadr. Zoll oder 570 Quadr. Linien. Dies mit $\frac{4}{\pi} = \frac{14}{11}$ multiplicirt giebt 725, und die Quadratwurzel davon iſt = 27 Linien = d. Nollet giebt ſeiner einfachen Pumpe 26 Linien im Durchmeſſer, alſo faſt eben ſoviel, als vermittelſt der vorgetragenen Rechnung gefunden werden. Weil man nun der Höhe des Kolbens auch nicht viel weniger, als 27 Linien geben kan, ſo bedarf der Werth $\eta = \frac{7}{5}$ keiner Berichtigung.

Nun nehme man $n = 0,95$ an, ſo wird $nB = 45,1$ Cub. Zoll. Die gröſte Klocke zu Hr. Nollets Pumpe faſſet ohngefehr 1000 Cub. Zoll, alſo wird $\frac{A + nB}{A} = 1,0451$, und hievon iſt der Brigg. Logarith-

garithme = 0,0191578, alſo der natürliche Logarithme = 0,044111 = L. Dies giebt $f =$

$$\frac{44,111}{4 \cdot 12\sqrt{0,05} \cdot 15,1 \cdot 26000} = \frac{44,111}{4 \cdot 12\sqrt{5} \cdot 151 \cdot 26}$$

Quadr. Zoll $= \frac{44,111 \cdot 3}{140} = 0,945236$ Quadratlinien; und weil dieſe Oefnung gewöhnlich kreisförmig iſt, ſo wird ihr Durchmeſſer = 1,1 Linie.

Man kan von einer guten Luftpumpe verlangen, daß ſie die Luft 1000mahl verdünne. Deswegen nehme man $\frac{G}{\delta} = 1000$ an, ſo iſt $l\frac{G}{\delta} = 3$, und weil $l\frac{A+nB}{A} = 0,0181698$ war, ſo wird $\gamma =$ $\frac{30000000}{191578} = 156$. Was nun die noch übrige Rechnung für die Rückzüge betrift, ſo muß man erwegen, daß wegen der beſondern Anordnung der Nolletſchen Pumpe, wobey der Stempel mit der Hand wieder herauf gezogen werden muß, die Kraft F nicht eben ſo groß, als vorhin angenommen werden könne, wenn man die Gleichung n. 2. hier anwenden will. Man darf F nicht viel über 25 Pf. ſchätzen, wenn $\alpha = 2$ Fuß iſt; weil aber hier keine ſo gar ſchnelle Bewegung nöthig, und hier $\alpha = \frac{b}{\vartheta}$ iſt; ſo kan man $\alpha = 1$ Fuß, folglich $\vartheta = 1$ Secunde annehmen, und alsdenn wird es nicht zuviel ſeyn, wenn man F = 30 Pf. annimmt, welches das Gewicht von ohngefehr ½ Cubic-Fuß Waſſer iſt. Soviel wird wohl mehrentheils

rentheils erfordert werden, wofern nach Hr. Nollets Beobachtung auf 24 Pf. allein zur Ueberwindung der Friction nöthig ſind. Man ſetze dieſemnach $F = \frac{3}{7} . 800 . G = 343\, G$, ſo wird $(\lambda + \zeta) B = \frac{343}{26000}$, und $\lambda + \zeta = \frac{343}{26000} . \frac{182}{5} = 0{,}48$. Weil nun $\zeta = 0{,}4$ angenommen werden kan (109 §.) ſo wird $\lambda = 0{,}08$, alſo $\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} = 3{,}674$, und die Gleichung n. 8. giebt $k = \frac{47{,}4725 . 3{,}674}{2 . 12 \sqrt{151 . 2600}}$ Quadr. Zoll $= \frac{47{,}4725 . 3{,}674 . 3}{313{,}3} = 1{,}7$ Quadratlinien, und der zugehörige Durchmeſſer iſt $= 1{,}48$ Linien.

Endlich hat man $\frac{\vartheta}{t} = \frac{1}{2} = \varepsilon$, und es wird $S = (1+\varepsilon) v t = 1{,}5 . 156 . 2 = 468$ Secunden, oder $7\frac{4}{5}$ Minuten. Dies würde die nöthige Zeit ſeyn, wenn die jedesmahl erforderliche Umdrehung des Hahns keine Zögerung verurſachte. Wegen dieſer Zögerung aber muß man auf jeden Zug und Rückzug zuſammen wohl eine Secunde mehr rechnen, und ſo findet man die Zeit $S = 10$ Minuten.

Wollte man die Pumpe mit der Fuhrmannswinde, wie die Boyliſche und Sengwerdiſche, verſehen, ſo könnte man F höchſtens nur auf $\frac{1}{4}$ Cubicfuß Waſſer, und α etwa 2, oder $2\frac{1}{2}$ Fuß rechnen, wodurch zugleich β beſtimmt iſt, wenn das Verhältniß des Kurbelbugs zum Halbmeſſer des Sternrades oder Trillings, nemlich $\frac{\alpha}{\beta}$ willkührlich angenommen wird. Weil die Beſchäftigung mit der Luftpumpe keine

keine ermüdende Arbeit ſeyn ſoll, ſo ſcheint es am beſten zu ſeyn, wenn F nicht über 18 Pf., alſo etwa $= \frac{1}{4}$ Cub. Fuß angenommen wird.

112 §.

Die Abmeſſungen einer doppelten Luftpumpe ſind gegeben, und das mechaniſche Moment der Kraft, welche ſie in Bewegung ſetzt: man ſucht die Zeit eines Kolbenzuges.

Aufl. Weil binnen der Zeit, da der eine Kolben die Luft aus der Klocke heraus zieht, der andre die in den andern Cylinder beym vorigen Zuge hineingetretene Luft heraus treibt, ſo widerſtehen hier beide Kolben allemahl zugleich der Bewegung der Maſchine. Der Widerſtand deſſen, welcher jetzt die Luft aus der Klocke zieht, iſt $= \eta Gck$ (105. 106 §.), der Widerſtand des andern aber $= (\lambda + \zeta) Gck$ (108 §.), folglich wird der geſamte Widerſtand $= (\eta + \lambda + \zeta) Gck$. Die Geſchwindigkeit der Kolben iſt nun $= \frac{b}{t}$, wenn b wie bisher die Länge des Zuges, und t die Zeit eines Kolbenzuges bedeutet, alſo muß $(\eta + \lambda + \zeta) Gck \times \frac{b}{t} = F\alpha$ ſeyn, wenn F die Kraft, und α ihre Geſchwindigkeit bedeutet, und man hat $t = \frac{(\eta + \lambda + \zeta) Gcbk}{F\alpha}$.

Uebrigens hat man $\lambda = \frac{c^2 b^2}{4h^2 gt^2 k - c^2 b^2}$ (109 §.), da dann durch h diejenige Oefnung verſtanden werden muß, durch welche die Luft aus dem Cylinder

heraus

heraus bläſet, und beide Gleichungen zuſammen beſtimmen die geſuchte Zeit t.

Ich bemerke hiebey, daß λ durch die gegebene Formul alsdenn beſtimmt werde, wenn der Cylinder gleich vom Anfang der Bewegung des zurücktretenden Kolbens mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllt iſt, wie die Rechnung des 58 §. vorausſetzt. Iſt die Oefnung, wie bey den Nolletſchen und Graveſandſchen Pumpen, mit einem Ventil verſehen, ſo weiß man ſchon aus dem 109 §, daß der Widerſtand würklich nicht ſo groß iſt, als er nach dieſer Formul gefunden wird. Wegen der eben daſelbſt angeführten Gründe kan man indeſſen dieſe Formul beybehalten. Eben dieſe Anmerkung findet ihre Anwendung, wenn die Kolben mit Ventilen verſehen ſind, durch welche die Luft heraus treten muß.

113 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer doppelten Luftpumpe anzugeben.

Aufl. Man muß erwegen, daß hier ein Theil der angebrachten Kraft erfordert werde, den einen Kolben aus ſeinem Cylinder herauszuziehen, und der übrige Theil darauf verwandt werde, den andern Kolben binnen eben der Zeit in ſeinen Cylinder hinein zu treiben. Jener Theil ſey V, dieſer $= W$, ſo hat V den Widerſtand ηGck, und W den Widerſtand $(\lambda + \zeta) Gck$ zu überwinden. Weil nun α für beide Kräfte einerley iſt, und beide Kolben gleich ſchnell bewegt werden, ſo ſind dieſe Kräfte dem Widerſtand proportional, den ſie überwinden müſſen, und man hat $V : W = \eta : \lambda + \zeta$, alſo $V + W : V = \eta + \lambda + \zeta : \eta$, und $V + W : W = \eta + \lambda + \zeta : \lambda + \zeta$. Es

iſt

iſt aber $V+W=F$, wenn F die bisherige Bedeutung behält, alſo $V=\frac{\eta F}{\eta+\lambda+\zeta}$, und $W=\frac{(\lambda+\zeta)F}{\eta+\lambda+\zeta}=\left(1-\frac{\eta}{\eta+\lambda+\zeta}\right)F$. Nun hat man eben ſo, wie im 110 §, erſtlich die Gleichung $\eta Gck.\frac{b}{t}=V\alpha$, oder $G.B.k=\frac{F}{\eta+\lambda+\zeta}.\alpha t$, wenn wie bisher $cb=B$ und $\frac{\eta F}{\eta+\lambda+\zeta}$ ſtatt V geſetzt wird. Ueberdem finden aus dem 110 §. die Gleichungen n. 5, n. 6, n. 7. und n. 8. hier ebenfalls ihre Anwendung, mit dem Unterſcheid, daß ϑ hier mit t einerley iſt. Wird endlich die Zeit $=T$ geſetzt, worin die Luft unter der Klocke ſo weit verdünnt wird, daß ihre Dichtigkeit δ wird, die anfangs $=G$ war, ſo hat man nun $T=\nu t$. Hier werden alſo folgende ſechs Gleichungen zur Richtſchnur dienen:

1) $(\eta+\lambda+\zeta)GBk=F\alpha t$.

2) $l\frac{G}{\delta}=\nu.l\frac{A+nB}{A}$.

3) $T=\nu t$.

4) $L=\log.\text{nat}.\frac{A+nB}{A}$.

5) $f=\frac{A.L}{2t\sqrt{(1-n)gk}}$.

6) $h=\frac{B}{2t}\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda gk}}$.

Uebrigens iſt $B=cb$, und $d=\sqrt{\frac{4B}{\pi b}}$, und man kan die Geſchwindigkeit des Kolbens $\beta=\frac{b}{t}$ nebſt

b willkůhrlich annehmen, ſo iſt $t = \frac{b}{\beta}$ beſtimmt. Ferner iſt es vortheilhaft, daß λ ſo klein, als die Umſtände zulaſſen, ausfalle, denn deſto gröſſer wird $B = \frac{F\alpha t}{(\eta + \lambda + \zeta)Gk}$, folglich v deſto kleiner, und die Zeit T deſto kürzer. Deswegen nehme man λ willkůhrlich an, ſo iſt B und zugleich h beſtimmt: wenn man alsdenn noch n willkůhrlich nimmt, ſo iſt v, T und L nebſt f beſtimmt.

114 §.

Wenn man nun die Anordnung einer doppelten Luftpumpe etwa ſo wie die Haukſbeeſche, oder die Nolletſche, angeben wollte; ſo würde es nur darauf ankommen, F und α ſo anzunehmen, daß man einmahl der Perſon, welche die Pumpe brauchen ſoll, nicht zu viel zu thun giebt, und doch auch auf der andern Seite die Verdünnung bald möglichſt zu beſchleunigen ſucht. Hr. Nollet rechnet auf die Perſon, welche die Kurbel an ſeiner doppelten Pumpe bewegen ſoll, nur 12 bis 16 Pf. Kraft, und daher hat er ſeinen Cylindern nur 20 Linien im Durchmeſſer gegeben. Hiſtoire de l'Acad. de Paris A. 1740. pag. 571. ed. Gall. Wenn man dieſe Kraft auf 25 bis 26 Pf. ſchätzt, ſo rechnet man die Geſchwindigkeit der Kraft nur auf 2 Fuß: mir iſt es bey verſchiedenen Proben dieſer Art ſo vorgekommen, daß eine etwas gröſſere Geſchwindigkeit eben noch nicht beſchwerlich, ja vielleicht für die arbeitende Perſon noch bequemer ſey, wenn ſie dabey nur etwas weniger Druck auszuüben hat. Ich will alſo die Kraft

nur auf 18 Pfund, als das Gewicht von ohngefehr $\frac{1}{4}$ Pariſer Cub. Fuß Waſſer, und die Geſchwindigkeit α auf $2\frac{1}{2}$ Fuß in Anſchlag bringen, ſo wird $F\alpha = \frac{5}{8}.800.G$. Bey der Nolletſchen Pumpe iſt das Verhältniß $\alpha:\beta = 5\frac{3}{4}:1 = 23:4$, weil binnen der Umlaufszeit der Kurbel von $5\frac{1}{2}$ Zoll im Halbmeſſer der Stempel um 6 Zoll fortrückt. Ich will dafür $\alpha:\beta = 6:1$ annehmen, weil die Kurbel gar wohl ein wenig länger ſeyn kan, ſo wird $\beta = \frac{2\frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{12}$ Fuß; und weil die Länge des Zuges $b = \frac{1}{2}$ Fuß iſt, ſo hat man $t = \frac{b}{\beta} = \frac{6}{5}$ Secunden. Um nun B zu berechnen, muß man vorläufig einen Werth von η und ζ annehmen, welcher der Beſchaffenheit der Kolben gemäß iſt, die man brauchen will. Die Nolletſchen Kolben bey der doppelten Pumpe ſind nur 14 Linien hoch. Wenn alſo d auf 28 Linien ausfallen ſollte, ſo wäre hier $\frac{a}{d} = \frac{1}{2}$, alſo $\eta = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$, und $\zeta = \frac{1}{5}$, folglich $\eta + \zeta = \frac{7}{5}$. Damit nun λ ziemlich klein ausfalle, nehme man $\lambda = \frac{1}{100}$, ſo wird $\eta + \lambda + \zeta = \frac{141}{100}$, und man erhält B =

$$\frac{100}{141} \cdot \frac{500.1,2}{26000} = \frac{5.6}{13.141} = \frac{30}{1833} \text{ Cub. Fuß},$$

alſo $d = 144\sqrt{\frac{14}{11}\cdot\frac{60}{1833}} = 29,23$ Linien, oder faſt $2\frac{1}{2}$ Zoll. Die Werthe von η und ζ bedürfen demnach keiner Berichtigung, und wenn man noch $n = 0,99$ und den Raum A wie bey der einfachen Nolletſchen Pumpe von 1000 Cubic-Zoll annimmt, ſo

wird $B = 27,976$ Cub. Zoll, $nB = 27,696$, und $\frac{A+nB}{A} = 1,027696$. Ferner iſt $l\frac{A+nB}{A}$ $= 0,0118648$, und wenn $\frac{G}{\delta} = 1000$ ſeyn ſoll, ſo wird $\nu = \frac{3000000}{118648} = 253$, folglich $T = 253 \cdot 1,2 = 5$ Minuten 4 Secunden. Bey der einfachen Nolletſchen Pumpe trägt die Zeit, welche zu eben ſo ſtarker Verdünnung der Luft in einer eben ſo groſſen Klocke erfordert wird, wegen der Zögerungen bey Umdrehung des Hahns auf 10 Minuten aus, wie die Rechnung im 111 §. ausweiſet: alſo wäre hier die Hälfte der Zeit gewonnen.

Man ſuche nun noch $L = 2,30258 \cdot 0,0118684 = 0,0271813$, ſo wird $f =$

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{27,1813 \cdot 144}{12\sqrt{0,01 \cdot 15,1 \cdot 26000}} = \frac{5 \cdot 27,1813}{\sqrt{151 \cdot 26}}$$

$= 2,1676$ Quadratlinien, und der zugehörige Durchmeſſer iſt $1\frac{2}{3}$ Linien. Noch erhält man $\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}}$ $= 10,05$, $\sqrt{gK} = 626,6$, alſo $\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda gk}} =$ $\frac{1005}{62660}$, und $h = \frac{5}{12} \cdot \frac{30 \cdot 20736}{1853} \cdot \frac{1005}{62660}$ $= 2,243549$ Quadratlinien, den zugehörigen Durchmeſſer aber $= 1,7$ Linien.

115 §.

Wollte man ſich die Graveſandſche, oder auch die Leupoldſche Anordnung bey Verfertigung einer doppelten

pelten Luftpumpe zum Muſter dienen laſſen, ſo würden die nöthigen Abmeſſungen ebenfals vermittelſt der Formuln des 113 §. leicht gefunden werden. Die gleicharmige Druckſtange, welche hier ſtatt der Kurbel gebraucht wird, kan die Länge von 2 Fuß, alſo jeder Arm die Länge von 1 Fuß nicht wohl viel übertreffen: und der Winkel welchen ſie bey jedem Kolbenzuge durchläuft, kan höchſtens 120° betragen. Ja bey der Leupoldſchen Pumpe dürfte dieſer Winkel kaum 90° betragen können, damit der Druck und Zug der Kolbenſtangen, wenn die Kolben ſich der höchſten und niedrigſten Stelle nähern, nicht gar zu ſchräge ausfalle. Dieſe Umſtände ſind zu erwegen, wenn man bey der Graveſandſchen den Halbmeſſer des Rades, und bey der Leupoldſchen Pumpe den Abſtand der Kolbenſtange von der Mitte der Bewegungsaxe feſtſetzen will, um ſowohl die Länge des Zuges b, als auch das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ zu beſtimmen.

116 §.

Uebrigens wird man bey der bisherigen Unterſuchung ſchon von ſelbſt die Anmerkung gemacht haben, daß es die Bearbeitung der Pumpe nicht allein erleichtere, ſondern auch die Verdünnung der Luft beſchleunige, wenn die Oefnungen, durch welche die Luft hindurch gehen muß, ihre gehörige Weite haben. Je langſamer die Bewegung der Kolben iſt, deſto kleiner können dieſe Oefnungen ſeyn: bey ſchnellerer Bewegung der Kolben aber wird etwas mehr Weite dieſer Oefnungen erfordert. Vornemlich iſt dieſer Umſtand wichtig, wenn Klocke und Cylinder durch ziemlich lange Verbindungsröhren zuſammen hän-

hängen. Durch dergleichen lange und dabey enge Röhren ſtreicht die Luft ſchon für ſich langſamer hindurch, als durch kurze und etwas weitere Röhren (23 §.), und überdem ſtehen der Luft deſto mehr äuſſerliche Hinderniſſe der Bewegung wegen der Friction und allerley grober und feuchter Dünſte entgegen, je länger und enger die Röhren ſind. Dieſen Umſtand hat man ſonſt nicht allemahl in Acht genommen, man hat vielmehr aus einer andern Urſache die Verbindungsröhren ſehr eng gemacht, wenn ſtatt der Ventile die Hähne gebraucht würden. Es muß nemlich zwiſchen dem Boden des Stiefels und dem Hahn ſo wenig Raum bleiben als möglich iſt, und dies aus der im 19 §. Aeroſtat. ſchon angeführten Urſache. Zwiſchen dem Stempel wenn er am Boden des Stiefels anſchließt, und dem Hahn bleibt nun doch wenigſtens ein Raum ſo weit als die Verbindungsröhre, und ſo lang als der Boden des Stiefels dick iſt; und weil man dieſen Raum nicht mehr verkürzen könnte, ſo ſuchte man ihn noch durch die Verengerung zu vermindern. Allein Nollet fordert mit Recht, daß er wenigſtens eine ganze Linie weit bleiben ſoll, und man ſiehet nun, daß die Nolletſchen Erinnerungen, die dieſen Umſtand betreffen, ſehr gegründet ſind. M. ſ. die Hiſtoire de l'Acad. A. 1740. p. 410. 411 in 4. Hr. Nollet macht deswegen mit Recht die Verbindungsröhre $1\frac{1}{2}$ Linien weit, und damit er ihre Länge auf 5 bis 6 Zoll einſchränken könne, hat er die umgekehrte Stellung der Cylinder erwählt, ſo daß ſie ihre Oefnung, durch welche die Kolbenſtange hindurch gehet, unten haben: denn nun konnte er den Teller mit der Klocke ganz nahe oberhalb der Cylinder anbringen. Bey der Hauksbeeſchen und Graveſand-

veſandſchen Pumpe ſind die Verbindungsröhren ziemlich lang, bey der doppelten Leupoldſchen etwas kürzer. Bey der Smeatonſchen Pumpe ſind dieſe Röhren ebenfals nicht ſo ganz kurz, und dieſe Luftpumpe unterſcheidet ſich wegen ihrer beſondern Einrichtung noch in verſchiedenen Stücken von andern einfachen Luftpumpen: deswegen werde ich nun die oben vorgetragene Theorie noch auf dieſe Art der einfachen Pumpen beſonders anwenden.

117 §.

Die Abmeſſungen einer Luftpumpe, die wie die Smeatonſche angeordnet iſt, ſind gegeben, nebſt der Zeit eines Kolbenzuges: man ſucht die an der Kolbenſtange nöthige Kraft um den Kolben herauf zu ziehen.

Aufl. Man muß ſich aus der im 85 und 86 §. mitgetheilten Beſchreibung erinnern, daß der Kolben bey jedem Zuge zweyerley zugleich leiſte. Indem derſelbe in die Höhe gewunden wird, zieht er nicht allein die Luft aus der Klocke heraus, ſondern er treibt auch zugleich die beym vorigen Rückzuge über ihn hinaufgetretene Luft aus dem Cylinder durch die Röhre PQ bis zum Hahn, und durch denſelben hinaus in die freye Luft. Um nun den Widerſtand zu finden, welchen der Kolben beym Hinaufſteigen überwinden muß, erwege man zuerſt, daß nicht der ganze Kolben, wie bey andern einfachen Pumpen, ſondern nur ein Theil ſeiner Grundfläche ſo groß als die Querſchnitte der Stempelſtange, dem Druck der äuſſern Luft ausgeſetzt ſey, und dies deswegen, weil der Cylinder oben mit einem Deckel verſchloſſen iſt. Wenn demnach der Inhalt eines ſolchen Quer- 50 Fig.

ſchnitts $=e$ geſetzt wird, ſo iſt der Druck der äuſſern Luft der Bewegung des Stempels entgegen $= Gek$. Die im Cylinder zwiſchen ſeinem Deckel und dem Kolben befindliche Luft drückt nun gegen den übrigen Theil der Grundfläche des Kolbens, oder den Ring, welcher die Stempelſtange umgiebt. Wenn, wie bisher, c die innern Querſchnitte des Cylinders bedeutet, ſo iſt der erwehnte Ring $=c-e$. Ueberdem ſey die Ventil-Oefnung bey R, durch welche die Luft hindurch gehen muß, $=m$, ſo läſt ſich der Widerſtand dieſer innern Luft, die über dem Kolben ſtehet, dem 58 §. gemäß finden. Doch wäre zuförderſt hiebey zu erwegen, daß hier das Ventil bey R eben die Dienſte thut, wie das Ventil, welches die Oefnung des Hahns bey der Graveſandſchen und Nolletſchen Pumpe ſchlieſſet. Wenn dies Ventil fehlte, ſo wäre der Widerſtand der innern Luft gegen den Kolben $= \frac{4m^2gt^2k}{4m^2gt^2k - c^2b^2} . G(c-e)k$. Wegen der Dienſte, die das Ventil leiſtet, iſt er nun freylich kleiner, und wird beſtändig geringer, je länger man die Arbeit fortſetzt. Doch iſt er am Ende eines jeden Zuges gewiß wenigſtens $=G(c-e)k$, und würklich noch etwas gröſſer. Weil nun der Factor $\frac{4m^2gt^2k}{4m^2gt^2k - c^2b^2}$ die Einheit allemahl nur wenig übertrift, ſo wird es nicht viel gefehlt ſeyn, wenn man durch einander gerechnet, den Widerſtand dem 58 §. gemäß annimmt. Um abzukürzen, ſetze man den Factor $\frac{4m^2gt^2k}{4m^2gt^2k - c^2b^2}$ =

$=\omega$, ſo iſt der geſamte Druck gegen den Kolben der Richtung ſeiner Bewegung entgegen $=$ $Gek + \omega G(c-e)k$. Die zwiſchen dem Boden des Stiefels und dem Kolben befindliche Luft drückt denſelben aufwärts mit einer Gewalt $=\gamma ck$, und γ müſte ſo, wie im 105 §. gefunden, alsdenn aber von dem vorhin gefundenen Druck abgezogen werden. Die eben daſelbſt angeführten Gründe aber werden es auch hier rechtfertigen, wenn ich dieſen aufwärts gerichteten Druck, der bey jedem folgenden Zuge geringer, und zuletzt ganz unmerklich wird, nicht mit in Rechnung bringe. Statt deſſen aber komt nun zu dem Widerſtande, welchen der Druck der Luft verurſachet, noch derjenige hinzu, welcher von der Friction des Kolbens an der innern Fläche des Cylinders abhängt, und der obigen Bezeichnung gemäß $=\zeta Gck$ geſetzt werden kan. Ja dieſe Friction iſt es nicht allein, worauf hier Rückſicht genommen werden muß: es entſteht auſſerdem noch eine andre zwiſchen dem cylindriſchen Theil der Stempelſtange, und dem ledernen Deckel des Cylinders. Hier ſoll wegen der beſondern Einrichtung dieſer Pumpe ebenfalls alles luftdicht ſeyn, und um deswillen der lederne Ring um die Stange recht feſt anſchlieſſen: alſo kan hieſelbſt die Friction nicht geringer ſeyn, als ſie ſeyn würde, wenn noch ein zweyter Kolben, deſſen Durchmeſſer der Dicke der Stange, und deſſen Höhe der Dicke des ledernen Ringes gleich wäre, mit dem Kolben im Cylinder zugleich in einerley Bewegung geſetzt werden ſollte. Weil nun e den Querſchnitt der Oefnung des ledernen Ringes bedeutet, ſo kan dieſe Friction $=\zeta' Gek$ geſetzt, und alsdenn ζ' nach den Regeln des 109 §. beſtimmt wer-

den. Demnach wird der geſammte Widerſtand, welchen die an der Stempelſtange angebrachte Kraft zu überwinden hat $= (1+\zeta')Gek + \omega G(c-e)k + \zeta Gck$, und ſo groß muß die geſuchte Kraft ſeyn.

Man kan die Abmeſſungen der Pumpe ſo annehmen, daß ω ſehr wenig gröſſer als 1 wird, und alsdenn iſt dieſer Widerſtand ſehr nahe $= \omega Gck + \zeta Gck + \zeta' Gek$. Weil übrigens allemahl $e < c$ iſt, ſo ſey $e = \mu c$, und der gefundene Ausdruck verwandelt ſich in folgenden $(\omega + \zeta + \mu\zeta')Gck$.

118 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Luftpumpe ſo wie die Smeatonſche anzugeben.

Aufl. Die acht Gleichungen des 110 §. dienen hier ebenfals zur Richtſchnur, nur mit einer den Schlüſſen des vor. §. gemäſſen Veränderung der beyden erſten Gleichungen. Und weil hier auſſer der Weite des Cylinders die Gröſſe dreyer Oefnungen zu beſtimmen iſt, da ſtatt deſſen im 110 §. nur zwey zu beſtimmen waren, ſo kommt hier noch eine Gleichung hinzu. Wenn t die Zeit eines Kolbenzuges iſt, und $F\alpha$ das Moment der angebrachten Kraft, ſo verändert ſich hier die Gleichung n. 1. in folgende

$(\omega + \zeta + \mu\zeta')Gck \cdot \frac{b}{t} = F\alpha$, oder $B = \frac{F\alpha t}{(\omega + \zeta + \mu\zeta')Gk}$, wenn man $cb = B$ ſetzt. Wenn ferner ϑ die Zeit eines Rückzuges iſt, ſo hat man

$(\lambda + \zeta + \mu\zeta')Gck \cdot \frac{b}{\vartheta} = F\alpha$, alſo 2) $\lambda = \frac{F\alpha\vartheta}{GBk} - (\zeta + \mu\zeta')$. Die 3te nebſt den folgenden Gleichungen,

gen bis zur 8ten können nun ohne weitere Verände-rung aus dem 110 §. auch hier gebraucht werden, und man muß durch f die Weite der Röhre von der Klocke bis zum Boden des Stiefels, und durch h die Weite der Oefnung im Ventil des Stempels verſtehen. Alsdenn bleibt noch die Weite der Röhre vom Deckel des Cylinders bis zum Hahn zu beſtimmen übrig, und dieſe findet man aus der Gleichung $\omega = \frac{4m^2gt^2k}{4m^2gt^2k - B^2}$ (117 §.) wenn B ſtatt cb geſetzt wird. Man erhält nemlich $m = \frac{B}{2t}\sqrt{\frac{\omega}{(\omega-1)gk}}$.

Bey würklicher Anwendung dieſer Formuln komt alles darauf an, wie hoch man F und α in Anſchlag bringen will. Soll die Arbeit nur ſehr wenige Beſchwerde verurſachen, ſo muß man mit Hr. Nollet die Kraft nur auf 12 bis 16 Pf. und α auf 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß in Anſchlag bringen, da dann hievon hauptſächlich die Weite des Cylinders im Durchmeſſer abhängen wird.

119 §.

Alle Abmeſſungen einer Druck-Luftpumpe ſind gegeben, nebſt der Zeit eines Kolbenzuges: man ſucht die an der Kolbenſtange nöthige Kraft.

Aufl. Die im 53 bis 59 §. vorgetragenen Lehren werden die Vorausſetzung rechtfertigen, daß die Luft beynahe mit unveränderlicher Geſchwindigkeit aus dem Cylinder in das für die verdichtete Luft beſtimmte Gefäß hinein dringen. Wenn alſo die Dichtigkeit der Luft im Cylinder $= \delta$, im Gefäß $= \gamma$

geſetzt

geſetzt wird, ſo iſt $\frac{\gamma}{\delta} = n$ zwar beſtändig, aber γ und δ wachſen, ſo wie der Stempel fortrückt. War im Anfang des Zuges die Dichtigkeit der Luft im Cylinder $= \Delta$, ſo iſt nach Verlauf ſo vieler Zeit als nöthig iſt, damit der Kolben um den Weg r fortrücke, $\delta = \frac{a+b}{na+b-r}$, oder $\delta = \frac{A+B}{nA+B-cr}$, wenn der Raum im Gefäß $= A = ac$, und der Raum des Kolbenzuges $B = bc$ geſetzt wird. Die Zahl n müſte nun aus der Gleichung $t = \frac{nA}{2f\sqrt{gk}(1-n)}$ $l\frac{A+B}{nA}$ 59 §. gefunden werden, wenn t die ganze Zeit des Kolbenzuges bedeutet. Die Kraft aber, welche erfordert wird, die Luft in der angenommenen Bewegung zu erhalten, wäre $= \delta ck =$ $\frac{A+B}{nA+B-cr} \cdot \Delta ck$.

Dieſe Kraft muß demnach nicht allein während eines jeden Kolbenzuges mit r wachſen, ſondern es iſt auch bey jedem folgenden Zuge Δ gröſſer, als beym vorhergehenden. Am Ende des Zuges wird $r = b$, alſo alsdenn $\delta = \frac{A+B}{nA} \cdot \Delta$, folglich die Dichtigkeit der Luft im Gefäß $\gamma = n\delta = \frac{A+B}{A} \cdot \Delta$. Im Anfang des erſten Zuges bedeutet Δ die natürliche Dichtigkeit der Luft; wenn demnach dieſe $= G$ geſetzt

geſetzt wird, ſo iſt am Ende des zweyten Zuges $\gamma = \frac{A+2B}{A}.G$, und nachdem ν Züge geſchehen ſind, hat man $\gamma = \frac{A+\nu B}{A}.G$ (24 §. Aeroſt.). Soll nun die Luft s mahl dichter werden, als die natürliche iſt, ſo muß man die Arbeit ſo lange fortſetzen, bis $\frac{A+\nu B}{A} = s$ wird; alsdenn hat man $\delta = \frac{1}{n}\gamma = \frac{1}{n}sG$, und die am Kolben nöthige Kraft iſt $= \frac{1}{n}sGck$. So groß muß dieſe Kraft ſeyn, wenn der letzte Zug in der gegebenen Zeit t geſchehen ſoll: bey allen vorhergehenden Zügen iſt weniger Kraft nöthig.

Uebrigens muß man noch erwegen, daß der Kolben von der andern Seite nach der Richtung ſeiner Bewegung dem Druck der Atmoſphäre ausgeſetzt iſt, wenigſtens alsdenn, wenn die Pumpe wie die Sengwerdiſche eingerichtet iſt. Dieſer Druck der Atmoſphäre iſt $= Gck$, wenn demnach überdem eine Kraft $= K$ am Kolben nach der Richtung ſeiner Bewegung angebracht iſt, ſo hat man $K + Gck = \frac{1}{n}sGck$, folglich wird die geſuchte Kraft $K = \left(\frac{1}{n}s - 1\right)Gck$. Weil hiebey aber nothwendig mit auf die Friction Rückſicht genommen werden

muß,

muß, ſo kan man dieſe eben ſo, wie im 107 §, in Rechnung bringen, und $K = \left(\frac{1}{n}s + \zeta - 1\right) Gck$ ſetzen. Braucht man nun ferner die Buchſtaben F, κ, b, t, und $\beta = \frac{b}{t}$ in der bisherigen Bedeutung, ſo hat man $F\alpha = \left(\frac{1}{n}s + \zeta - 1\right) Gck \cdot \frac{b}{t}$, und

$$F\alpha t = \left(\frac{1}{n}s + \zeta - 1\right) G.B.k.$$

Die Structur der Smeatonſchen Luftpumpe hat noch etwas eigenes, worauf man Rückſicht nehmen muß. Wenn der Stempel dieſer Pumpe heraufgezogen wird, und der Weg aus dem Deckel des Cylinders nach der Klocke, oder dem ſonſt aufgeſetzten Gefäß geöfnet iſt, ſo leiſtet derſelbe zweyerley zugleich. Er treibt einmahl die über ihm befindliche Luft aus dem Cylinder heraus, und in das Gefäß hinein, zugleich aber folgt ihm die äuſſere Luft, und tritt durch das Ventil im Boden des Stiefels in den Cylinder hinein, welches man ſich ſo vorſtellen kan, als wenn der Stempel dieſe Luft hinein ſauge. Der Bewegung des Stempels ſetzt ſich nun zuerſt die äuſſere Luft entgegen, die oben auf die Stempelſtange drückt, und der daher rührende Widerſtand iſt, wie im 117 §, $= Gek$. (Ich behalte die Bedeutung der Buchſtaben des 117 §. bey). Die über dem Kolben im Cylinder befindliche Luft drückt gegen den Ring $c - e$ der obern Grundfläche des Stempels, und wenn die eingeſchloſſene Luft s mahl dichter werden ſoll, als die Atmoſphäre iſt, ſo muß

gegen das Ende der Arbeit der Druck gegen $c-e$ den vorigen Schlüſſen gemäß $=\frac{1}{n}sG(c-e)k$ angenommen werden. Wenn nun die Dichtigkeit der unter dem Stempel während des Zuges hineintretenden Luft $=\gamma$ und $\frac{\gamma}{G}=n'$ geſetzt wird, ſo dringt die äuſſere Luft mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{gk(1-n')}$ durch das Ventil im Boden des Stiefels hinein, wenn der Stempel mit der Geſchwindigkeit $=\frac{2f\sqrt{gk(1-n')}}{n'c}$ fortrückt, und f die Ventil-Oeffnung bedeutet, da dann die Zeit des Zuges $t=\frac{n'B}{2f\sqrt{gk(1-n')}}$ ſeyn muß (51 §.). Dieſe Gleichung beſtimmt n' durch t und h, der Stempel aber leidet nach der Richtung der Bewegung den Druck $n'Gck$, und der geſamte Widerſtand der Bewegung iſt $Gek+\frac{1}{n}sG(c-e)k-n'Gck$, wozu wegen der Friction noch der Widerſtand $\zeta Gck+\zeta' Gek$ (117 §.) hinzu kommt. Man muß die Abmeſſungen der Pumpe ſo annehmen, daß n' ſehr wenig kleiner als 1 wird: und wenn man alsdenn $e=\mu c$ ſetzt, ſo erhält man die am Kolben nöthige Kraft $K=$ $\left(\frac{1}{n}s+\zeta-n'-\mu\left(\frac{1}{n}s-1-\zeta'\right)\right)Gck$, und es wird

$$F\alpha t=\left(\frac{1}{n}s+\zeta-n'-\mu\left(\frac{1}{n}s-1-\zeta'\right)\right)G.B.k.$$

Was

Was bey der Sengwerdiſchen Druckpumpe f heiſt, das iſt hier m, nemlich die Ventil-Oefnung oben am Deckel des Stiefels, alſo wird n durch die Gleichung $t = \frac{nA}{2m\sqrt{gk(1-n)}}\; l\, \frac{A+B}{nA}$ beſtimmt.

120 §.

Die Abmeſſungen der Druckpumpe ſind gegeben, nebſt der Zeit eines Rückzuges: man ſucht die Kraft, welche den Kolben zurück zu ziehen erfordert wird.

Aufl. Wenn die Luftpumpe, wie die Sengwerdiſche, oder doch ſonſt auf ähnliche Art eingerichtet iſt, ſo muß vor dem Rückzuge der äuſſern Luft ein Weg in den Cylinder hinein geöfnet werden, der vorher vermittelſt eines Stöpſels oder auf andre Art verſchloſſen war: ſo wie zugleich der unter der Klocke, oder in einem andern an ihrer ſtatt aufgeſetzten Gefäß, ſchon verdichteten Luft der Rückweg nach den Cylinder verſperret werden muß. Beym Zurücktreten des Stempels wird alsdenn die Luft durch die gemachte kleine Oefnung, die ich $= h$ ſetze, mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit in den Cylinder hinein dringen, und dem Stempel folgen. Wenn nun wiederum γ die Dichtigkeit der Luft im Cylinder, und G die Dichtigkeit der Atmoſphäre bezeichnet, $\frac{\gamma}{G}$ aber $= n'$ geſetzt wird; ſo dringt die äuſſere Luft mit der Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gk}(1-n')$ durch die kleine Oefnung, wenn der Stempel mit der Geſchwindigkeit $\frac{2h\sqrt{gk}(1-n')}{n'c}$ fortrückt, und die

Zeit des ganzen Rückzuges $\vartheta = \frac{n'B}{2h\sqrt{gk}\,(1-n')}$ iſt (51 §.). Dieſe Gleichung beſtimmt n' durch ϑ, und von der innern Luft leidet der Stempel einen Druck $= n'G'ck$ nach der Richtung ſeiner Bewegung: von der andern Seite aber leidet er der Richtung ſeiner Bewegung entgegen den Druck $G'ck$. Nun ſey nach der Richtung ſeiner Bewegung eine Kraft $= K$ angebracht, ſo wird erfordert, daß $K + n'G'ck = G'ck$ ſey, alſo $K = (1-n')G'ck$, und dies iſt die geſuchte Kraft. Wegen der Friction aber muß man $K = (\zeta + 1 - n')G'ck$ annehmen.

Iſt nun an der Pumpe eine Kraft F angebracht, die mit der Geſchwindigkeit α würkt, ſo hat man $F\alpha\vartheta = (\zeta + 1 - n')G'.B.k$.

Bey der Smeatonſchen Pumpe tritt während des Rückzuges keine Lnft von auſſen in den Cylinder hinein: dies iſt ſchon während des Zuges ſelbſt geſchehen. Der Cylinder iſt demnach gleich im Anfang des Rückzuges bis an den Stempel mit Luft angefüllt, entweder völlig oder doch beynahe von einerley Dichtigkeit mit der Atmoſphäre: dieſe Luft ſoll während des Rückzuges durch das Kolben-Ventil über den Stempel hinauf treten. Ueber dem Kolben wird alsdenn die Luft mit der Atmoſphäre ebenfalls ohngefehr einerley Dichtigkeit haben, und es iſt eben ſo viel, als wenn der Stempel die unter ihm befindliche Luft durch eine Oefnung im Cylinder aus denſelben hinaus in die freye Luft triebe. Demnach hat man, wie im 110 und 118 §, für dies Moment der am Kolben nöthigen Kraft, wenn ϑ die Zeit eines Rückzuges iſt, die Gleichung $F\alpha\vartheta = (\lambda + \zeta + \mu\zeta')G'.B.k$,

und $\lambda = \frac{c^2 b^2}{4h^2 g \vartheta^2 k - c^2 b^2}$, oder $\lambda = \frac{B^2}{4gh^2 \vartheta^2 k - B^2}$.

121 §.

Eine Druck-Luftpumpe vortheilhaft anzuordnen.

Aufl. Es ſey die Zahl aller Kolbenzüge $= \nu$, welche erfordert werden, die eingeſchloſſene Luft s mahl dichter zu machen, als die natürliche iſt, und die Zeit, worin alle dieſe Züge erfolgen, $= \mathrm{T}$, die Zeit aller Rückzüge $= \Theta$, ſo vrrflieſt während der ganzen Arbeit die Zeit $\mathrm{T} + \Theta$, die ich $= \mathrm{S}$ ſetze. Ferner ſey, wie bisher, die Zeit eines Zuges $= t$, die Zeit eines Rückzuges $= \vartheta$, und $\vartheta = \varepsilon t$, ſo iſt auch $\Theta = \varepsilon \mathrm{T}$, und $\mathrm{S} = (1 + \varepsilon)\mathrm{T}$, oder $\mathrm{S} = (1 + \varepsilon)\nu t$, weil $\mathrm{T} = \nu t$ iſt. Nun hat man

I.) Für die Sengwerdiſche und ähnliche Druckpumpen,

1.) $\mathrm{F}\alpha t = \left(\frac{1}{n} s + \zeta - 1\right) \mathrm{GB}k$ (119 §.), und

2.) $\mathrm{F}\alpha\vartheta = (\zeta + 1 - n')\mathrm{G'B}k$ (120 §.).

II.) Für die Smeatonſche Druckpumpe,

1.) $\mathrm{F}\alpha t = \left(\frac{1}{n} s + \zeta - n' - \mu\left(\frac{1}{n} s - 1 - \zeta\right)\right)$

(119 §.), und

2.) $\mathrm{F}\alpha\vartheta = (\lambda + \zeta + \mu\zeta')\mathrm{G'B}k$ (120 §.).

Hiezu kommt für beide Arten von Pumpen 3.) $\mathrm{S} = (1 + \varepsilon)\nu t$, und 4.) $\vartheta = \varepsilon t$. Ferner war

$\frac{A+vB}{A}=s$ (119 §.), alſo wird 5.) $v=\frac{(s-1)A}{B}$; und wenn 6.) $L=\log. nat. \frac{A+B}{nA}$ angenommen wird, ſo hat man

I.) Für die Sengwerdiſche und ähnliche Druckpumpen

7.) $f=\frac{nAL}{2t\sqrt{(1-n)gk}}$ (119 §.), und f bedeutet die Oefnung, durch welche die Luft aus dem Cylinder in das für die verdichtete Luft beſtimmte Gefäß tritt. Setzt man alsdenn diejenige Oefnung $=h$, durch welche die freye Luft von auſſen in den Cylinder hinein tritt, ſo iſt 8.) $h=\frac{n'B}{2\vartheta\sqrt{(1-n')gk}}$ (120 §.).

II.) Für die Smeatonſche Pumpe

hat man die Gröſſe dreyer Oefnungen zu beſtimmen, und wenn man ſie ſo, wie im 118ten §, bezeichnen will; ſo iſt f die Weite der Röhre am Boden des Stiefels, die jetzt mit der freyen Luft Gemeinſchaft hat, h iſt die Oefnung im Ventil des Stempels, und m die Weite der Röhre vom Deckel des Stiefels bis zum Hahn, die hier mit der Klocke Gemeinſchaft hat. Demnach erhält man

7.) $m=\frac{nAL}{2t\sqrt{gk(1-n)}}$ (119 §.),

8.) $f=\frac{n'B}{2t\sqrt{gk(1-n')}}$ (119 §.),

und 9.) $h = \frac{B}{2\vartheta} \sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda g k}}$ (110. 120 §.).

Man ſiehet wohl, daß hier weit mehr Kraft, als bey der Saug-Luftpumpe erfordert werde, und zwar deſto mehr, je weiter man die Verdichtung der Luft treiben will. Weil indeſſen gewöhnlich die Arbeit doch nur durch eine Perſon verrichtet werden ſoll, ſo muß man, um deſto mehr Kraft zu gewinnen, auf deſto weniger Geſchwindigkeit Rechnung machen. Schätzt man bey der Saug-Luftpumpe F auf $\frac{1}{4}$ Cub. Fuß Waſſer, wenn α auf 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß angenommen iſt, ſo rechne man bey der Druckpumpe F auf $\frac{1}{2}$ Cub. Fuß Waſſer, und ſtatt deſſen α nur auf 1 höchſtens $1\frac{1}{2}$ Fuß. So hoch läſt ſich die Kraft um deswillen wohl in Anſchlag bringen, weil, wenn alles gehörig darnach angeordnet iſt, nur ſo viel Kraft gegen das Ende der Arbeit nöthig ſeyn wird.

122 §.

Wenn man die Auflöſungen der Aufgaben des 110. 118 und 121 §. mit einander vergleicht, ſo gewinnet es das Anſehen, daß ſie nicht wohl mit einander beſtehen können, wenn man verlangt, daß eine einfache Luftpumpe nicht blos als Saugpumpe, ſondern auch als Druckpumpe dienen ſoll. Denn einmahl werden die Oefnungen, durch welche die Luft hindurch ſtreichen ſoll, nicht durch einerley Gleichungen für beyde Arten von Pumpen beſtimmt, und fürs zweyte erfordert die Druckpumpe einen viel engern Cylinder, als die Saugpumpe, wofern das Zuſammenpreſſen der Luft auf einen etwas beträchtlichen Grad der Dichtigkeit nicht äuſſerſt beſchwerlich werden

den ſoll. Was den erſten Zweifel betrift, ſo findet derſelbe dadurch ſeine Erledigung, daß es eben nicht nothwendig iſt, den Oefnungen, welche die Luft durchlaſſen ſollen, grade diejenige Gröſſe zu geben, welche die Formuln beſtimmen: ſie können gar wohl etwas weiter gemacht werden, denn die Abſicht iſt nur hauptſächlich dieſe, daß die Luft einen hinlänglich freyen Durchgang behalten ſoll. Gewöhnlich wird die Rechnung dieſe Oefnungen für die Saugpumpe noch etwas gröſſer als für die Druckpumpe geben, wenn ſonſt die Abmeſſungen des Cylinders einerley ſind; und ſo werden eben die Oefnungen auch bey der Pumpe als Druckpumpe dienen. In Anſehung des zweyten Puncts ſtehen die Maximen, nach welchen beyde Arten von Luftpumpen angeordnet werden müſſen, einander mehr entgegen: allein auf der andern Seite iſt auch zu erwegen, daß die Zuſammenpreſſung der Luft mit Luftpumpen von dieſer Art ohnehin nicht ſehr weit würde getrieben werden können, wenn ſich auch das beſchwerliche der Arbeit vermeiden lieſſe. Man iſt dabey wegen vieler Urſachen auf gewiſſe Grenzen eingeſchränkt, die ſich zwar ſo genau nicht angeben laſſen, jedoch aber auch von der Beſchaffenheit der für die verdichtete Luft beſtimmten Gefäſſe, und andern Umſtänden ihre nähere Beſtimmung erhalten. Im 95 §. iſt die Anmerkung ſchon vorgekommen, daß man es nicht leicht wagen dürfe, in gläſernen Klocken die Verdichtung der Luft weiter zu treiben, als bis auf die dreyfache Dichtigkeit der Atmoſphäre: und weil man auch ſelbſt die metallenen Gefäſſe mit Glaßſcheiben verſehen muß, um zu ſehen, was in der verdichteten Luft vorgehet, ſo darf die Verdichtung der darin eingeſchloſſenen Luft doch eben=

ebenfals ſo gar weit nicht getrieben werden. Beyde Abſichten laſſen ſich demnach in Rückſicht auf dieſe Umſtände recht gut mit einander vereinbaren, wenn man für die Pumpe als Saugpumpe betrachtet weniger Kraft und dagegen etwas mehr Geſchwindigkeit in Anſchlag bringt, und ſo wird gewöhnlich eine Weite des Cylinders zwiſchen 2 und 3 Zoll im Durchmeſſer für die beſte befunden werden, wobey die Pumpe als Druckpumpe gebraucht ganz gute Dienſte leiſten kan.

123 §.

Hat man nun in Rückſicht auf dieſen Umſtand die Anordnung der Pumpe als Saugpumpe berechnet, ſo läſt ſich leicht ein Ueberſchlag machen, wie weit ſich bey noch mäßiger Arbeit die Verdichtung der Luft damit werde treiben laſſen. Die Gleichung n. 1. im 121 §. giebt $\frac{1}{n}s = \frac{F\alpha t}{GBk} + 1 - \zeta$, alſo $s = \frac{nF\alpha t}{Gcbk} + n(1-\zeta)$, oder $s = \frac{nF\alpha}{Gc\beta k} + n(1-\zeta)$, weil $\frac{b}{t} = \beta$ war. Dieſe Zahl wird ergeben, wievielmahl die eingeſchloſſene Luft dichter als die natürliche werden könne, wenn F nur mittelmäßig, und α in gehöriger Proportion damit in Anſchlag komt. Es iſt alsdenn eben nicht nöthig die Zahl n aus der Gleichung $t = \frac{nA}{2f\sqrt{gk(1-n)}}\ l\ \frac{A+B}{nA}$ (119 §.) mühſam zu ſuchen, weil man weis, daß ſie wenig kleiner als 1 iſt, wenn die Oefnung f, nebſt t gehörig ange-

angenommen ſind. Deswegen kan man $s = \frac{F\alpha}{G\tau\beta k} + 1 - \zeta$ nehmen.

Nimmt man aus dem 121 §. die Gleichung n. 1. für die Smeatonſche Pumpe, ſo findet man $\frac{F\alpha t}{GBk} = \frac{F\alpha}{Gc\beta k} = \frac{1}{n}s + \zeta - n' - \frac{1}{n}\mu s + \mu + \mu\zeta'$, alſo $\frac{1}{n}(1-\mu)s = \frac{F\alpha}{Gc\beta k} + n' - \zeta - \mu(1+\zeta')$, und es wird $s = \frac{nF\alpha}{(1-\mu)Gc\beta k} + \frac{(n'-\zeta)n}{1-\mu} - \frac{\mu n(1+\zeta')}{1-\mu}$. Weil n und n' aber ſehr wenig von 1 unterſchieden ſeyn müſſen, ſo hat man dies vorausgeſetzt $s = \frac{F\alpha}{(1-\mu)Gc\beta k} + \frac{1-\zeta}{1-\mu} - \frac{\mu}{1-\mu}(1+\zeta')$. Die Vergleichung mit der vorigen Formul ergiebt, daß dies s für die Smeatonſche Pumpe etwas gröſſer, als für andre Arten gefunden werde, wenn der Durchmeſſer des Cylinders, und ſonſt alles übrige einerley iſt. Wenn die Friction der Stempelſtange am Deckel des Cylinders nicht hinzu käme, alſo $\zeta' = 0$ wäre, ſo hätte man $s = \left(\frac{F\alpha'}{Gc\beta k} - \zeta\right) : (1-\mu) + 1$, und dies iſt gröſſer, als das vorige s, weil μ alſo auch $1-\mu$ ein eigentlicher Bruch iſt. Was nun wegen der Friction

ction ζ' noch abgehet, nemlich $-\frac{\mu\zeta'}{1-\mu}$ macht nicht viel aus, weil μ nie $=\frac{1}{2}$ ſeyn wird, alſo $\frac{\mu}{1-\mu}$ ſowohl als auch ζ' ein eigentlicher Bruch iſt.

Will man blos die Grenze ſuchen, welche man beym Gebrauch der Luftpumpe zum Verdichten ſicher nicht überſchreiten kan; ſo darf man nur F gleich aufs höchſte in Anſchlag bringen, und alsdenn ſuchen, wie groß s ſeyn muß, wenn alles im Gleichgewicht bleiben ſoll. Nun wird wegen des Gleichgewichts würklich, ſowohl n als auch $n' = 1$ ſeyn, und wenn man auch, weil dieſe Rechnung nicht ſo gar genau ſeyn darf die Friction beyſeit ſetzt, ſo hat man

$$s = \frac{F\alpha}{Gc\beta k} + 1$$ und für die Smeatonſche Pumpe

$$s = \frac{F\alpha}{(1-\mu)Gc\beta k} + 1,$$ da dann das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ aus der mechaniſchen Anordnung der Pumpe bekannt iſt.

Hiebey verdienet der Umſtand, daß dieſe Zahl für die Smeatonſche Pumpe etwas gröſſer ausfällt noch eine kurze Erläuterung. Weil die Stempelſtange allein dem Druck der Athmoſphäre leidet, und nur derjenige Theil der oberſten Grundfläche des Kolbens, um welchen ſie die Querſchnitte der Stempelſtange übertrift, dem Druck der verdichteten Luft ausgeſetzt iſt; ſo wird deſto weniger Kraft, die Luft bis auf eine gegebene Grenze zu verdichten nöthig ſeyn, je dicker die Stempelſtange iſt; und eben deswegen

wegen wird auch einerley Kraft eine ſtärkere Verdichtung zuwege bringen können, als bey andern Arten von Pumpen. Nun wird man freylich anderer Urſachen wegen die Stempelſtange nicht ſo gar dick im Durchmeſſer machen, und dies unter andern auch um deswillen, weil ihr eigenes Gewicht alsdenn deſto gröſſer wird, welches die Kurbel beym Heraufziehen mit heben muß, und welches ohnehin in den obigen Formuln nicht mit in Rechnung gebracht iſt. Indeſſen könnte man vielleicht nicht ohne Nutzen eine hohle und dabey etwas dickere Stange gebrauchen: wenigſtens iſt es gewiß, daß die Arbeit dadurch erleichtert wird.

124 §.

Um nun eine Probe zu geben, wie man ſich bey Berechnung der ganzen Anordnung verhalten muß, will ich noch ein Beyſpiel in Zahlen herſetzen. Die Pumpe mag nach Art der Sengwerdſchen, oder der Smeatonſchen eingerichtet ſeyn, ſo wird die Fuhrmannswinde gebraucht, und ich ſetze, wie im 114 §, $F = 18$ Pfund, als das Gewicht von $\frac{1}{4}$ Pariſ. Cub. Fuß Waſſer, $\alpha = 2\frac{1}{2}$ Fuß, alſo $F\alpha = \frac{5}{8} . 800\, G.$

Es bleibe auch $\frac{\alpha}{\beta} = 6$, und die Länge des Zuges ſey $1\frac{1}{2}$ Fuß, oder 18 Zoll $= b$, ſo iſt $\beta = 5$ Zoll $=$ $\frac{5}{12}$ Fuß, und $t = \frac{b}{\beta} = 3\frac{3}{5}$ Sec. Das giebt

I.) Für die Sengwerdiſche Pumpe (110 §.)

1.) $B = \frac{500 . 3,6}{1,4 . 26000} = \frac{9}{182}$ Cub. Fuß, alſo

 $d =$

$d = \sqrt{\frac{14}{11} \cdot \frac{9}{182} \cdot \frac{2}{3}}$ Fuß, oder $d = 144 \sqrt{\frac{14 \cdot 3}{11 \cdot 91}}$ $= 29\frac{1}{2}$ Linien, oder beynahe $2\frac{1}{2}$ Zoll. Der Werth von η, welcher hier $= \frac{2}{5}$ angenommen iſt, lieſſe ſich nun noch berichtigen, weil es nicht nöthig ſeyn wird, den Stempel $2\frac{1}{2}$ Zoll hoch zu machen, ſo könnte man nun $\eta = 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{d}$ (110 §.) annehmen, und durch a die Höhe des Stempels verſtehen, da dann B und d noch etwas gröſſer würde gefunden werden. Indeſſen dürfte a wohl nicht unter 2 Zoll betragen können, und ſo würde nicht viel gewonnen werden. Man kan dagegen $d = 30$ Linien ſtatt der gefundenen $29\frac{1}{2}$ Linien annehmen, ſo wird $B = \frac{9,4}{182} = \frac{47}{910}$ Cub. Fuß $= 89,248$ Cub. Zoll. Beym Rückzuge wird ſo viel Kraft nicht erfordert, und man kan dagegen etwas mehr Geſchwindigkeit rechnen. Ich will deswegen $F = \frac{1}{8} . 800 G$, und $\alpha = 3\frac{1}{2}$ Fuß annehmen, ſo wird $F\alpha = \frac{7}{16} . 800 . G$, und man erhält für den Rückzug $\beta = \frac{7}{12}$ Fuß oder 7 Zoll, und $\vartheta = \frac{b}{\beta} = 2\frac{4}{7}$ Secunden. Das giebt

$$2.)\ \lambda = \frac{7}{16} \cdot \frac{910}{47} \cdot \frac{800 . 2\frac{4}{7}}{26000} - \frac{2}{5} = 0,2705.$$

II.) Für die Smeatonſche Pumpe

iſt 1.) $B = \frac{F\alpha t}{(\omega + \zeta + \mu\zeta')Gk}$ (118 §.). Vorläufig nimmt man $\zeta = \zeta' = \frac{2}{5}$, und weil das Verhältniß

niß $\frac{e}{c} = \mu$ ebenfalls einigermaſſen willkührlich iſt, jedoch durch die nöthige Stärke der Stempelſtange zum Theil beſtimmt wird, ſo kan man vorläufig etwa $\mu = \frac{1}{9}$ annehmen, ſo muß die Dicke der Stange $\frac{1}{3}$ vom Durchmeſſer des Cylinders betragen. Ferner muß ω die Einheit ſehr wenig übertreffen, und man kan $\omega = 1{,}05$ annehmen: das giebt $\omega + \zeta + \mu\zeta' = 1{,}5$, und $B = \frac{500.3{,}6}{1{,}5.26000} = \frac{9}{193}$ etwas kleiner als vorhin, wie der Sache gemäß iſt, und es müſte $d = 144\sqrt{\frac{14}{11}.\frac{9}{193}.\frac{2}{3}} = 29{,}2$ Linien ſeyn. Der Unterſcheid von dem vorigen Reſultat hat ſo wenig auf ſich, daß man gar wohl auch hier $d = 30$ Lin. annehmen kan, weil nicht allein die Kraft ſehr mittelmäßig in Anſchlag gebracht iſt, ſondern auch die Friction nicht ſo ſtark ſeyn dürfte, als die Rechnung annimmt. Vermöge des 118 §. hat man für die Smeatonſche Pumpe ferner 2.) $\lambda = \frac{F\alpha\vartheta}{GBk} - \zeta - \mu\zeta'$, und die Zeit ϑ läſt ſich eben ſo wie vorhin zu $2\frac{4}{7}$ Sec. beſtimmen. Weil nun $\mu = \frac{1}{9}$, und ζ' nicht über $\frac{2}{5}$ beträgt, ſo macht $\mu\zeta'$ nicht über $\frac{2}{45}$, oder 0,044 aus, und es wird für dieſe Pumpe $\lambda = 0{,}2265$. Uebrigens geben ſich nun folgende Beſtimmungen

Für beide Arten von Pumpen.

Es muß n ſehr wenig kleiner als 1 ſeyn: deswegen nehme man $n = 0{,}95$ an, ſo wird $nB = 84{,}7856$ Cub. Zoll, und wenn $A = 1000$ Cub. Zoll angenommen wird, ſo hat man $\frac{A + nB}{A} = 1{,}0847856$

und

und Brigg $l\,\frac{A+nB}{A} = 0{,}035344$, alſo $L = 0{,}0353439 \cdot 2{,}302585 = 0{,}081382$. Soll nun die Luft 1000 mahl dünner gemacht werden, als die natürliche, ſo findet man $\nu = \frac{3}{0{,}035344} = 85$, und weil $e = \frac{\vartheta}{t} = \frac{18}{7} : \frac{18}{5} = \frac{5}{7}$ iſt, ſo wird $S = \frac{12}{7} \cdot \frac{18}{5} \cdot 85 = 528$ Sec. oder $8\frac{3}{4}$ Minuten. Die mit Ventilen verſehene Smeatonſche Pumpe wird demnach den verlangten Effect in 9 Minuten zu Stande bringen: die Arbeit mit der Sengwerdſchen und ähnlichen Pumpen, wobey man bey jedem neuen Zuge den Hahn anders drehen muß, wird einige Minuten Zeit mehr wegnehmen. Damit dieſer Effect erfolge, müſſen noch die Oefnungen geſucht werden, welche die Luft durchlaſſen ſollen, da dann $f = \frac{81{,}382}{12 \cdot 7{,}2\sqrt{0{,}05 \cdot 15{,}1 \cdot 26000}} = \frac{40{,}691}{12 \cdot 3{,}6\sqrt{5 \cdot 151 \cdot 26}}$ Qu. Zoll $= \frac{40{,}691}{0{,}3\sqrt{5 \cdot 151 \cdot 26}} = 0{,}968094$ Quadr. Linien, wozu ein Durchmeſſer von 1,11 Linien gehört. Für die Sengwerdſche Pumpe wird nun $\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} = 2{,}2$, und für die Smeatonſche $\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} = 2{,}3$. Beyde Zahlen ſind ſo wenig unterſchieden, daß man für beyde Pumpen

$\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} = 2,25$ annehmen kan; und weil ferner

$\frac{B}{2\vartheta\sqrt{gk}} = \frac{7 \cdot 89,248}{36 \cdot 12 \cdot \sqrt{151 \cdot 2600}}$ Qu. Zoll $=$

$\frac{7 \cdot 89,248}{3 \cdot 626,6}$ Qu. Linien, ſo wird $h = \frac{7 \cdot 44,624 \cdot 1,8}{3 \cdot 313,3}$

$= 0,75$ Quadr. Linien, und der zugehörige Durchmeſſer iſt 1 Linie. Wird dieſe Oefnung etwas gröſſer gemacht, ſo erleichtert es den Rückzug noch mehr, und es iſt alsdenn weniger Kraft nöthig, als die Rechnung annimmt. Weil Smeaton in ſeinem Stempel zwey Oefnungen macht, ſo muß jede wenigſtens 0,62 Linien im Durchmeſſer haben.

Für die Smeatonſche Pumpe iſt noch die Oefnung m des Ventils oben am Deckel des Cylinders zu ſuchen übrig, und man hat $m = \frac{B}{2t\sqrt{gk}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega - 1}}$ (118 §.). Weil nun $\omega = 1,05$ war, ſo wird $\sqrt{\frac{\omega}{\omega-1}} = \sqrt{\frac{105}{5}} = 4,5826$ gefunden, alſo $m =$

$\frac{5}{36} \cdot \frac{89,248 \cdot 4,5826}{12 \cdot \sqrt{151 \cdot 2600}}$ Quadr. Zoll $= \frac{5}{1}$

$\cdot \frac{44,624 \cdot 4,5826}{313,3} = 1,087705$ Quadr. Linien, und dazu gehört ein Durchmeſſer von 1,18 Linien.

125 §.

Nunmehro wäre noch die Frage, wie weit die Luftpumpe, wenn ſie die eben berechneten Abmeſſungen hätte, auch als Druck-Pumpe dienen könnte.

Bringt

Bringt man F nochmahl ſo hoch in Anſchlag als vorhin, und rechnet dagegen α nur auf $1\frac{1}{2}$ Fuß, ſo dient zuerſt die Formul $s = \frac{F\alpha}{Gc\beta k} + 1 - \zeta$ zu überſehen, wie weit ſich die Verdichtung bey noch mäßiger Arbeit treiben läſt. Man hat der angenommenen Vorausſetzung gemäß $F = \frac{1}{2}.800.G = 400G$, und weil $\frac{\alpha}{\beta} = 6$ angenommen iſt, ſo wird $\frac{F\alpha}{G\beta} = 2400$. Weiter iſt $c = \frac{1}{4}\pi dd$, und es war $d = 2\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{5}{24}$ Fuß, alſo $c = \frac{11}{14}.\frac{25}{4,144}$, und $ck = \frac{11.25.13000}{28.144} = 886,6$: demnach wird $s = 2,7 + 0,6 = 3,3$. Soll demnach die Arbeit nicht ſchon ziemlich beſchwerlich werden, ſo läſt ſich die eingeſchloſſene Luft nicht viel mehr denn dreymahl dichter machen, als die Atmoſphäre iſt. Die äuſſerſte Kraft eines Menſchen für den Fall des Gleichgewichts wird nicht viel mehr, als das Gewicht eines Pariſer Cubicfuſſes Waſſer betragen; (die Rede iſt von ſolchen Perſonen, welche eben keiner ſehr ſchweren Arbeit gewohnt ſind,) wird alſo $F = 800G$ geſchätzt, ſo hat man $s = 6,6$ für die Gränze, welche man bey Zuſammenpreſſung der Luft mit dieſer Pumpe nicht leicht wird überſchreiten können. Die Gleichung n. 2. im 121 §. läſt ſich ſo ausdrücken, $F\alpha = (\zeta + 1 - n')G.\beta ck$, und ſie giebt die Kraft $F = (\zeta + 1 - n')Gck.\frac{\beta}{\alpha}$, die beym Rückzuge nöthig iſt.

iſt. Weil ſich nun die übrige Anordnung ſo machen läſt, daß n' ſehr wenig kleiner als 1 wird, ſo nehme man $n' = 0{,}95$, und man erhält $F = 0{,}45 \cdot \frac{1}{6} \cdot 886{,}6 \cdot G = \frac{1}{6} \cdot 399 \cdot G$, oder faſt $\frac{1}{12} \cdot 800\,G$, welches etwa nur 6 Pf. ausmacht. Bey ſo geringen Druck läſt ſich α wohl auf 4 Fuß ſchätzen, und ſo wird $\beta = \frac{2}{3}$ Fuß, folglich $\vartheta = \frac{b}{\beta} = \frac{3}{2} : \frac{2}{3} = 2\frac{1}{4}$ Secunden.

Der Vorausſetzung gemäß iſt beym Stempelzuge ſelbſt $\alpha = 1\frac{1}{2}$ Fuß, alſo $\beta = \frac{1}{4}$ Fuß, und es wird $t = \frac{3}{2} : \frac{1}{4} = 6$ Secunden, alſo $\varepsilon = \frac{\vartheta}{t} = \frac{9}{4} : 6 = \frac{3}{8}$. Preßt man nun in einer Klocke von 1000 Cub. Zoll Inhalt die Luft zuſammen, ſo hat man $\nu = \frac{2{,}3 \cdot 1000}{89{,}248} = 26$, alſo $S = 1\frac{3}{8} . 26 . 6 = 214$ Secunden, oder $3\frac{1}{2}$ Minuten. Mehr Zeit wird die Arbeit nicht erfordern, wenn man die Verdichtung der eingeſchloſſenen Luft nicht viel weiter treiben will, als bis auf die dreyfache Dichtigkeit der Atmoſphäre. Die Arbeit kan allenfals in etwas weniger Zeit zu Stande kommen, weil die erſten Züge ſchneller von ſtatten gehen können, als die Rechnung vorausſetzt. Bey der Sengwerdſchen Pumpe kan dagegen die Zögerung wegen der Umdrehung des Hahns gerechnet werden.

Um nun die nöthige Gröſſe der Oefnungen zu finden, nehme man auch $n = 0{,}95$ an, ſo wird $nA = 950$, und $A + B = 1089{,}248$ Cub. Zoll, folglich $\frac{A+B}{nA} = 1{,}1371$, der Brigg. Log. hievon iſt

0,0557987,

0,0557987, und L = 0,128481. Ferner iſt
$$\frac{n}{\sqrt{(1-n)}} = \sqrt{\frac{n^2}{1-n}} = 4{,}25,$$ und es wird
$$f = \frac{950 . 0{,}128481 . 4{,}25}{12 . 12\sqrt{151 . 2600}}$$ Quadr. Zoll =
$$\frac{950 . 0{,}128481 . 4{,}25}{626{,}6} = 0{,}83$$ Qu. Linien, und
der Durchmeſſer wird = 1,03 Lin. Für die Sengwerdſche Pumpe als Saugpumpe gebraucht ward dieſer Durchmeſſer = 1,1 Linie gefunden, (124 §.) ſo daß dieſe Oefnung für beyde Abſichten faſt einerley Gröſſe haben muß. Für eben die Pumpe als Druckpumpe findet man $h = \frac{89{,}248 . 4{,}25}{4\frac{1}{2} . 12 . 626{,}6}$ Qu. Zoll $= \frac{89{,}248 . 4{,}25 . 4}{3 . 313{,}3} = 1{,}6142$ Qu. Linien, und den zugehörigen Durchmeſſer = 1,4 Linien. Für eben den Durchmeſſer ward im vor. §. nur eine Linie gefunden, und das komt daher, weil daſelbſt etwas mehr Kraft, und etwas weniger Geſchwindigkeit beym Rückzuge angenommen iſt. Soviel ſiehet man demnach aus dieſer Rechnung, daß es bey der Sengwerdſchen Pumpe, und andern ähnlichen zu beyden Abſichten hinlänglich ſey, wenn die Weite beyder Oefnungen im Durchmeſſer zwiſchen 1 und $1\frac{1}{2}$ Linie fällt. Es iſt nicht rathſam, die Weite unter 1 Linie aber auch nicht nöthig, ſie über $1\frac{1}{2}$ Linien zu nehmen.

Für die Smeatonſche Druckpumpe findet man m = 0,83 Qu. Linien und den Durchmeſſer = 1,03 Lin. (im vor. §. war es 1,18 Lin.) h = 0,75 Qu. Lin. und

und den Durchmeſſer = 1 Linie, (wie im vor. §.) und f = 0,31125, wovon der Durchmeſſer = 0,633 Lin. iſt. Im vor. §. ſollte f einen Durchmeſſer von 1,11 Linien haben, und die Urſache, weswegen er hier ſoviel kleiner ausfällt, iſt dieſe, weil bey der Smeatonſchen Pumpe die äuſſere Luft alsdenn zugleich folgt, wenn derſelbe beym Hinaufſteigen die Luft zuſammenpreſſet, wobey ſeine Bewegung langſamer angenommen iſt, als beym Saugen im vor. §. Die Rechnung ergiebt nur ſoviel, daß beym jetzigen Gebrauch ein Durchmeſſer von 0,633 Lin. genügen kan, indeſſen iſt ein Durchmeſſer von 1 Linie und darüber auch gar nicht nachtheilig. Was alſo kurz vorhin in Abſicht der Weite der Oefnungen für die Sengwerdſche Pumpe geſagt iſt, findet auch hier ſeine Anwendung.

126 §.

Ob nun gleich eine Zuſammenpreſſung der Luft bis auf die drey- oder vierfache Dichtigkeit der Atmoſphäre ſo ſehr ſtark noch nicht zu ſeyn ſcheinen dürfte; ſo iſt doch oben ſchon bemerkt worden, daß man es nicht leicht wagen dürfe, in einer gläſernen Klocke die Luft ſtärker zu verdichten. Auſſer dieſer Rückſicht, welche man auf die nöthige Stärke des für die verdichtete Luft beſtimmten Gefäſſes nehmen muß, bleibt überdem noch zu erwegen, daß auch andre Theile, aus welchen die Maſchine zuſammengeſetzt iſt, einen deſto ſtärkern Druck auszuſtehen haben, je mehr man die Luft zuſammen preſſet, und daß ſie dieſerwegen der Gefahr des Zerbrechens ebenfals ausgeſetzt ſind, wenn man es zu weit treibet. Wäre die Druckpumpe der Rechnung des vor. §. gemäß

angeordnet, ſo würde der Stempel, alſo auch die Zähne der Stempelſtange und des Sternrades oder Trillings einer Gewalt von 225 Pf. ausgeſetzt ſeyn, wenn gegen das Ende der Arbeit die eingeſchloſſene Luft ſchon bis zur dreyfachen Dichtigkeit der Atmoſphäre gebracht wäre. Eine noch gröſſere Gewalt würden die Schrauben leiden, womit die Klocke am Teller befeſtiget werden muß: ſie würde ſo groß ſeyn, als die Gewalt, womit die eingeſchloſſene Luft die Klocke aufwärts zu heben ſtrebt, zu deren Berechnung bald nähere Anleitung folgen ſoll. Indeſſen giebt es doch würklich Fälle, wo man eine viel ſtärker zuſammengepreſte Luft, allenfals bis auf die 20, 30, ja wohl 100fache Dichtigkeit der Atmoſphäre (in Windbüchſen zum Exempel) nöthig hat; und alsdenn iſt ſchlechterdings ein ſehr enger Cylinder erforderlich. Ganz kleine Druckpumpen, wie die im 95 §. beſchriebene iſt, thun alsdenn die beſten Dienſte, beſonders wenn das für die verdichtete Luft beſtimmte Gefäß nur klein iſt, weil ſonſt eine gar groſſe Menge von Zügen nöthig wäre, wiewohl dieſe ziemlich ſchnell fortgehen können, wenn die Pumpe nicht über einen halben Zoll im Durchmeſſer hat. Die Graveſandſche kleine Druckpumpe (95 §.) hält $\frac{3}{4}$ Zoll im Durchmeſſer, und man würde ohne zu groſſe Beſchwerde die Luft damit 10 mahl dichter machen können, als die natürliche. Die Länge des Zuges iſt nicht angegeben, wenn ich aber dafür 1 Fuß annehme, ſo iſt der körperliche Inhalt des Kolbenzuges $= \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{16^2}$ Cub. Fuß. Das von Graveſand angegebene für die verdichtete Luft beſtimmte cylindriſche Gefäß iſt 6 Zoll im Durchmeſſer weit,

und 8 bis 9 Zoll lang, alſo der Inhalt etwa $\frac{1}{8}$ Cubicfuß. Aus Vergleichung beyder Zahlen läſt ſich nun ein Ueberſchlag machen, wieviel Züge zu einer verlangten Verdichtung nöthig ſind. Hätte die Pumpe nur $\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmeſſer, ſo könnte eine Perſon damit eine mehr als 20 mahl verdichtete Luft zuwege bringen, und überhaupt ſiehet man wohl, daß die Zahl $s = \frac{F}{Gck} + 1$, (123 §. hier iſt $\frac{\alpha}{\beta} = 1$) wenn ſie die Einheit vielmahl übertrift, ſich beynahe wie F, und umgekehrt wie c verhalte.

127 §.

Dergleichen kleine Pumpen haben gewöhnlich nur ein im Boden angebrachtes Ventil, und ſtatt des zweyten Ventils iſt der Cylinder oberwärts nur mit einer kleinen Oefnung verſehen, und zwar nahe am Kolben, wenn er am höchſten ſteht. Es kan deswegen von auſſen keine Luft wieder in den Cylinder hineintreten, bevor der Stempel beym Rückzuge ſeine höchſte Stelle faſt wieder erreicht hat. Nun wird einige Zeit, ſie ſey ſo kurz, als ſie wolle, erfordert, damit durch die kleine Oefnung ſoviele natürliche Luft in den innern Raum wieder hinein trete, als denſelben ausfüllen kan. Wofern demnach der Kolben zu ſchnell wieder umkehrte; ſo könnte es ſeyn, daß beym Anfang des neuen Zuges das Gleichgewicht der innern Luft mit der äuſſern noch nicht da wäre, und dies würde den Erfolg haben, daß mehr Züge zu einer verlangten Verdichtung erfordert würden, als nöthig wären, wenn das erwehnte Gleichgewicht jedesmahl völlig hergeſtellet würde. Ob nun das eine oder das andre erfolgt, ſolches wird von der Gröſſe

der kleinen Oefnung und der Schnelligkeit der Bewegung des Stempels abhängen. Wenn der Flächen Inhalt der kleinen Oefnung $= f$, der innere Raum der Pumpe $= B$, die Zeit aber, welche zur Anfüllung der Pumpe mit Luft von einerley Dichtigkeit mit der äuſſern erfordert wird, $= t$ geſetzt wird, ſo hat man $t = \frac{B}{f\sqrt{gk}}$ (28 §.) Wird demnach t als bekannt angenommen, ſo muß $f = \frac{B}{t\sqrt{gk}}$ ſeyn.

Wenn die Arbeit etwas ſchnell fortgehet, ſo darf man wohl t nicht über $\frac{1}{4}$ Secunde ſchätzen. Hat demnach die Pumpe die am Ende des vor. §. angenommenen Abmeſſungen, ſo iſt $B = \frac{11}{14.16.16}$, und man erhält $f = \frac{4.11}{14.16.16.626} = \frac{11}{14.64.626}$ Quadrat-Fuß $= \frac{11.20736}{14.64.626}$ Quadrat-Linien, oder 0,406664 Quadr. Linien, wozu ein Durchmeſſer von 0,715 Linien gehört. So groß wenigſtens muß alſo die kleine Oefnung im Durchmeſſer ſeyn, wenn man verſichert ſeyn will, daß eine hinlängliche Menge Luft durch dieſelbe jedesmahl in die Pumpe hinein treten werde.

Der

Der VII. Abſchnitt.

Berechnung des Drucks der Luft auf die Gefäſſe und der nöthigen Feſtigkeit der letztern.

128 §.

Die bey den Luftpumpen jetzt gebräuchlichen gläſernen Klocken, worin man die Luft ſowohl zu verdünnen, als auch bis auf einen mäßigen Grad der Dichtigkeit zuſammen zu preſſen gewohnt iſt, haben gewöhnlicher Weiſe die Geſtalt eines hohlen Cylinders, der oben durch eine Wölbung geſchloſſen iſt. Sie ſind überdem oben mit einem Knopf verſehen, um ſie deſto bequemer und mit weniger Gefahr des Zerbrechens anzufaſſen, und von einer Stelle auf die andre zu ſetzen. Dieſe obere Wölbung iſt gewöhnlich noch etwas dicker von Glaſe, als der cylindriſche Theil, und der letztere iſt der Gefahr der Zerſprengung von der eingeſchloſſenen verdichteten Luft am meiſten unterworfen. Bey Berechnung der Gewalt, womit die eingeſchloſſene Luft die Klocke zu zerſprengen ſtrebt, und der nöthigen Feſtigkeit der Klocke, kan man ſie alſo als eine gläſerne cylindriſche Röhre betrachten, und ohngefehr das zum Grunde legen, worauf im 222 u. f. §. Hydraul. die Berechnung derjenigen Gewalt beruhet, womit das Waſſer die Röhren bey Waſſerkünſten zu zerſprengen ſtrebt. Hiebey wäre nun vor allen Dingen nöthig, die abſolute Feſtigkeit des Glaſes zu kennen, und darüber

hat Mariotte verſchiedene Verſuche angeſtellet, die er im Traité du mouvement des eaux V. Partie II Diſcours p. 382 ſqq. erzehlt. Ein ſolider Cylinder aus Glaß $\frac{5}{3}$ Linien dick ward an dem einen Ende in horizontaler Lage befeſtiget, da dann von dieſem Cylinder ein Stück von 6 Fuß Länge abbrach, ohne daß eine andre Laſt hinzugekommen wäre, als allein das eigene Gewicht des abgebrochenen Theils. Ein Cubiczoll derſelben Glaß-Art hat nach Mariotts Bericht 2 Unzen 1 Drachma gewogen, und daraus läſt ſich das Gewicht des abgebrochenen Cylinders von 6 Fuß Länge und $\frac{5}{3}$ Linien Dicke finden. Zugleich ergiebt ſich daraus die reſpective Feſtigkeit des zerbrochenen Cylinders, und dieſe dienet alsdenn, die abſolute Feſtigkeit derjenigen Glaß-Art zu finden, womit der Verſuch angeſtellet worden.

129 §.

Mariotte findet nun dieſe abſolute Feſtigkeit durch folgende Rechnung. Ein Kreis im Durchmeſſer $\frac{5}{3}$ Linien hat $\frac{11}{14} \cdot \frac{25}{9} = 2,1825$ Quadratlinien Flächen-Jnhalt, und dies mit der Länge von 6 Fuß, oder 864 Linien multiplicirt giebt 1885,68 oder faſt 1886 Cubic-Linien für den körperlichen Jnhalt des abgebrochenen Theils: davon hat alſo das Gewicht $\frac{1886}{1728} \cdot 17 = 18,5544$ Drachmen, oder beynahe $2\frac{1}{3}$ Unzen betragen. Weil man ſich nun das Gewicht dieſes abgebrochenen Theils in ſeinem Schwerpunct vereiniget, alſo 3 Fuß oder 432 Linien von der Ebene des Bruchs entfernt vorſtellen muß; ſo ſchlieſt man nach der Regel des 197 §. Stat. $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3}$ Linien : 432 Linien = die reſpective Feſtigkeit von $2\frac{1}{3}$ Unzen zur abſoluten Feſtigkeit, und findet für die letztere $1814\frac{1}{3}$ Unzen,

zen, oder 113 Pf. 6 Unzen. Gegen dieſe Rechnung aber habe ich den Zweifel, ob auch Mariotts Regel, aus der reſpectiven Feſtigkeit die abſolute zu finden, auf Glaß ohne alles Bedenken angewandt werden könne. Glaß iſt freylich etwas biegſam, aber doch dabey ſehr ſpröde, und deswegen dürfte vielleicht Galiläi Regel (187 §. Stat.) mit mehr Sicherheit gebraucht werden können. (Man vergleiche den 193 §. Stat.) Dieſe würde für die abſolute Feſtigkeit des geprüften gläſernen Cylinders nur $\frac{2}{3}$. 113 Pf. oder 75 Pf. geben.

130 §.

Man will die Luft in einer gläſernen Klocke, deren Halbmeſſer bekannt iſt, in einem gegebenen Verhältniß gegen die Atmoſphäre verdichten, und ſucht die nöthige Dicke der Klocke.

Aufl. Wenn die eingeſchloſſene Luft n mahl dichter werden ſoll, als die Atmoſphäre; ſo iſt der Druck, welchen die Klocke leidet, nur ſo groß, als wenn die Luft $(n-1)$ mahl dichter, als die Atmoſphäre wäre: weil ſie auch von auſſen dem Druck der Atmoſphäre ausgeſetzt iſt. Man ſetze die Höhe derjenigen Waſſerſäule $= h$, welche dem natürlichen Druck der Atmoſphäre das Gleichgewicht hält, ſo leidet die Klocke von innen eine Gewalt, die ſo groß iſt, als wenn ſie dem Druck einer Waſſerſäule, deren Höhe $= (n-1)h$ ausgeſetzt wäre, und man kan nun aus dem 226 §. Hydraul. die Gleichung $c.P = \gamma a f f r$ hier anwenden, wenn man $a = (n-1)h$ annimmt, und dies giebt $c = \frac{\gamma(n-1)hffr}{P}$. Will man

alsdenn bey der würklichen Berechnung aus dem vor. §. den Mariottiſchen Verſuch zum Grunde legen, ſo nimmt man $ff = 2{,}1825$ Quadratlinien, und P $= 75$ Pf. Uebrigens iſt c die geſuchte Dicke der gläſernen Klocke, r ihr Halbmeſſer, und γ das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer.

Geſetzt, die Luft ſoll 10mahl dichter werden, als die natürliche iſt, und die Klocke ſoll im Durchmeſſer 7 Zoll weit ſeyn, ſo wird $c = 31 \,.\, 9 \,.\, \frac{1}{1}\frac{4}{7} \,.\, \frac{2{,}1825}{20736} \,.\, \frac{7}{24} = 31 \,.\, 7 \,.\, \frac{0{,}1455}{2304} \,.\, \frac{7}{12}$ Fuß, oder $31 \,.\, 7 \,.\, \frac{0{,}1455}{16} \,.\, \frac{7}{12} = 0{,}935$, beynahe eine ganze Linie. Bey dieſer Dicke würde demnach die Klocke gewiß zerſpringen, wenn ſie dem Druck einer 10mahl dichtern Luft, als die Atmoſphäre iſt, ausgeſetzt wäre. Sie müſte wenigſtens 2 Linien Dicke haben, und weil wohl zu vermuthen iſt, daß nicht alle Stellen gleich feſte ſeyn werden, auch allerley kleine Urſachen das Zerſpringen befördern können, ſo müſte man wohl auf 3 Linien Dicke rechnen: wobey es denn doch kaum zu wagen wäre, die Klocke einem ſo gewaltſamen Druck auszuſetzen.

131 §.

Die Dicke der Klocke iſt neben der Gröſſe ihres Durchmeſſers gegeben: man frägt, wie weit die Verdichtung der Luft ohne Gefahr die Klocke zu zerſprengen getrieben werden könne.

Aufl. Die im vor. §. ſchon gebrauchte Gleichung $c \,.\, P = \gamma (n-1) hffr$ giebt $n = \frac{c \,.\, P}{\gamma hffr} + 1$, und dieſe

dieſe Zahl drückt aus, wie viel mahl die eingeſchloſſene Luft höchſtens dichter als die Atmoſphäre seyn werde, wenn man das Zerſpringen der Klocke ſchon faſt ganz gewiß erwarten muß. Um alſo der Klocke zu ſchonen, dürfte man die Verdichtung wohl kaum auf die Hälfte dieſer Gränze treiben.

Es ſey z. E. die Klocke im Durchmeſſer 9 Zoll weit, und die Dicke des Glaſes ſey 2 Linien, ſo wird $n = \frac{1}{72} \cdot \frac{15}{14} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{20736}{2{,}1825} \cdot \frac{8}{3} + 1 = \frac{8 \cdot 32000}{7 \cdot 31 \cdot 97} + 1 = 13$. Man dürfte demnach wohl keine ſtärkere Zuſammenpreſſungen, als bis auf die 5 oder 6fache Dichtigkeit der Atmoſphäre wagen.

132 §.

Das Gefäß, worin man die Luft zuſammen preſſet, iſt eine Kugel: man ſucht die Gewalt, womit die verdichtete Luft ſie zu zerſprengen ſtrebt.

Aufl. Weil der Druck der eingeſchloſſenen Luft auf alle Puncte der innern Kugelfläche einerley und durchgängig auf die Elemente der Kugelfläche ſenkrecht iſt; ſo wird man ziemlich natürlich auf die Vorſtellung verfallen, daß die Luft dieſe Kugel in zwey Halbkugeln zu zerſprengen ſtrebe, und dieſe Vorausſetzung nimmt man auch gewöhnlich an. Es ſey demnach ABED dieſe Kugel, und BD ein größter Kreis, wozu die Axe AE gehört; MN, *mn*, ein paar zu dieſer Axe gehörige Parallel-Kreiſe, deren Ebenen die Axe in P und *p* ſchneiden. Setzt man nun den Halbmeſſer der Kugel CM $= r$, ſo iſt die 58 Fig.

Fläche der Zone zwiſchen den beiden Parallelkreiſen $= 2\pi r . Pp$ (622 §. Geom.). Man ſetze die unbeſtimmte Höhe AP des Kugelabſchnitts $MAN = x$, und betrachte Pp als ein Element der Axe der Kugel, ſo iſt $Pp = dx$, und das Element der Kugelfläche zwiſchen den Parallelkreiſen $= 2\pi r dx$. Die Richtung des Drucks der eingeſchloſſenen Luft auf dieſe verſchwindende Zone iſt mit der Richtung MQ des verlängerten Halbmeſſers CM einerley. Man verlängere PM nach S, und ziehe MR mit AP parallel, ſo zerlegt ſich die Kraft MQ in zwo andre nach den Richtungen MS und MR, da dann die Summe aller Kräfte MR die Halbkugel BAD von der andern los zu reiſſen ſtrebt. Es iſt aber $MR = \frac{CP}{CM} . MQ = \frac{r-x}{r} . MQ$, wenn alſo die Summe aller Kräfte MQ für die verſchwindende Zone $MmnN = dW$ geſetzt wird, und die Summe aller Kräfte MR für eben die Zone $= dV$, ſo wird $dV = \frac{r-x}{r} dW$. Nun ſey der Druck der eingeſchloſſenen Luft gegen die Zone $MmnN$ ſo groß, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf einer eben ſo groſſen Grundfläche in der Höhe a, und das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer $= \gamma$, ſo iſt $dW = 2\gamma\pi a r dx$, und es wird $dV = 2\gamma\pi a (r-x) dx$, da dann die Integration $V = 2\gamma\pi a (rx - \frac{1}{2}xx)$ giebt, weil x und V zugleich verſchwinden müſſen. Setzt man nun $x = r$, ſo hat man für die ganze Halbkugel $V = \gamma\pi a r r$, und ſo groß iſt die Gewalt, welche die Kugel zu zerſprengen ſtrebt. Sie iſt demnach ſo groß, als der Druck der eingeſchloſſenen

Luft

Luft gegen die Fläche des gröſten Kreiſes ſeyn würde.

133 §.

Wenn man dieſe Regel in beſondern Fällen anwenden will, um die erforderliche Feſtigkeit der Kugel zu berechnen, ſo kommt noch die Dicke ihrer körperlichen Schale in Betrachtung. Setzt man dieſe $= e$, und verſtehet durch r die mittlere arithmetiſche Proportionalgröſſe zwiſchen dem Halbmeſſer der inwendigen und auswendigen Kugelfläche; ſo iſt des innern gröſten Kreiſes Fläche $= \pi (r - \frac{1}{2}c)^2$, und die Fläche des äuſſern gröſten Kreiſes $= \pi (r + \frac{1}{2}c)^2$, folglich die Fläche des Ringes zwiſchen beyden Kreiſen $= 2\pi rc$. Vermöge der im vor. §. angenommenen Vorausſetzung würde dies die Ebene des Bruchs ſeyn, wofern die Kugel durch die Gewalt der eingeſchloſſenen Luft zerſprengt werden ſollte. Die Materie der Kugel ſey ſo feſte, daß ein Prisma deſſen Querſchnitt ff iſt, höchſtens das Gewicht P tragen könne, ſo wird die Feſtigkeit der Kugel $= \frac{2\pi rc}{ff} . \mathrm{P}$ ſeyn; und wenn man ſie eben ſo groß annimmt, als die im vor. §. berechnete Kraft der eingeſchloſſenen Luft, ſo hat man die Gleichung $\frac{2c}{ff} . \mathrm{P} = \gamma ar$; und wenn man hier durch h die Höhe einer Waſſerſäule verſteht, die dem Druck der Atmoſphäre das Gleichgewicht hält, die eingeſchloſſene Luft aber n mahl dichter als die natürliche annimmt; ſo muß man nh ſtatt a ſchreiben, und man erhält $2c\mathrm{P} = \gamma ffnhr$. Wenn nun von den dreyen Gröſſen c, n, r, zwey gegeben

ſind,

ſind, ſo kan man vermittelſt dieſer Gleichung die dritte finden. Iſt die Kugel von auſſen mit der natürlichen Luft umgeben; ſo ſiehet man leicht, wie im 132 §. daß der Druck der innern Luft gegen jede Halbkugel nur ſo groß ſey, als wenn dieſe innere Luft $(n-1)$ mahl dichter, als die natürliche wäre. Deswegen ſetzt man $n-1$ ſtatt n, und erhält $2cP = \gamma ff(n-1)hr$.

134 §.

Die bisherigen Schlüſſe laſſen ſich auch auf andre Arten runder Körper erweitern. Wenn AMB kein Kreisbogen, ſondern ſonſt eine andre in der Ebene des Winkels APM verzeichnete krumme Linie wäre, wie z. E. die Parabel (92 §. Mech.), ſo würde durch die Umdrehung der Figur AMBC um die Axe AC, ein runder Körper entſtehen, ſo wie durch Umdrehung des Quadranten die Halbkugel entſteht, (389 §. G.) Der runde Körper hätte die Eigenſchaft, daß alle auf der Axe AC ſenkrechte Querſchnitte Kreiſe ſeyn würden: legte man aber durch AC ſelbſt eine Ebene, ſo würde ihre Durchſchnittsfigur mit der Oberfläche des Körpers allemahl eine krumme Linie ſeyn, die der Linie AMB gleich und ähnlich wäre. Ohngefehr ſo eine Geſtalt hat die obere Wölbung der Klocken, die bey Luftpumpen gebräuchlich ſind, deswegen wird es verſtattet ſeyn, dieſe Vorausſetzung bey Auflöſung der folgenden Aufgabe anzunehmen.

135 §.

Die Stärke des Drucks zu finden, womit die eingeſchloſſene verdichtete Luft gegen die obere Wölbung der Klocke preßt.

Aufl.

Aufl. Es ſey AC die Axe der Klocke, und BMAD ein Schnitt durch dieſe Axe, die zu dem unbeſtimmten Punct M gehörige rechtwinklichte Ordinate MP $= y$, die Abſciſſe AP $= x$, der Bogen AM $= s$, und das Element dieſes Bogens M$m = ds$. Ferner ſey MT eine Tangente, welche die Axe in T ſchneidet, ſo weis man nun ſchon aus oft vorgekommenen Beyſpielen, daß man ſich das Element Mm als eine unendlich kleine grade Linie vorſtellen könne, welche mit der Tangente MT in einerley Richtung liegt. Dieſer Vorſtellung gemäß kan man die Ordinate mp ſo nahe bey PM annehmen, daß P$p =$ Mr als ein Differential der Abſciſſe x, und rm als das zugehörige Differential der Ordinate y zu betrachten iſt; ſo hat man ſin PMT $= \frac{dx}{ds}$, und coſ PMT $=$ 58 Fig.

$\frac{dy}{ds}$ (Man vergleiche den 11 §. Hydraul.). Ein Paar Ebenen durch P und p auf AC ſenkrecht geſetzt geben auf der Oberfläche des Körpers ein Paar Kreiſe MN und mn, und die Zone zwiſchen dieſen Kreiſen, kan als eine abgekürzte Kegelfläche betrachtet werden, wie man gleich ſiehet, wenn man annimmt, daß ſich alles um die Axe AC drehe. Demnach iſt die Fläche dieſer Zone $= 2\pi y ds$ (610 §. G.) Nun ſey MQ auf der Tangente MT ſenkrecht, ſo iſt dies die Richtung des Drucks der Luft gegen die Fläche der Zone. Die Summe aller Kräfte MQ für dieſe Zone ſey $= d$W, ſo iſt dW $= 2\gamma\pi a y ds$, wenn a und γ die Bedeutung des 132 §. behalten. Zerlegt man ferner alle Kräfte MQ nach den Richtungen MR mit AC parallel und MS auf AC ſenkrecht,

und

und ſetzt die Summe aller Kräfte MR für eben die Zone $= dV$, ſo iſt $dV = dW \cos QMR = dW \cos PMT = \frac{dy}{ds} . dW$; folglich $dV = 2\gamma\pi a y dy$, und die Integration giebt $V = \gamma\pi a y^2$, weil y und V zugleich verſchwinden müſſen. Dies iſt nun der Druck auf das Segment MAN, und wenn man AP der ganzen Höhe der Wölbung gleich ſetzt, ſo wird y dem Halbmeſſer r der Grundfläche der Klocke gleich; folglich iſt für die ganze Wölbung der geſuchte Druck $V = \gamma\pi a r r$. **Eben ſo groß iſt der Druck der Luft gegen die Grundfläche der Klocke.** Nimmt man die innere Luft n mahl dichter an, als die Atmoſphäre, und läſt h die Bedeutung des 133 §. behalten; ſo wird $V = \gamma\pi n h r r$, und wenn die Klocke von auſſen mit der Atmoſphäre umgeben iſt, ſo hat man $V = \gamma\pi(n-1)hrr$.

136 §.

Eine Klocke von 1000 Cubic-Zoll Inhalt hat ohngefehr 9 Zoll im Durchmeſſer (80 §.) und auf einen Kreis von 1 Zoll im Durchmeſſer drückt die Atmoſphäre mit einer Gewalt von etwa 12 Pf. folglich auf einen Kreis von 9 Zoll im Durchmeſſer mit einer Gewalt von 12.81 = 972 Pf. Wäre nun die Luft unter der Klocke fünfmahl dichter, als die äuſſere, ſo würde die Klocke mit einer Gewalt von viermahl 972 Pf., alſo 3888 Pf. aufwärts getrieben werden. Dieſe Gewalt hätten demnach die Schrauben auszuſtehen, womit die Klocke etwa ſo, wie es im 94 §. beſchrieben iſt, befeſtiget wird: eine Luft in der Klocke, die nur dreymahl dichter wäre, als die Atmoſphäre, würde gegen die Schrauben

ſchon

ſchon eine Gewalt von 1944 Pf. ausüben. Bey kleinern Klocken nimmt dieſer Druck in dem Verhältniß der Quadrate der Durchmeſſer ihrer Grundflächen ab: eine Klocke von 7 Zoll im Durchmeſſer würde von der fünfmahl dichtern Luft mit einer Gewalt von 2352 Pf., von der dreymahl dichtern Luft aber mit einer Gewalt von 1176 Pf. gegen die Schrauben gepreſt werden.

137 §.

Die Dichtigkeit der Luft, welche die Klocke, oder ſonſt ein ähnliches Gefäß umgiebt, mag übrigens mit der Dichtigkeit der Atmoſphäre überein kommen, oder davon verſchieden ſeyn, ſo läſt ſich die Gewalt, welcher das Gefäß ausgeſetzt iſt, auf ähnliche Art finden. Die äuſſere Luft ſey m mahl dichter, als die Atmoſphäre, die innere aber n mahl, ſo muß man im 136 §. $a = nh$ ſetzen, und es wird nun $dW = 2\gamma\pi(n-m)hyds$, alſo $dV = 2\gamma\pi(n-m)hydy$, und $V = \gamma\pi(n-m)hyy$, folglich für das ganze Gefäß $V = \gamma\pi(n-m)hrr$, wenn r den Halbmeſſer der Grundfläche bedeutet. Es iſt für ſich ohne Rechnung klar, daß es auf das Verhältniß der Dichtigkeiten der innern und äuſſern Luft gegen einander ankomme, ob die Klocke wie die bisherige Rechnung annimmt aufwärts gegen die Schrauben, oder abwärts gegen den Teller der Luftpumpe gepreſt werde. Verdünnt man die Luft unter der Klocke, ſo hat man den letzten Fall, es iſt alsdenn $m > n$, und V wird negativ: das heiſt die Richtung dieſes Drucks iſt dem vorigen entgegen geſetzt. Weil man nun die Richtung dieſes Drucks ohnehin in jedem Fall wiſſen kan, ſo iſt es eben nicht nöthig, das Zeichen (—) voran

zu ſetzen, wenn $m > n$ iſt, man kan alsdenn $V = \gamma\pi(m-n)hrr$ annehmen.

Hat man demnach die Verdünnung der Luft in der Klocke ſo weit getrieben, daß ihre Federkraft nicht mehr merklich iſt, ſo wird $V = \gamma\pi hrr$ in den gewöhnlichen Fällen, wo die Klocke von der natürlichen Atmoſphäre umgeben, alſo $m = 1$ iſt. Eine 9 zollige Klocke wird demnach mit einer Gewalt von 972 Pf. gegen den Teller gedruckt, eine 7 zollige mit einer Gewalt von 588 Pf. u. ſ. f.

138 §.

Dieſe Schlüſſe erläutern nun völlig die im 37 §. Aeroſtat. ſchon erwehnten Verſuche mit den Guerikiſchen Halbkugeln. Diejenigen, welche Guerike das erſtemahl machen ließ, hatten $\frac{5}{8}$ Magdeburgiſche Ellen im Durchmeſſer: und in einem Briefe an Schotten vom 22 Jul. 1656, woſelbſt er ihrer zum erſten mahl erwehnt, heiſt es von ihnen, daß ſechs ſtarke Männer ſie nicht von einander reiſſen können, wenn die Luft gehörig ausgepumpt worden. Man ſehe Schotti Technicam Curioſam Lib. I. Cap. XII. p. 30. Die Magdeburgiſche Elle, welche Guerike gebraucht hat, ſcheint mit der Cöllniſchen, Frankfurter, Hamburger, Königsberger und Leipziger Elle einerley geweſen zu ſeyn, wovon 120 mit 100 Brabander Ellen gleich geſchätzt werden, obgleich nach den neueſten Vergleichungstafeln, dieſe Ellen nicht alle gleich lang ſind. Ihre eigentliche Länge lieſſe ſich aus folgendem Verſuch beſtimmen, welchen Guerike angeſtellet hat. Ein Magdeburgiſches halbes Stübchen-Maaß, fand er $\frac{19}{100}$ einer Magdeburgiſchen Elle im Durchmeſſer weit, und $\frac{38}{100}$ eben der Elle hoch; alſo

war

war der Inhalt 0,010830 Cubic-Ellen. Dies Maaß faſte $4\frac{1}{8}$ oder 4,125 Cölniſche Pfund Waſſer, (nach Guerikens Angabe ſolche Pfunde, wovon jedes 16 Reichsthaler ſchwer iſt: aber 8 Rthlr. nach dem alten Reichsfuß müſſen eine Cölniſche Mark wägen, und 9 Rthlr. aus der Mark fein gemünzt werden). Demnach iſt das Gewicht einer Magdeburgiſchen Cubic-Elle $= \frac{4,125}{0,010830} = 381$ Cölniſche Pfund. Weil nun 1 Pariſer Cubic-Fuß Waſſer ohngefehr 71 Pariſer Pfunde wiegt, (dies iſt das Mittel der im 50 §. Stat. erzehlten Verſuche) oder $\frac{315}{304} \cdot 71 = 73\frac{1}{2}$ Cölniſche Pfunde; ſo iſt 1 Magdeb. Cub. Elle: Pariſ. Cubic-Fuß $= 381 : 73\frac{1}{2}$ und es wird 1 Magdeb. Elle = 1 Par. Fuß $\sqrt[3]{\frac{381}{73\frac{1}{2}}}$ = 1,732 Par. Fuß = 249,4 Pariſ. Linien, oder beynahe 250 Linien, und dies iſt die Länge der Leipziger Elle, die nach den neueſten Vergleichungstafeln 250,6 Pariſer Linien beträgt.

Wenn man in der Gleichung $V = \gamma\pi hrr$ (137 §.) durch γ das Gewicht einer Magdeburgiſchen Cubic-Elle Waſſer verſteht, und alsdenn auch h in eben dem Maaſſe ausdrückt, ſo kan man für r die von Guerikenangegebenen Zahlen behalten, und man bedarf vorſtehender Reductionen nicht, nur muß man h richtig annehmen. Guerike hat durch mehrmahls wiederhohlte Beobachtung die Höhe h von $18\frac{3}{4}$, 19 bis $19\frac{1}{2}$ Magdeburgiſchen Ellen befunden: M. ſ. die Experimenta Nova Magdeb. Lib. III. Cap. XIX. pag. 97. er nimmt aber a. a. O. Cap. XXII. pag. 101. ſqq. dafür 20 Ellen an, welches das äuſ-

ſerſte iſt, und nach der vorſtehenden Vergleichung noch etwas über 34 Pariſer Fuß ausmachen würde, wobey dann die Barometerhöhe 29 Pariſer Zoll und drüber betragen müſte. Behält man indeſſen die Guerikiſche Zahl bey, ſo findet man den Druck auf die Halbkugeln von $\frac{5}{8}$ Ellen im Durchmeſſer =

$$\frac{25}{256} \cdot \frac{22}{7} \cdot 20 \cdot 381 = \frac{25 \cdot 55 \cdot 381}{32 \cdot 7} = 2338 \text{ Pf.},$$

alſo war es kein Wunder, daß 6 ſtarke Leute ſie nicht von einander reiſſen können. Wenn ſie auch alle nach einer Seite gezogen haben, ſo hätte doch jeder beynahe 400 Pf. Widerſtand überwinden müſſen.

139 §.

Nach der Zeit ließ Guerike noch ein Paar andre Halbkugeln machen, die völlig $\frac{3}{4}$ Ellen im Durchmeſſer haben ſollten. Sie geriethen aber nicht völlig ſo groß, und ihr Durchmeſſer ward, als ſie fertig waren, nur $\frac{67}{100}$ einer Elle groß befunden. Der Druck der Luft auf ſie war demnach $= \frac{22}{7} \cdot 20 \cdot 381 \cdot 0{,}11225 = 2687$ Pf. Dieſelbe Zahl findet auch Guerike a. a. O. und dieſe Kugeln ſind es, welche er verſchiedene mahl mit 16 Pferden, 8 auf jeder Seite, zu zerreiſſen verſucht hat, das ſie zuweilen nur mit Anſtrengung aller Kräfte zu Stande gebracht haben. Jedes Pferd hat demnach eine Gewalt von etwa 336 Pf. anwenden müſſen: und wenn man ſich etwa den Zweifel machte, deſſen auch Guerike erwehnt, daß gleichwohl ein Pferd auf einem Wagen 10 Centner, alſo 1000 bis 1100 Pf. ziehen könne; ſo muß man erwegen, daß in ſolchem Fall die ganze Laſt von dem Erdboden getragen wird, und das Pferd nichts als den Widerſtand der Friction zu überwinden

den habe, der hier noch wohl lange nicht $\frac{1}{3}$ der Laſt beträgt.

Um das anſcheinend wunderbare des Verſuchs noch mehr zu vergröſſern, ließ Guerike noch ein drittes Paar Halbkugeln machen, die eine ganze Elle im Durchmeſſer haben ſollten, aber als ſie fertig waren, nur $\frac{65}{100}$ einer Elle im Durchmeſſer hielten. Dieſe muſten demnach mit einer Gewalt von $\frac{95^2}{67^2}$. 2687 Pf. von der Luft zuſammen gedruckt werden, welches 5400 Pf. beträgt. Wenn nun 16 Pferde, 8 auf jeder Seite, den Widerſtand von 2687 Pf. kaum überwinden konnten, ſo würden den Widerſtand von 5400 Pf. zu überwinden 34 Pferde erfordert worden ſeyn. Es iſt alſo ſicher, daß 30 Pferde, 15 auf jeder Seite, dieſe letztern Halbkugeln nicht aus einander gebracht hätten, wie im 37 §. Stat. angegeben iſt.

140 §.

Wenn man ſtatt der gläſernen Klocke ein metallenes cylindriſches Gefäß, wie Leupold und Graveſand, ſo einrichten wollte, daß ſich die Luft in demſelben zuſammen preſſen lieſſe; ſo würde man die nöthige Dicke der cylindriſchen Oberfläche eben ſo, wie im 130 §, die nöthige Dicke der gläſernen Klocke finden können. Die Feſtigkeit des Metalles müſte bekannt ſeyn, da dann der 184 §. Stat. nebſt dem am Ende des III. Th. beygefügten Zuſatz zu Rath gezogen werden kan. Der Druck der eingeſchloſſenen Luft gegen die Grundflächen dieſes cylindriſchen Gefäſſes iſt leicht zu berechnen: man wird ſich aber aus dem 95 §. erinnern, daß man in dieſe

Grundflächen Glasſcheiben ſetzt, um ſie durchſichtig zu machen, und deswegen wäre wohl eine ſichere Regel zu wünſchen, die nöthige Dicke dieſer Glasſcheiben zu finden, wenn ſie dem Druck der eingeſchloſſenen Luft hinlänglich gewachſen ſeyn ſollen. Man ſiehet wohl, daß es hiebey nicht blos auf die abſolute Feſtigkeit des Glaſes ankomme, ſondern zugleich auf die reſpective Feſtigkeit der Scheiben, bey deren Berechnung auf die Geſtalt der Scheiben, und die Art und Weiſe, wie der Bruch erfolgt, Rückſicht genommen werden muß. Was nun insbeſondere den letztern Umſtand betrift, ſo läſt ſich darüber ſchwerlich etwas allgemein anwendliches feſtſetzen: bald erfolgt der erſte Riß mitten durch die Scheibe, bald laufen die Riſſe vom Mittelpunct gegen die Peripherie, bald wird nur ein Stück aus der Mitte heraus geſchlagen, und wenn der Druck ſchleunig überhand nimmt, ſo zerſpringt alles in eine groſſe Menge kleiner Stücke, die jedoch mehrentheils nahe am Umfang abbrechen, beſonders alsdenn, wenn der Umfang der Scheibe in einer Fuge des Gefäſſes, etwa wie in einem Rahmen feſt eingeſetzt iſt. **Mariotte** a. a. O. hat über die Feſtigkeit ſolcher Scheiben einige Unterſuchungen angeſtellet, und ich werde davon eine kurze Nachricht mittheilen.

141 §.

Eine viereckte Glasplatte, $1\frac{3}{4}$ Linien dick und 11 Zoll lang, (die Breite iſt nicht angezeiget,) ward mit den beiden äuſſerſten Enden auf ein paar Unterlagen gelegt, die 9 Zoll weit von einander entfernt waren. In der Mitte der Glasplatte ward vermittelſt einer zarten, jedoch hinlänglich feſten Schnur,

ein

ein Becher aufgehangen, in den man nach und nach Gewichte legte, bis die Glasplatte zerbrach: dies erfolgte von $1\frac{3}{4}$ Pfund, und der Bruch geſchahe in der Mitte. Mit einer völlig gleichen Glasplatte ward der Verſuch mit dem Unterſcheid wiederholt, daß man nun die äuſſerſten Enden zwiſchen zweyen platten Hölzern einklemmte: nun erfolgte der Bruch allererſt von 3 Pf. und 1 Unze, und zwar an den beiden äuſſerſten Enden neben den Hölzern, zwiſchen denen ſie eingeklemmt waren. Die Platte war demnach das zweyte mahl einem beynahe doppelt ſtärkern Druck gewachſen, als das erſte mahl, und das hatte ohne Zweifel die Urſache, weil der Bruch an zweyen Stellen zugleich erfolgte, und nochmahl ſo viel Theile auf einmahl von einander reiſſen muſten. Man kan hieraus die Folge ziehen, daß ſolche Glasſcheiben, die in einem Rahmen feſt eingeſetzet ſind, mehr ja faſt doppelt ſo viel reſpective Feſtigkeit haben, als wenn ſie unbefeſtiget auf einem ſolchen Rahmen etwa nur oben auf liegen, und alles übrige ſonſt einerley iſt. Mariotte fügt noch ein paar Verſuche bey, woraus eben das folgt.

142 §.

Weil eine ſolche Glasplatte die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, ſo wird man am erſten darauf verfallen, die reſpective Feſtigkeit verſchiedener Glasplatten nach der Regel des 192 §. Stat. zu vergleichen, und anzunehmen, das Verhältniß ihrer reſpectiven Feſtigkeiten ſey aus den Verhältniſſen der Breite, des Quadrats der Dicke, und dem umgekehrten Verhältnis der Länge zuſammen geſetzt. Man verſtehe durch A und *a* die Län-

ge, durch B und b die Breite, durch C und c die Dicke zwoer Glasplatten, wovon F und f die reſpectiven Feſtigkeiten ſind; ſo hat man $F : f = \frac{C^2 B}{A} : \frac{c^2 b}{a}$, alſo $f = \frac{A}{C^2 B} \cdot \frac{c^2 b}{a} \cdot F$. Dieſe Regel ſetzt Mariotte zum Grunde, und wenn man ihm darin folgen will; ſo läſt ſich die reſpective Feſtigkeit zweyer kreisrunden Glasſcheiben, die in eine Art von Rahmen gehörig eingeſetzt ſind, etwa auf folgende Art mit einander vergleichen. Man muß entweder annehmen, daß dieſe Scheiben, wenn eine Laſt darauf drückt, nach der Richtung des Durchmeſſers zerſpringen, ſo daß der Riß durch die Mitte geht, oder man nimmt an, daß alles rund um an der Peripherie nahe bey dem Rahmen abſpringt. Im erſten Fall muß man durch B und b die Durchmeſſer der Scheiben, im zweyten Fall ihre Peripherien verſtehen: ſtatt A und a aber muß man allemahl ihre Halbmeſſer oder Durchmeſſer ſetzen. Es wäre demnach dieſer Vorausſetzung gemäß $B : b = A : a$, folglich $A . b = B . a$, und $\frac{A . b}{B . a} = 1$. Daraus würde nun $f = \frac{c^2}{C^2} . F$, und bey gleicher Dicke $f = F$ folgen.

143 §.

Man wird leicht bemerken, daß die Schlüſſe des vor. §. nicht blos auf kreisrunde Glasplatten eingeſchränkt ſind, ſondern allemahl ihre Anwendung finden, wenn die Peripherien derſelben ähnliche Figuren ſind. Nimmt man an, daß die Schwerpuncte mit Gewichten beſchwert ſind, die F und f heiſſen, ſo

ſo haben dieſe Schwerpuncte in beiden Figuren gegen ihre Peripherien einerley Lage; und wenn man in der einen Figur einen Durchmeſſer der Schwere (67 §. Stat.) ziehet, ſo giebt es auch in der andern einen ſolchen Durchmeſſer, der gegen die Peripherie eben die Lage hat. Bey Anwendung der Proportion des vor. §. werden ſich nun A und *a* wie ein paar ſolcher Durchmeſſer verhalten, B und *b* werden die Peripherien bedeuten, wenn man annimmt, daß alles an den Peripherien abbricht, oder auch ein paar ähnlich liegende Durchmeſſer, wenn man annimmt, daß die Riſſe durch die Mitte gehen. Allemal aber hat man $A:a = B:b$, und $A.b = B.a$, folglich $f = \frac{c^2}{C^2}.F$, und bey gleicher Dichte $f = F$. Das hieſſe nun: ähnliche, obgleich ungleiche, Glastafeln und ungleiche Glasſcheiben, wenn ſie in Rahmen gehörig befeſtiget ſind, können in ihren Schwerpunkten gleiche Gewichte tragen ohne zu zerbrechen, wenn ſie gleich dick ſind. Der Satz iſt richtig unter der Bedingung, wofern die Vorausſetzungen richtig ſind, woraus er geſchloſſen iſt, ſo ſonderbar er auch auf einige Augenblicke ſcheinen mögte. Man ſtelle ſich, um ihn deſto mehr ins Licht zu ſetzen, ein paar ähnliche und ungleich lange Rechtecke aus Glas vor, die nur an zweyen Enden unterſtützt ſind, wie im 141 §. angenommen ward. Wenn nun das eine nochmahl ſo lang als das andre iſt, ſo iſt es auch nochmahl ſo breit: wegen der doppelten Länge würde jenes, wenn es mit dem andern einerley Breite hätte, von einem halb ſo groſſen Gewicht zerbrechen, als das andre; es hat aber wegen der doppelten Breite

auch doppelt ſo viel Feſtigkeit, und deswegen trägt es ein eben ſo groſſes Gewicht, als das andre. Dieſer Fall iſt von demjenigen, wenn man annimmt, daß die Vierecke rund um in Rahmen eingeſchloſſen ſind, in nichts als darin unterſchieden, daß man annimmt, der Bruch erfolge an allen vier Seitenlinien auf einmahl, oder doch wenigſtens ſo, daß die Linie des Riſſes in beiden einerley Lage habe.

144 §.

Wenn ein paar Glastafeln, oder Scheiben, unter die Umſtände geſetzt werden, daß man die Luft unter denſelben verdünnen kan, etwa ſo, wie es im 36 §. Aeroſtat. beſchrieben iſt; ſo leiden ſie von der Atmoſphäre einen Druck, der auf ihre ganze Fläche gleichförmig verbreitet iſt, und die mittlere Richtung deſſelben geht durch ihren Schwerpunct. Eben ſo eine Bewandniß hat es mit dem Druck der verdichteten Luft gegen die Glasſcheiben, welche Graveſand und Leupold in den Grundflächen der cylindriſchen Gefäſſe befeſtigen, die für die zuſammen gepreßte Luft beſtimmt ſind. Wofern alſo die im 142 §. angenommenen Vorausſetzungen in der Natur ſtatt haben, ſo werden ein paar gleich dicke Glasſcheiben, wenn ſie ungleich groß ſind, einen gleichen Druck der Luft gewachſen ſeyn. Das heiſt aber nicht: ſie werden den Druck einer gleich ſtark verdichteten Luft aushalten können. Denn der Druck der Luft von einerley Dichtigkeit gegen ſolche Scheiben iſt ihrer Fläche proportional: deswegen wird eine doppelt ſo groſſe Scheibe nur dem Druck einer halb ſo dichten Luft gewachſen ſeyn, als die einfache: und überhaupt wird die Dichtigkeit der

Luft,

Luft, deren Druck ungleich groſſe Scheiben ertragen können, dem Quadrat ihrer Durchmeſſer umgekehrt proportional ſeyn. Dies iſt Mariotts Lehrſatz a. a. O. 386 u. f. S., den er ſo ausdrückt: wenn ein gewiſſes Gewicht, das auf der ganzen Fläche einer Glastafel gleichförmig vertheilet iſt, dieſe Tafel zerbricht: ſo wird eben daſſelbe Gewicht auf einer jeden andern Tafel von eben der Dicke gleichförmig vertheilt, dieſe Tafel auch zerbrechen, ſie ſey übrigens ſo groß, als ſie wolle. Sein Sinn iſt eigentlich, die letzte Tafel wird dem Druck eines eben ſo groſſen auf ihrer Fläche gleichförmig vertheilten Gewichts gewachſen ſeyn, von einem kleinern Gewicht wird ſie noch nicht zerbrechen. Mariotts Beweis iſt nur etwas anders eingekleidet, als ich ihn hier abgekürzt vorgetragen habe, ſonſt beruht er auf eben denſelben Gründen: ich habe ihn hier allgemeiner vorgeſtellt, und die Einſchränkungen, welchen er unterworfen iſt, deutlich ins Licht zu ſetzen geſucht. Kan man annehmen, daß Holz und andre zerbrechliche Materien ſich nach den angenommenen Vorausſetzungen richten, ſo wird der Satz ſelbſt, wie auch Mariotte annimmt, bey ſolchen Materien ebenfalls ſeine Anwendung finden.

145 §.

Dieſer Mariottiſche Lehrſatz hat aber nicht durchgängig Beyfall gefunden, und die Verſuche, welche man angeſtellt hat, um ihn zu prüfen, haben faſt allemahl das Gegentheil gelehret: ſie haben gewieſen, daß gröſſere Glastafeln ſchon von einem merklich kleinern auf ſie gleichförmig vertheil-

ten Druck zerbrechen, als kleinere Tafeln. Mariotte ſelbſt hat keine Verſuche darüber angeſtellet: es finden ſich aber beym Muſſchenbroek in der Introd. ad Phil. Naturalem Tom. I. Cap. XXI. p. 468. ſqq. verſchiedene hieher gehörige Verſuche. Ein metallenes cylindriſches Gefäß hatte in ſeinem horizontalen Boden eine runde Oefnung von $5\frac{1}{8}$ Rheinl. Zoll im Durchmeſſer; dieſe ward mit einer Glasſcheibe von 6 Zoll im Durchmeſſer bedeckt, und der Rand umher mit Wachs verſtrichen, damit man das Gefäß alsdenn mit Waſſer anfüllen konnte. Durch den Deckel des Gefäſſes, welcher mit Schrauben befeſtiget ward, ſteckte eine gläſerne 8 Fuß hohe und 1 Zoll im Durchmeſſer weite verticale Röhre; ſie war oben und unten offen, und zugleich an einer hölzernen Tafel befeſtiget, worauf man Abtheilungen in Fuſſe und Zolle angebracht hatte. In dieſe Röhre ward oben nach und nach Waſſer gegoſſen, ſo lange, bis die im Boden des Gefäſſes befindliche Glasſcheibe vom Druck des Waſſers zerbrochen ward, und die Gröſſe dieſes Drucks ließ ſich alsdenn aus der Höhe, die das Waſſer erreicht hatte, berechnen.

Wenn man etwas ſtarke Glasſcheiben prüfen will, ſo iſt der Waſſerdruck von 8, 10 bis 12 Fuß Höhe nicht mehr hinlänglich, ſie zu zerbrechen. Bringt man ſie aber, wie im 36 §. Aeroſtat. auf die Luftpumpe, ſo kan durch Verdünnung der Luft unter derſelben der Druck der Atmoſphäre auf ſie ſo viel Uebergewicht bekommen, als wenn eine 32 Rheinl. Fuß hohe Waſſerſäule darauf ſtünde. Iſt alsdenn die Pumpe mit dem im 90 §. beſchriebenen Mercurial-Zeiger verſehen; ſo weiß man, daß der vom Uebergewicht der Atmoſphäre über die unter der

Scheibe

Scheibe befindliche verdünnte Luft herrührende Druck ſo groß ſey, als wenn auf die Scheibe eine Queckſilber-Säule drückte, ſo hoch als das Queckſilber im Zeiger ſteht. So hat Muſſchenbroeck Scheiben von 3,4 Zoll im Durchmeſſer geprüft, die auf Oefnungen von 3 Zoll im Durchmeſſer lagen. Ich ſetze nun die Reſultate der Muſſchenbroekſchen Verſuche her.

146 §.

Die Verſuche mit Scheiben von 6 Zoll im Durchmeſſer, und $5\frac{1}{6}$ Zoll Oefnung.

Art des Glaſes	deſſen Dicke	Stärke des Drucks, der es zerſprengte.
Venetianiſches	$\frac{9}{100}$ Zoll	90 Pf. 3 Unz. 2 Dr. $1\frac{1}{2}$ Gr.
Mecklenburg.	$\frac{5}{100}$ =	46 = 10 = 1 = 20 =
Pommerſches	$\frac{4}{100}$ =	33 = 11 = 2 = 39 =
Franzöſiſches	$\frac{4}{100}$ =	24 = 4 = 6 = 4 =
Engliſches	$\frac{6}{100}$ =	45 = 7 = 2 = 51 =
Spiegelglas von noch andrer Art	$\frac{11}{100}$ =	$182\frac{7032}{7680}$ Pf.

Die Verſuche mit Scheiben von 3,4 Zoll im Durchmeſſer, und 3 Zoll Oefnung.

Art des Glaſes	deſſen Dicke	Stärke des Drucks der es zerſprengte.
Venetianiſches	$\frac{9}{100}$ Zoll	103 Pf. 4 Unz. 1 Dr. 2 Gr.
Mecklenburg.	$\frac{5}{100}$ =	47 = 13 = 6 = 28 =
Pommerſches	$\frac{4}{100}$ =	43 = 0 = 3 = 34 =
Franzöſiſches	$\frac{4}{100}$ =	46 = 11 = 3 = 50 =
Engliſches	$\frac{6}{100}$ =	88 = 5 = 6 = 24 =

Bey

Bey dem erſten Verſuch bekam die 6 Zoll breite Scheibe aus Venetianiſchen Glaſe ſchon einen Riß, als der Waſſerdruck 84 Pf. 11 Unzen 3 Drachmen 45 Gran betrug: bey dem Druck von 90 Pf. 3 Unz. 2 Dr. 1½ Gr. aber ward ein Stück heraus geſchlagen.

Aus Vergleichung der fünf letzten Verſuche mit den fünf erſten ſiehet man nun wohl, daß die kleinern Scheiben insgeſammt einen ſtärkern Druck ausgehalten haben, als die gröſſern von eben der Glaßart. Nur bey dem Mecklenburgiſchen Glaſe trift die Mariottiſche Regel ziemlich nahe zu, weil die kleinere Scheibe wenig über ein Pf. mehr als die gröſſere getragen hat, welches hier nur $\frac{1}{46}$ des kleinern Drucks ausmacht: dagegen iſt beym Franzöſiſchen und Engliſchen Glaſe die Abweichung deſto ſtärker, weil die kleinern Scheiben beynahe nochmahl ſoviel Druck als die gröſſern ausgehalten haben. Dies könnte nun die Vermuthung veranlaſſen, daß die Laſten, welche die Scheiben tragen können, ſich ohngefähr umgekehrt wie ihre Durchmeſſer verhalten, weil die gröſſern Scheiben mehrentheils nochmahl ſo breit im Durchmeſſer waren, als die kleinern. Wollte man wegen der Federkraft des Glaſes bey Vergleichung der reſpectiven Feſtigkeiten zweyer Glaßplatten etwa ſo wie im 204 u. f. §. §. der Statik bey Vergleichung der Stärke verſchiedener Pfeiler verfahren, ſo würde man herausbringen, das Verhältniß ihrer reſpectiven Feſtigkeiten ſey aus den Verhältniſſen der Breite, des Quadrats der Dicke, und dem umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Länge zuſammen geſetzt. Man hätte alsdenn im 142 §. die Proportion

portion $F:f = \frac{C^2B}{A^2} : \frac{c^2b}{a^2}$, und man würde bey Fortſetzung der dortigen Schlüſſe auf den Ausdruck $f = \frac{c^2}{C^2} \cdot \frac{A}{a} . F$ kommen, da dann $A:a$ das Verhältniß der Durchmeſſer der Scheiben bedeuten würde. Bey gleicher Dicke wäre $f = \frac{A}{a} . F$, und dies käme mit der eben erwehnten Vermuthung überein.

147 §.

Ich getraue mir indeſſen nicht, weder das eine noch das andre Geſetz mit Sicherheit anzunehmen, weil ſich die Natur nicht nach den Vorausſetzungen richtet, die man willkührlich zum Grunde legt. Sehr ſelten haben wohl die Linien, nach welchen die Riſſe entſtehen in kreisrunden Scheiben, und ähnlichen Glaßtafeln einerley Lage, und dies deswegen, weil die ſtärkern und ſchwächern Stellen nicht auf einerley Art, und in einerley Lage darin vertheilt ſind, die Riſſe aber allemahl an den ſchwächſten Stellen entſtehen. Hat dies ſeine Richtigkeit, ſo läſt ſich das Moment des Gewichts, welches den Riß verurſacht auch gar nicht mit Zuverläßigkeit in Rechnung bringen. Weil überdem gröſſere Tafeln wohl meiſtentheils mehr ſchwache Stellen haben, als kleinere, ſo kan es ſich treffen, daß die kleinere Tafel gar keine ſo ſchwache Stellen hat, als ſich unter den ſchwächern Stellen der gröſſern finden, die hier wohl gar grade ſo liegen, daß das Moment der auf die Tafel drückenden Laſt gegen ſie unter allen übrigen am gröſten

gröſten iſt, und ſo iſt es kein Wunder, wenn gröſſere Tafeln und Scheiben leichter, als kleinere brechen. Muſſchenbroeck a. a. O. will dies noch auf eine andre Art erklären. Er ſetzt zum Grunde, daß die Glaßſcheibe von der auf ſie gleichförmig vertheilten Laſt (dem drüber ſtehenden Waſſer, oder der Luft) vor dem Bruch eingedruckt und gekrümmt werde. Eine kleinere Glaßſcheibe wird nun ſtärker gekrümmt, als eine gröſſere, bevor beyde auf einerley Tiefe eingedruckt ſeyn können. Nimmt man ferner an, daß ein paar ähnlich liegende Elemente in beyden Scheiben einerley verticalen Druck leiden, und zerlegt den Druck auf jedes Element in zwo andre auf daſſelbe ſenkrecht, und damit parallel; ſo iſt der ſenkrechte Druck auf das Element in der kleinern Scheibe wegen der ſtärkern Krümmung kleiner als auf das Element der gröſſern Scheibe. Daraus folgert Muſſchenbroeck, daß die kleinere Scheibe einen gröſſern Druck des Waſſers oder der Luft tragen könne, als die gröſſere. Allein eine ſolche Zerlegung des Drucks in den ſenkrechten und parallelen kan hier nicht ſtatt haben, weil der Druck des Waſſers und der Luft auf jedes Element ſchon für ſich ſenkrecht, und nicht vertical iſt, wie Muſſchenbroeck annimmt, alſo bey gleichen Waſſerhöhen, und gleicher Federkraft der über die Glaßſcheiben befindlichen Luft das Element der einen nach der ſenkrechten Richtung ſo ſtark, als das andre gedruckt wird.

148 §.

Aus dieſem allen wird man nun wohl die Folge ziehen, daß es am ſicherſten ſey, die Feſtigkeit ſolcher Glaßſcheiben, welche man in den für die verdichtete

Luft

Luft beſtimmten Gefäſſen gebrauchen will, durch unmittelbare Verſuche zu prüfen, und bey ſtark verdichteter Luft um mehrerer Sicherheit willen eine ſolche Einrichtung zu machen, wodurch das Auge des Beobachters bey unvermuthetem Zerſpringen einer Glaßſcheibe gegen Beſchädigung geſichert wird. Indeſſen dienen doch die bisherigen Unterſuchungen, wenn ſie mit den Muſſchenbroeckſchen Erfahrungen verbunden werden, einen ohngefehren Ueberſchlag zu machen, wie weit die Verdichtung der Luft im Gefäß mit Sicherheit getrieben werden könne, wenn die Abmeſſungen der eingeſetzten Glaßſcheiben bekant ſind, und mit Scheiben von eben der Glaßart ſchon einige vorläufige Verſuche angeſtellt ſind. Die Scheiben in dem Graveſandſchen Gefäß haben drey und einen halben Zoll Breite im Durchmeſſer, und ihre Dicke beträgt etwas mehr, als den dritten Theil eines Zolles. Die Oefnung aber, welche mit dieſem Glaſe bedeckt wird, iſt nicht völlig 3 Zoll im Durchmeſſer weit. Die von Muſſchenbroeck gepeüfte Scheibe aus Venetianiſchem Glaſe von 3,4 Zoll im Durchmeſſer und 3 Zoll Oefnung zerbrach grade, da die ganze Laſt der Atmoſphäre darauf drückte. Iſt es nun richtig, daß die Feſtigkeiten ſolcher Scheiben von einerley Glaßart ſich wie die Quadrate der Dicke verhalten, ſo zeigt der Quotient $\frac{1^2}{9^2} : \frac{9^2}{100^2} = 14$, daß die Scheibe in dem Graveſandſchen Gefäß bey einer 14mahl dichtern Luft, als die Atmoſphäre iſt, ſicher zerbrechen werde, und daß deswegen wohl keine ſtärkere Verdichtung, als bis auf die 7 oder 8 fache Dichtigkeit der Atmoſphäre zu wagen ſey.

149 §.

Die Schwierigkeiten, welche damit verbunden ſind, wenn man recht ſtark verdichtete Luft zuwege bringen will, haben bisher nicht verſtattet, entſcheidende Verſuche darüber anzuſtellen: wie weit ſich die Luft wohl überhaupt durch uns bekannte Kräfte der Natur zuſammen preſſen laſſe, und ob es hier eine Grenze gebe, die man ſchlechthin nicht überſchreiten könne? Boyle hat 13 mahl dichtere Luft, als die Atmoſphäre iſt, zuwege gebracht. Nach Halleys Bericht hat man aus Erfahrungen, die zu Londen, und von der Academie del Cimento angeſtellt ſind, geſchloſſen, daß keine Kraft vermögend ſey, die Luft 800 mahl dichter zu machen, als die Atmoſphäre iſt. Doch hat Halley die Erfahrungen und Verſuche ſelbſt nicht erzehlt, deswegen zweifelt Amontons noch, ob man berechtiget ſey, dieſe Grenzen anzunehmen. M. ſ. die Memoires de l'Acad. de Paris A. 1703. pag. 102. Hales hat vermittelſt einer Preſſe eine 38 mahl dichtere Luft, als die Atmoſphäre iſt, zuwege gebracht, und er meynt vermittelſt einer andern Veranſtaltung, die ich gleich etwas näher beſchreiben will, eine 1838 mahl dichtere Luft, als die Atmoſphäre iſt, zuwege gebracht zu haben. M. ſ. la Statique des Vegetaux & l'Analyſe de l'Air trad. de l'Anglois par M de Buffon, Par. 1735 Append. pag. 389. ſqq. Von einer gläſernen $4\frac{6}{100}$ Zoll langen und $\frac{16}{100}$ eines Zolles im Durchmeſſer weiten Röhre, ward das eine Ende zugeſchmolzen, und das offene Ende in eine kleine Phiole geſetzt, worin etwas Queckſilber mit ein wenig blau gefärbten Terpenthingeiſt war: die Phiole mit der Röhre aber ward hierauf in eine groſſe eiſerne vorher mit

Waſſer

Waſſer gefüllte Bombe geſetzt, die Oefnung der Bombe ward mit einem aus Stechpalmen-Holz verfertigten und mit Kütt aus Wachs und Therpentien beſtrichenen Zapfen geſchloſſen. Hierauf ward der Zapfen vermittelſt einer Preſſe mit Gewalt in die Bombe hinein gedrückt ſo lange bis das Waſſer durch die Zwiſchenräume des Zapfens durchdrang, und als nunmehro die Phiole mit dem Zapfen heraus genommen war, ſo fand man die gläſerne Röhre inwendig ſo weit gefärbt bis auf ein Stückchen am zugeſchmolzenen Ende von $\frac{12}{100}$ eines Zolles, und bis in dieſen kleinen Raum war alſo die Luft zuſammengepreßt geweſen. Dividirt man nun die Länge von 4,06 Zoll durch 0,12 Zoll, ſo müſte der Quotient 33,83 ergeben, wievielmahl die zuſammengepreſte Luft dichter, als die natürliche geweſen, die cylindriſche Geſtalt des innern Raums der Röhre vorausgeſetzt. Hales giebt die Zahl 38,44 an, und er muß wohl auf andre Art das Verhältniß des mit der zuſammengepreſten Luft angefüllten Raums zum Raum der ganzen Röhre geſucht haben. Dies konnte durch Anfüllung mit Waſſer und nachheriger Abwägung auf einer ſcharfen Wage geſchehen, und es wird auch würklich angegeben, daß das Gewicht des Waſſers, welches die ganze Röhre füllte, 1 Dr. und 6 Gr. betragen habe: wieviel Waſſer aber den kleinern Raum gefüllt habe, worin die Luft zuſammengepreſt worden, iſt nicht angezeigt.

150 §.

Um eine noch ſtärker verdichtete Luft zuwege zu bringen, brachte Hales die vorige mit Waſſer gefüllte Bombe, nachdem vorher die Phiole mit der Röhre

wie beym vorigen Verſuch herein geſetzt war, bey recht ſcharfen Froſtwetter unter die Preſſe. Er bedeckte hierauf die Bombe mit einer groſſen Menge zerriebenen Eiſes, welches mit ein Drittheil Meerſalzes vermiſcht war. Kurze Zeit nachher zerſprengte die davon entſtandene groſſe Kälte nicht allein die Bombe, ſondern auch die eingeſchloſſene Phiole mit der Röhre, und innerhalb der Bombe befand ſich eine Eisrinde von $\frac{3}{4}$ Zoll Dicke. Man konnte demnach nun die Gröſſe des Raums, worin die Luft war zuſammengepreßt worden, nicht unmittelbar meſſen, und deswegen ſucht ihn Hales durch Rechnung und zwar auf folgende Art zu finden. Er berechnet die Gewalt, welche die Bombe zu zerſprengen nöthig geweſen iſt, und nimmt an, die eingeſchloſſene Luft ſey mit eben der Gewalt zuſammengepreſt geweſen: jene Gewalt findet er 1837 mahl gröſſer, als den natürlichen Druck der Atmoſphäre, und ſchließt daraus, die Luft in der Röhre ſey in einen 1838 mahl kleinern Raum gepreſt geweſen. Die Rechnung läſt ſich der Gleichung des 145 §. gemäß anſtellen, weil ang nommen wird, daß der Druck auf die Bombe eben ſo groß geweſen wäre, wenn die ganze Bombe eben ſo ſtark verdichtete Luft, als die kleine Röhre enthalten hätte. Dieſemnach iſt die geſuchte Zahl $n = \frac{c.P}{yhffr} + 1$. Die Bombe war eiſern und an den ſchwächſten Stellen 1,2 engliſche Zoll dick, und dies giebt den Werth von c. Setzt man ferner Muſſchenbroeks Verſuch aus dem 184 §. Stat. zum Grunde, vermöge deſſen ein eiſerner Drat von 0,1 Rheinl. Zoll Dicke 450 Pf. tragen kan, bevor er zerreiſt, ſo wird $P = 450$ Pf., und $ff = \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{100}$

Rheinl.

Rheinl. Quadrat-Zoll, $= \frac{11}{1400 \cdot 144}$. Quadr. Fuß, und weil 1 Rheinl. Cubic-Fuß Waſſer ziemlich nahe 63 Amſterdammer Pf. wiegt, ſo wird $\gamma =$ 63 Pf. und $\frac{P}{\gamma} = \frac{450}{63} = \frac{50}{7}$. Der innere Durchmeſſer der Bombe war $6\frac{1}{2}$ Engl. Zoll, alſo iſt $\frac{c}{r}$ $= \frac{120}{325} = \frac{24}{65}$; ſetzt man alſo noch $h = 32$ Rheinl. Fuß, ſo wird $\frac{1}{hff} = \frac{1400 \cdot 144}{11 \cdot 32} = \frac{700 \cdot 9}{11}$, und dies giebt $n = \frac{24}{65} \cdot \frac{700 \cdot 9}{11} \cdot \frac{50}{7} + 1$ $= \frac{24}{13} \cdot \frac{700 \cdot 9}{11} \cdot \frac{10}{7} + 1 = 1513$. Statt dieſer Zahlen findet Hales die vorhin (162 §.) angezeigte Zahl 1838, allein die Zahlen, welche im Engliſchen Original ſtehen, ſind durchgängig fehlerhaft, und nach Büffons Verbeſſerung in der franzöſiſchen Ueberſetzung kommt die Zahl 1551 heraus. Eben die Zahl würde nach oben ſtehender Rechnung gefunden werden, wenn das Amſterdammer Pfund etwas ſchwerer und 1 Cub. Fuß Waſſer nach dieſem Gewicht 61,5 Pf. ſchwer geſchätzt würde.

151 §.

Ich habe Hales Verfahren bey dieſem Verſuch deswegen hergeſetzt, weil in ſehr vielen Lehrbüchern der Naturlehre ſtehet, Hales habe die Luft 1838 mahl, oder doch wenigſtens nach Büffons verbeſſer-

ten Rechnung 1551 mahl dichter gemacht, als die Atmoſphäre iſt, nicht anders als wenn dieſe Folge ohne alles Bedenken aus dem Verſuch geſchloſſen werden könnte: allein dagegen läſt ſich noch ſehr vieles mit Grunde einwenden. Geſetzt, daß die Luft in der kleinen Glaßröhre würklich einem ſo ſtarken Druck ausgeſetzt geweſen ſey, als die Rechnung annimmt; ſo weis man ja, daß das Mariottiſche Geſetz der Federkraft der Luft bey ſtarken Zuſammenpreſſungen gewiß nicht mehr gelte. Es folgt alſo nicht, wenn die Luft einem ohngefehr 1500 mahl gröſſern Druck ausgeſetzt geweſen iſt, als die Atmoſphäre, ſo iſt ſie auch 1500 mahl dichter geweſen, als die Atmoſphäre iſt. Wie wenn die vorhin erwehnten Erfahrungen, worauf ſich Halley beruft (162 §.) ihre Richtigkeit hätten? Ich denke alſo, daß dieſer Haleſiſche Verſuch gar nicht gebraucht werden könne, darzuthun, daß die Luft einer ſo ſehr ſtarken Zuſammenpreſſung fähig ſey.

Der VIII. Abſchnitt.

Theorie der Windbüchſen mit einigen Anwendungen auf das Pulver-Geſchütz.

152 §.

Weil eine ſehr verdichtete Luft wegen ihrer ſtarken Federkraft ungemein ſtarke Gefäſſe zu zerſprengen im Stande iſt, und dieſer Effect die gröſte Aehn-

Aehnlichkeit mit dem Effect des entzündenden Schießpulvers hat, wenn es eine Bombe, oder ähnliche Gefäſſe zerſprengt; ſo veranlaſte dies, daß man anfieng, die verdichtete Luft zu einem ähnlichen Gebrauch, wie das Schießpulver anzuwenden. Man verfertigte Schießgewehre, die ſo eingerichtet waren, daß eine ſtark verdichtete Luft ſtatt des Schießpulvers eine auf gewöhnliche Art in den Lauf geladene Kugel forttreiben konte; und dergleichen Geſchütze ſind nunmehro ziemlich allgemein bekannt. Sie heiſſen gewöhnlich **Windbüchſen**, **Windpiſtolen**, oder **Wind-Canonen**, nachdem ſie mit den ſonſt üblichen Musketen, Piſtolen, oder Canonen in ihrer äuſſerlichen Geſtalt überein kommen. Die Windbüchſe hat gewöhnlich einen doppelten cylindriſchen Lauf, einer ſteckt in dem andern, ſo daß beyde eine gemeinſchaftliche geometriſche Axe haben. Dieſer Lauf iſt an einem gewöhnlichen Flintenſchaft befeſtiget, und in dem letztern eine kleine Druckluftpumpe angebracht, die dazu dienet, die Luft in dem Raum zwiſchen beyden Läufen zu verdichten. Die Kugel wird in den innern Lauf geladen, und in dem Schwanzſtück deſſelben, da wo ſich ſonſt das Zündloch befindet, iſt ein Ventil angebracht, welches der verdichteten Luft ſo lange den Weg durch den innern Lauf verſperret, bis man die hineingeladene Kugel wegſchieſſen will. Dies Ventil wird vermittelſt eines kleinen Drückers geöfnet, ſo wie er beym Flintenſchloß ſonſt gewöhnlich iſt. Die ganze Einrichtung iſt übrigens ſo gemacht, daß das Ventil jedesmahl nur wenige Augenblicke offen bleibt, damit nur ſoviel Luft heraus gehe, als eine Kugel fortzutreiben nöthig iſt; und davon hat man die Bequem-

 lichkeit,

lichkeit, daß mehr Schüſſe nach einander geſchehen können, ohne daß es nothwendig wäre, von neuen Luft einzupumpen. Die Stempelſtange, welche zu der kleinen Druckpumpe gehört, wird da, wo ſie aus dem Schaft hervorragt, mit einem Ringe verſehen, durch welchen man einen eiſernen Polzen ſteckt, wenn die Luft eingepumpt werden ſoll. Auf den Polzen tritt man alsdenn mit den Füſſen, greift den Lauf der Windbüchſe mit den Händen an, und kan auf ſolche Art nun durch abwechſelndes Heben und Niederdrücken der ganzen Windbüchſe das Einpumpen bewerkſtelligen.

153 §.

Man hat auch Windbüchſen von andrer Einrichtung mit einem einfachen Lauf. Bey dieſen enthält der Schaft ſelbſt die Windkammer, und iſt alsdenn gewöhnlich ſo eingerichtet, daß man ihn von dem Lauf abſchrauben, und ſtatt deſſen eine Druckpumpe anſchrauben kan, welche die Luft in der Windkammer zu verdichten dient. Damit man dieſe Verdichtung der eingeſchloſſenen Luft deſto weiter treiben könne, verbindet man auch wohl mit der Pumpe eine Druckſtange, und zwar auf folgende Art. Die Stempelſtange wird am Fußboden eines Zimmers befeſtiget, durch den oben auf der Pumpe aufgeſchrobenen Schacht wird am äuſſerſten Ende ein Polzen geſteckt, und vermittelſt deſſelben der Schaft an der Druckſtange aufgehenkt: das eine äuſſerſte Ende dieſer Stange wird an der Wand des Zimmers jedoch ſo befeſtiget, daß ſie ſich daſelbſt frey drehen kan: das andre Ende aber wird mit den Händen angegriffen, und auf ſolche Art um den Schaft mit

der Pumpe wechſelsweiſe gehoben und niedergedrückt. M. ſ. Muſſchenbroeck Introd. in Philoſ. Natur. T. II. Cap. XXXIX. §. 2111. p. 860. Einige Schriftſteller rühmen von den Windbüchſen, daß ſie eben ſo viele Gewalt ausüben können, als eine ordentliche Flinte, wenn ſie recht gemacht ſind: andre ſcheinen nicht viel von ihnen zu halten. Zu dem letztern gehört unter andern Hr. Nollet in den Leçons Phyſique Experim. T. III. Lect. X. Sect. I. Cap. VII. der ſie mehr für curieuſe als nützliche Werkzeuge hält, weil ſie nach ſeiner Meynung wegen der Schwierigkeit, ſie recht dauerhaft zu verfertigen, bey weiten ſo bequem und ſicher zum Gebrauch nicht ſind, als andre Schießgewehre zu ſeyn pflegen; auch der einige Vortheil, daß ſie losgehen, ohne ein ſo ſtarkes Geräuſch zu machen, als die Feuer-Gewehre, leicht gemisbraucht werden kan. Der letzte Grund will nun wohl nicht recht viel ſagen, weil ſehr viele andre an ſich gute und nützliche Sachen dem Misbrauch unterworfen ſind; und was das übrige betrift, ſo wird es wohl hauptſächlich auf die Geſchicklichkeit des Künſtlers, der ſie verfertiget, ankommen, ob ſie zum Gebrauch recht ſicher, und die Ventile vollkommen luftdicht ſind: Man pflegte von ihnen eben nicht völlig ſo viel Effect, als von andern Gewehren erwarten, und das iſt doch wenigſtens ein nicht zu verachtender Vortheil, daß man ſich ihrer an Orten, wo der Gebrauch andrer Feuer-Gewehre wegen der Gefahr eine Feuersbrunſt zu veranlaſſen, nicht rathſam iſt, bedienen kan, ſchädliche Thiere zu tödten. Ich trage die Unterſuchung darüber hier theils um deswillen vor, weil es ſchon an ſich angenehm und nützlich iſt, zu wiſſen, was die Kunſt ausrichten

kan, wenn ſie ſich der Kräfte der Natur geſchickt zu bedienen weiß: theils auch um deswillen, weil es eine gute Vorbereitung zur Theorie der Feuergewehre und andrer im Kriege üblicher Geſchütze ſeyn wird, davon die Artillerie umſtändlicher Unterricht giebt.

154 §.

59 Fig. In dem Theil *AFGD* des graden Cylinders *ABCD* iſt anfangs eine ſtark verdichtete Luft eingeſchloſſen, und vor derſelben eine Kugel geſetzt; durch Oefnung eines Ventils oder auf andre Art wird der Luft verſtattet, ſich von Q nach *W* auszubreiten, und die Kugel vor ſich her zu ſtoſſen: man ſucht die Geſchwindigkeit, womit die Kugel zur Mündung des Cylinders heraus fährt.

Aufl. Die Kugel ſey in der Zeit t um den Weg QW$=w$ fortgerückt, und in eben dieſem Augenblick, da ſie in W anlangt, ihre Geſchwindigkeit $=\sqrt{v}$; ſo läſt ſich zwiſchen w und v eine Gleichung finden, wenn man bis auf den 30 §. zurück gehet. Statt des dortigen q ſchreibe man hier v, ſo hat man zuerſt die allgemeine Gleichung

$$p = \mathrm{C} + \frac{\mathrm{Y}}{ydw} . d \frac{y^2}{\mathrm{Y}^2} v \int \frac{\mathrm{Z}}{z} ds - \frac{y^2}{\mathrm{Y}^2} . \frac{\mathrm{Z}^2}{z^2} . v,$$

und dieſe wende man dem 32 §. gemäß auf den gegenwärtigen Fall ſo an. Zuerſt beſtimme man die beſtändige Gröſſe C ſo, daß man den Druck in Betrachtung ziehet, dem die vordere Fläche RS der eingeſchloſſenen Luft deswegen ausgeſetzt iſt, weil ſie die Kugel vor ſich her treiben muß. Es ſey dieſer Druck ſo groß, als das Gewicht einer natürlichen Luftſäule

auf

auf der Grundfläche RS in der Höhe q, alſo $=$ G.RS.q, die Dichtigkeit der Atmoſphäre $=$ G geſetzt. Das Gewicht der Kugel ſey ſo groß, als das Gewicht einer Luftſäule von eben der Dichtigkeit auf derſelben Grundfläche in der Höhe $=\alpha$, ſo iſt die Beſchleunigung der Kugel $=\frac{q}{\alpha}$, und man hat nach dem 117 §. Mech. $dv=\frac{q}{\alpha}dw$, alſo $q=\frac{\alpha dv}{dw}$. Für den jetzigen Augenblick ſey die Dichtigkeit der in dem Raum ARSD noch eingeſchloſſenen Luft $=\delta$, ihre anfängliche Dichtigkeit, die ſie in dem Raum AFGD hatte, $=\Delta$, und die Länge dieſes Raums AF$=b$; ſo hat man $\frac{\delta}{\Delta}=\frac{b}{b+w}$; und wenn $\Delta=m$G angenommen wird, ſo iſt $\frac{\delta}{G}=\frac{mb}{b+w}$. Nun war der Druck, welchen die Fläche RS ausgeſetzt iſt, $=$G.RS.q; ſetzt man eben dieſen Druck $=\delta$.RS.p', ſo wird

$$p'=\frac{G}{\delta}q=\frac{b+w}{mb}\cdot\frac{\alpha dv}{dw}.$$

Wenn nun in obiger Gleichung $s=-w$, $z=y$, $Z=Y$, und $\int\frac{Z}{z}ds=0$ iſt, ſo muß ſtatt p die Höhe einer Luftſäule geſetzt werden, deren Dichtigkeit $=\delta$, und deren Gewicht ſo groß iſt, als der Druck,

den RS leidet. Folglich wird $p=p'=\frac{b+w}{mb}\cdot\frac{\alpha dv}{dw}$,

und das giebt $C=\frac{b+w}{mb}\cdot\frac{\alpha dv}{dw}+v$. Was nun im 30 §. λ war, das iſt hier b: wenn demnach hier $s=b$, und $Z=0$ geſetzt wird, ſo muß $p=k$ ſeyn, und man erhält

$$k=\frac{b+w}{mb}\cdot\frac{\alpha dv}{dw}+v+\frac{Y}{ydw}\,d\,\frac{y^2}{Y^2}v\int\frac{Z}{z}ds.$$

Noch ſetze man dem 32 §. gemäß, wie hier die Geſtalt der Röhre erfordert,

$$\frac{Y}{ydw}.d\,\frac{y^2}{Y^2}v\int\frac{Z}{z}ds=\frac{(b+w)\,dv}{2dw}-v,$$

ſo wird $k=\frac{b+w}{mb}\cdot\frac{\alpha dv}{dw}+\frac{(b+w)\,dv}{2dw}$, woraus $\frac{2mkb}{mb+2\alpha}\cdot\frac{dw}{b+w}=dv$ folgt, und die Integration giebt $v=\frac{2mkb}{mb+2\alpha}.l\frac{b+w}{b}$. Um nun die Geſchwindigkeit zu haben, womit die Kugel bey B zur Mündung des Laufs heraus fährt, darf man nur $w=FB$, alſo $b+w=AB$ ſetzen. Dieſe Länge AB ſey $=a$, ſo iſt die der geſuchten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $v=\frac{2mkb}{mb+2\alpha}.l\frac{a}{b}$; und wenn man L ſtatt $l\frac{a}{b}$ ſchreibt, ſo wird die geſuchte Ge-

ſchwin-

ſchwindigkeit ſelbſt $= 2\sqrt{gv} = \frac{2\sqrt{2gmkbL}}{\sqrt{(mb+2\alpha)}}$.

Wenn die Luft keine Kugel vor ſich her zu treiben hätte, ſo wäre $\alpha = 0$, und die gefundene Gleichung für v verwandelt ſich in folgende $v = 2kl\frac{b+w}{b}$, welche nun mit der im 32 §. gefundenen übereinkommt, und die Geſchwindigkeit giebt, womit die Luft für ſich allein aus der Mündung heraus fahren würde.

155 §.

Nach des Regnault Bericht in den Entretiens Phyſiques T. I. p. 29. läſt ſich die Luft in Windbüchſen wohl 100 mahl dichter machen, als die natürliche iſt. Die Länge des Laufs beträgt gewöhnlich zwiſchen 4 und 5 Fuß, und die Weite des Laufs im Durchmeſſer fällt zwiſchen $\frac{1}{4}$ Zoll und $\frac{1}{2}$ Zoll. Um demnach die Gleichung des vor. §. auf ein Beyſpiel anzuwenden, will ich annehmen, die Länge des Raums AFGD, der anfangs die verdichtete Luft enthält, betrage 2 Zoll, und die ganze Länge des Laufs 4 Fuß: ich will ferner annehmen, daß eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{8}$ Zoll im Durchmeſſer zum Schieſſen gebraucht werden ſoll, und daß wegen des nothwendigen Spielraums der Lauf im Durchmeſſer um ein ſehr weniges weiter ſey als $\frac{3}{8}$ Zoll. Dies vorausgeſetzt hat man $a = 48$ Zoll, $b = 2$ Zoll, alſo $\frac{a}{b} = 24$, und $L = 2,302585 \cdot 1,3802112 = 3,178053$. Um α zu finden, nehme man die eigene Schwere des Bleyes = D an, und den Durchmeſſer

meſſer der Kugel $= d$, ſo iſt ihr Gewicht $= \frac{1}{6}\pi d^3 D$; und weil eben dies Gewicht $= \frac{1}{4}\pi dd.\alpha.G$ ſeyn muß, ſo wird $\alpha = \frac{2}{3}.\frac{D}{G}.d.$ Wenn nun ferner das Bley 11,325 mahl ſchwerer als Waſſer, und das Waſſer 800 mahl ſchwerer als die Luft angenommen wird, ſo hat man $\frac{D}{G} = 9060$, und $\alpha = \frac{2}{3}.\frac{3}{8}.\frac{1}{12}$ $.9060 = 189$ Fuß. Die Vorausſetzung $m = 100$, und $b = \frac{1}{6}$ Fuß giebt alsdenn $mb + 2\alpha = 384,7$, und $2mkb = \frac{1}{6}.200.26000 = 858000$. Die Multiplication mit L giebt ferner die Zahl 2726769,5, und ſo erhält man $v = \frac{27267695}{3847} = 7088$ Pariſer Fuß; die zugehörige Geſchwindigkeit wird $= 2\sqrt{15,1.7088} = 654$ Fuß. Die vertical aufwärts geſchoſſene Kugel würde demnach 7088 Fuß hoch ſteigen, wenn der Widerſtand der Luft ſie nicht verzögerte, und die Kugel würklich im Lauf ſelbſt ſo ſtark beſchleuniget würde, als die Rechnung vorausſetzt. Allein der erwehnte Widerſtand der Luft vermindert ſchon den Anwachs der Geſchwindigkeit der Kugel gleich ſeit den erſten Augenblick der Bewegung; und was insbeſondre ihre Bewegung betrift, ſo lange ſie den Lauf noch nicht verlaſſen hat: ſo muß man erwegen, daß die vor der Kugel im Lauf befindliche Luft auch wegen ihrer Federkraft entgegen drückt. Demnach müſſen dieſe Hinderniſſe der Bewegung noch mit in Rechnung gebracht werden.

156 §.

Die Auflöſung der Aufgabe des 154 §. zu finden, wenn auf den Gegendruck und Widerſtand

derſtand der Atmoſphäre mit Rückſicht genommen wird.

Aufl. Mit den Schlüſſen des 154 §. muß man noch folgendes verbinden. Der Gegendruck der Luft gegen die Kugel iſt $= G.RS.k$, und der Widerſtand der Luft, welcher von der Geſchwindigkeit der Kugel abhängt $= \frac{1}{2}G.RS.v$ (301. 309 §. Mech.). Die Beſchleunigung der Kugel erforderte den Druck $G.RS.q$, alſo wird nun der geſammte Druck, welchem die Fläche RS ausgeſetzt iſt, $\delta.RS.p' = G.RS.(k+\frac{1}{2}v+q)$, und dies giebt $p' = \frac{G}{\delta}(k+\frac{1}{2}v+q)$, da dann $q = \frac{\alpha dv}{dw}$ bleibt: und wenn auch $\frac{G}{\delta} = \frac{b+w}{mb}$ geſetzt wird, ſo hat man $p' = \frac{b+w}{mb}\left(k+\frac{1}{2}v+\frac{\alpha dv}{dw}\right)$. Braucht man dieſen Werth für p', ſo kommt man im 167 §. auf die Gleichung

$$k = \frac{b+w}{mb}\left(k+\frac{1}{2}v+\frac{\alpha dv}{dw}\right)+\frac{(b+w)dv}{2dw}.$$

Daraus folgt

$$k - \frac{(b+w)k}{mb} - \frac{(b+w)v}{2mb} = \frac{mb+2\alpha}{2mb}.(b+w) . \frac{dv}{dw},$$

und man erhält $dv =$

$$\frac{2mbk}{mb+2\alpha}.\frac{dw}{b+w} - \frac{2kdw}{mb+2\alpha} - \frac{vdw}{mb+2\alpha}$$

oder

oder $dv + \frac{vdw}{mb+2\alpha} = \frac{2mbk}{mb+2\alpha} \cdot \frac{dw}{b+w}$

$- \frac{2kdw}{mb+2\alpha}$. Bey Integration dieſer Gleichung muß man auf ähnliche Art, wie im 34 §. verfahren. Man ſetze um abzukürzen $mb + 2\alpha = B$, nehme e für die Fundamentalzahl der natürlichen Logarithmen an, und multiplicire mit $e^{w:B}$, ſo wird

$$e^{w:B} dv + v e^{w:B} \frac{dw}{B} = \frac{2mbke^{w:B}dw}{B(b+w)}$$

$- \frac{2k}{B} e^{w:B} dw$, und die Integration giebt

$$e^{w:B} v = \frac{2mbk}{B} \int \frac{e^{w:B} dw}{b+w} - 2ke^{w:B} + C.$$

Weil nun w und v zugleich verſchwinden müſſen, ſo wird $C = 2k$, wenn man auch das Integral $\int \frac{e^{w:B} dw}{b+w}$, das ich $= S$ ſetzen will, ſo nimmt, daß es mit w zugleich verſchwindet. Braucht man dieſe Werthe, ſo wird

$$v = \frac{2mbk}{B} . e^{-w:B} S - 2k (1 - e^{-w:B}).$$

Die Exponentialgröſſe $e^{w:B}$ kan nun wie im 34 § $= 1 + \frac{w}{B}$, alſo $e^{-w:B} = 1 - \frac{w}{B}$ angenommen werden, weil B eine ſehr groſſe Zahl iſt. Dieſe

Vor-

Vorausſetzung giebt

$$\frac{e^{w:B}dw}{b+w}=\frac{dw}{b+w}+\frac{wdw}{B(b+w)},\text{ oder}$$

$$\frac{e^{w:B}dw}{b+w}=\frac{dw}{b+w}+\frac{dw}{B}-\frac{bdw}{B(b+w)},$$

und es wird

$S=l(b+w)+\frac{w}{B}-\frac{b}{B}l(b+w)+C$. Weil nun w und S zugleich verſchwinden ſollen, ſo erhält man $C=-lb+\frac{b}{B}lb$, folglich

$$S=l\frac{b+w}{b}+\frac{w}{B}-\frac{b}{B}\,l\frac{b+w}{b}.$$

Dies mit $e^{-w:B}=1-\frac{w}{B}$ multiplicirt, giebt

$$e^{-w:B}\,S=\left(1-\frac{b+w}{B}\right)l\frac{b+w}{b}+\frac{w}{B}$$

$$-\frac{w^2}{B^2}+\frac{bw}{B^2}\,l\frac{b+w}{b},$$ wo man die beyden letzten in B^2 dividirten Glieder noch weglaſſen kan, weil $\frac{w}{B}$ und $\frac{b}{B}$ der Vorausſetzung gemäß ſehr kleine Brüche ſind. Ueberdem hat man $1-e^{-w:B}=\frac{w}{B}$; und wenn dieſe Werthe in die für v gefundene Gleichung geſetzt werden, ſo findet man

$v=$

$$v = \frac{2mbk}{B}\left(1 - \frac{b+w}{B}\right) l \frac{b+w}{b}$$

$$+ \frac{2mbkw}{B^2} - \frac{2kw}{B}.$$

Um die Geſchwindigkeit zu haben, womit die Kugel zur Mündung heraus fährt, ſetzt man $w = a - b$, wie im 167 §. da dann der Werth von B wieder hergeſtellt folgende Gleichung giebt

$$v = \frac{2mbk}{mb+2\alpha}\left(1 - \frac{a}{mb+2\alpha}\right) l \frac{a}{b}$$

$$+ \frac{2mbk(a-b)}{(mb+2\alpha)^2} - \frac{2k(a-b)}{mb+2\alpha}.$$

Mit Beyſeitſetzung des Gegendrucks und Widerſtandes der Luft ward im 154 §. $v = \frac{2mkb}{mb+2\alpha} . l \frac{a}{b}$ gefunden. Setzt man dieſen Werth nun $= V$, ſo wird die jetzt gefundene Höhe

$$v = \left(1 - \frac{a}{mb+2\alpha}\right) . V - \left(1 - \frac{mb}{mb+2\alpha}\right) . \frac{2k(a-b)}{mb+2\alpha}.$$

Wendet man dieſe Formul auf das im 155 §. berechnete Exempel an, ſo hat man $\frac{a}{mb+2\alpha} = \frac{4}{384,7}$ beynahe $= \frac{1}{96}$, $\frac{2k(a-b)}{mb+2\alpha} = \frac{2 \cdot 3,8333 \cdot 26000}{384,7}$

=

$= 518$, und $\frac{mb}{mb + 2\alpha} = \frac{16{,}7}{384{,}7}$ beynahe $=$ $\frac{1}{24}$. Im 155 §. war $V = 7088$ Fuß; alſo findet man jetzt $v = 7088 - \frac{1}{98} \cdot 7088 + \frac{1}{24} \cdot 518 - 518$ $= 6518$ Fuß, und die Geſchwindigkeit $2\sqrt{gv} =$ 628 Fuß.

157 §.

Bey Auflöſung der Aufgaben des 154 und 156 §. ſind hier verſchiedene Umſtände mit in Rechnung gebracht, worauf andre Schriftſteller, zum Theil nicht geſehen haben: und ich muß mich darüber um deswillen noch etwas näher erklären, damit man deſto beſſer die hier gefundenen Formuln mit denjenigen vergleichen könne, welche man bey andern Schriftſtellern findet. Es iſt eigentlich nicht die Maſſe der Kugel allein, welche von der Federkraft der Luft beſchleuniget wird, ſondern die Maſſe der Luft ſelbſt wird mit in Bewegung geſetzt. Nun war die Maſſe der Kugel $= G.RS.\alpha$, und die Maſſe der in dem Raum AFGD anfangs eingeſchloſſenen Luft $= mG.RS.b$; alſo die geſammte Maſſe, welche die Federkraft der Luft beſchleuniget $=$ $G.RS.(mb + \alpha)$. Wäre nun das Gewicht der eingeſchloſſenen Luft in Vergleichung mit dem Gewicht der Kugel ſehr gering, ſo könnte man allein α ſtatt $mb + \alpha$ ſchreiben, und ſo würde ſich die Gleichung des 154 §. in folgende $v = \frac{mkb}{\alpha} \, l \frac{a}{b}$ verwandeln. Eben dieſe Gleichung wird gefunden, wenn man die Bewegung der Kugel blos nach den allgemeinen Geſetzen der Bewegung feſter Körper (117 §. Mech.) betrachtet, und auf die Bewegung der Luft ſelbſt

keine Rückſicht nimmt. Es ſey der Querſchnitt des Laufs RS $= c$, ſo iſt in dem Augenblick da die Kugel in W anlangt, der Druck der eingeſchloſſenen Luft gegen die Kugel $= \frac{b}{b+w} . mGck$, und die Maſſe der Kugel war $= Gc\alpha$; alſo iſt ihre Beſchleunigung $\frac{dv}{dw} = \frac{mk}{\alpha} . \frac{b}{b+w}$, und die Integration giebt $v = \frac{mkb}{\alpha} \; l \frac{b+w}{b}$, woraus die kurz vorhin angegebene Gleichung wird, wenn man $w = a - b$ ſetzt.

Ziehet man hiebey den Gegendruck der äuſſern Luft gegen die Kugel in Betrachtung, jedoch mit Beyſeitſetzung des von der Trägheit der Luft und der Geſchwindigkeit der Kugel abhängenden Widerſtandes; ſo ſiehet man wohl, daß die Kugel eigentlich nur von dem Druck $\frac{b}{b+w} . mGck - Gck$ beſchleuniget werde, daß alſo $\frac{dv}{dw} = \frac{mk}{\alpha} . \frac{b}{b+w} - \frac{k}{\alpha}$ geſetzt werden müſſe; da dann $v = \frac{mkb}{\alpha} \; l \frac{b+w}{b} - \frac{kw}{\alpha}$ gefunden wird, alſo $v = \frac{mkb}{\alpha} \; l \frac{a}{b} - \frac{k(a-b)}{\alpha}$, wenn man $w = a - b$ ſetzt. Dieſe Gleichung findet Hr. Daniel Bernoulli Hydrodynam. Sect. X. p. 235. Bey

ihm

ihm iſt P das Gewicht einer Luftſäule auf der Grundfläche *c*, die dem Druck der Atmoſphäre das Gleichgewicht hält, durch das Gewicht der Kugel als die Einheit ausgedrückt, alſo iſt das P hier $= \frac{k}{\alpha}$.

Die Gleichung $v = \frac{mkb}{\alpha} \; l\frac{a}{b}$ findet Hr. Robin ſynthetiſch in ſeinen neuen Grundſätzen der Artillerie, und Hr. Euler giebt in ſeiner mit Erläuterungen verſehenen Ueberſetzung den analytiſchen Beweis a. a. O. 122 u. f. S.

158 §.

Ich habe ſchon im 153 §. angemerkt, daß die gegenwärtige Unterſuchung zugleich als eine Vorbereitung zur Theorie der im Kriege üblichen Geſchütze diene, und daß die Artillerie davon weitern Unterricht gebe: hier wird die beſte Stelle ſeyn, vorläufig den Zuſammenhang mit der Theorie von der Gewalt des Schießpulvers zu zeigen, welche auf folgende Eefahrungsſätze beruhet. Wenn von einer gewiſſen Menge Schießpulver, ſie ſey ſo groß ſie wolle auch nur ein Körnchen angezündet wird; ſo verbreitet ſich die Flamme mit einer ungemeinen Schnelligkeit durch alle über und neben einander liegende Körner: und durch die Verbrennung wird eine beſtändige flüßige elaſtiſche Materie hervorgebracht, welche die gröſte Aehnlichkeit mit der Luft hat, und ſich auch alsdann, wenn die Entzündung in freyer Luft geſchicht, mit der gröſten Gewalt nach allen Seiten ausbreitet. Alles erfolgt eben ſo, als wenn das Pulver in ſeinen Beſtandtheilen eine ungemein ſtark zuſammen ge-

preßte Luft enthielte, die beym Verbrennen des Pulvers aus den Behältniſſen, worin ſie eingeſchloſſen war, hervorbricht, und deren Ausdehnungskraft durch die Hitze noch vergröſſert wird. Ueberdem hat man um ſo weniger Urſache zu zweifeln, daß dieſe Materie, welche aus dem verbrennenden Pulver hervorbricht, würklich Luft ſey, weil genauere Verſuche gelehrt haben, daß ſie bey einer gleichen Elaſticität mit der Luft auch einerley eigene Schwere mit ihr habe, und daß übrigens bey nicht gar ſtarken Zuſammenpreſſungen ihre Federkraft der Dichtigkeit proportional ſey. Wenn nun ABCD der Lauf einer Muſkete oder einer Canone, und der Raum AFGD anfangs mit Schießpulver angefüllt iſt; ſo wird die Geſchwindigkeit, welche das verbrennende Pulver der Kugel mittheilt, eben ſo gefunden, als wenn das Pulver ſelbſt nichts anders, als ſehr ſtark verdichtete Luft wäre; nur muß man bey Anwendung der gefundenen Formuln noch folgendes erwegen.

159 §.

Man kan nicht annehmen, daß die ganze Maſſe des Pulvers beym Verbrennen in Luft verwandelt werde: denn jedermann weiß, daß das Pulver aus Salpeter, Schwefel und Kohlen gemacht wird, daß es eigentlich der Salpeter iſt, der die zuſammengepreßte Luft zu enthalten ſcheint, und daß nach dem Verbrennen nicht allein eine Art von Aſche oder Ruß übrig bleibt, ſondern auch eine groſſe Menge ſolcher gröbern Beſtandtheilchen in Rauch und Dampf mit davon fliegt. Iſt nun die in den Beſtandtheilen des Pulvers eingeſchloſſene Luft n mahl dichter als die Atmoſphäre; ſo kan man bey Berechnung der

Ge-

Geſchwindigkeit, welche das entzündete Pulver der Kugel mittheilen wird, nicht annehmen, daß der ganze Raum AFGD mit Luft von dieſer Dichtigkeit 59 Fig.
im Anfang der Bewegung angefüllet ſey: denn einen Theil dieſes Raums werden die übrigen gröbern Beſtandtheile des Pulvers einnehmen, und der übrige Theil wird nur mit der zuſammengepreſten Luft angefüllt ſeyn. Nun war AFGD $= c.b$, und wenn der Theil dieſes Raums, den die zuſammengepreſte Luft einnimmt, ſich zum ganzen wie μ zu 1 verhält, ſo iſt derſelbe $= \mu cb$. Wenn nun die gröbere Materie im Augenblick der Entzündung des Pulvers ſich ſo von der Luft abſonderte, daß alles auf dem Boden des Laufs etwa in dem Raum AEHD zurück bliebe, die Luft aber allein die Kugel vor ſich her triebe; ſo wäre es ſoviel, als wenn eine Luft, deren Dichtigkeit $= nG$, anfangs den Raum EFGH, deſſen Länge $= \mu b$, ausgefüllet hätte, und man müſte nur in den bisherigen Formuln allenthalben μb ſtatt b ſchreiben, wenn man in eben dieſen Formuln durch m dieſelbe Zahl, die hier n heiſt, verſtehen wollte. So ſondert ſich aber die Luft von den gröbern Beſtandtheilen des Pulvers nicht ab: ſie nimmt vielmehr eine groſſe Menge derſelben mit ſich fort, und ein Theil ihrer Federkraft wird dazu verwandt, dieſe gröbere Materie zu beſchleunigen, worauf alſo bey der Rechnung beſonders Rückſicht genommen werden muß. Man kan inzwiſchen um die Rechnung zu erleichtern, den Theil der Kraft, welcher dieſe gröbere Materie zu beſchleunigen erfordert wird, ob er gleich nicht ſo ſehr unerheblich iſt, als es anfangs ſcheinen dürfte, beyſeit ſetzen, und alsdenn für die erſte Dichtigkeit der im Pulver eingeſchloſſenen

Luft diejenige annehmen, die ſie erhalten würde, wenn ſie nach Hervorbrechung aus den Beſtandtheilen des Pulvers in dem Raum AFGD eingeſchloſſen bliebe, den vorher das Pulver einnahm. Dieſe Dichtigkeit würde demnach $= \mu n$G ſeyn, wofern ihre Dichtigkeit innerhalb der Beſtandtheile des Pulvers ſelbſt $= n$G war, und die Zahl μn müſte nun ſtatt m in den obigen Formuln gebraucht werden. Aus Verſuchen, die in der Artillerie umſtändlicher erzehlt werden müſſen, hat man geſchloſſen, daß $n = 813$ oder nach einer runden Zahl $n = 800$, und μ ohngefehr $= \frac{3}{10}$ angenommen werden könne. Dieſemnach wäre $\mu n = \frac{3}{10} \cdot 813 = 244$, und dieſe Zahl muß ſtatt m gebraucht werden.

160 §.

Noch iſt zu bemerken, daß k in den obigen Formuln die Höhe einer Luftſäule von einerley Dichtigkeit mit der Atmoſphäre ausdrücke, deren Gewicht der Federkraft der Luft bey temperirter Wärme gleich iſt. Die in den Beſtandtheilen des Pulvers eingeſchloſſene Luft wird aber durch die Entzündung des Pulvers ſo ſtark als glüendes Eiſen erhitzt, und man weiß, daß eben dadurch ihre Federkraft gar ſehr verſtärkt wird. Wenn ſich nun die Federkraft der erhitzten Luft zu ihrer Federkraft bey temperirter Wärme wie $\beta : 1$ verhält; ſo muß in den obigen Formuln βk ſtatt k gebraucht werden. Nach Robins Verſuchen iſt die Federkraft der natürlichen Luft, wenn ſie ſo heiß als glüendes Eiſen gemacht wird, 4mahl ſtärker, als ihre Federkraft bey temperirter Wärme. Woſern alſo die Federkraft einer ſehr ſtark zuſammengepreſten Luft von der Hitze in eben dem Verhältniß vergröſſert wird; ſo kan man $\beta = 4$ annehmen.

161 §.

161 §.

Dieſer kurze Unterricht davon, in wie fern die Theorie des Pulvergeſchützes, mit der Theorie der Windbüchſen in Verbindung ſtehe, dient nun unter andern auch dazu, daß man eine Vergleichung anſtellen kan, wie nahe wohl der Effect einer Windbüchſe dem Effect einer Muſkete, oder eines gezogenen Rohrs, gebracht werden könne. Weil hiezu eben keine ſehr genaue Rechnung nöthig iſt, ſo kan die Gleichung $v = \frac{mkb}{\alpha} l \frac{a}{b}$ (am Ende des 157 §.) füglich gebraucht werden. Verſteht man hier durch m diejenige Zahl, welche bey Windbüchſen gebraucht werden muß, ſo muß bey Anwendung auf die Muſkete 244 ſtatt m und $4k$ ſtatt k geſchrieben werden. Wenn demnach bey beyden Arten der Gewehre alles übrige einerley iſt; ſo verhalten ſich die Höhen, welche den der Kugel mitgetheilten Geſchwindigkeiten zugehören, für die Windbüchſe und die Muſkete, wie $mk : 244 . 4 . k$, ohngefehr $= 1 : \frac{1000}{m}$. Wofern man alſo die Luft in Windbüchſen nicht füglich mehr als 100mahl dichter machen kan, als die Atmoſphäre iſt; ſo wird dies Verhältniß $= 1 : 10$, alſo das Verhältniß der mitgetheilten Geſchwindigkeiten $= 1 : \sqrt{10}$, beynahe $= 1 : 3$, und der Effect der Muſkete bleibt 3mahl gröſſer, als der Effect der Windbüchſe.

162 §.

Die Gleichung $v = \frac{mkb}{\alpha} l \frac{a}{b}$ giebt die Ge-

ſchwindigkeit der Kugel deſto gröſſer, je länger der Lauf iſt, wenn das übrige einerley bleibt, und dies iſt den Vorausſetzungen, worauf ſich die Gleichung gründet, ganz gemäß. Wenn der Raum vor der Kugel von Luft ganz leer wäre, ſo ſiehet man wohl, daß die Kugel ohne Aufhören, wiewohl immer ſchwächer, beſchleuniget werden müſte, je mehr ſich die Luft hinter der Kugel ausbreitet. Dies iſt dem Mariottiſchen Geſetz der Federkraft der Luft gemäß, welches bey obiger Rechnung zum Grunde liegt. Ziehet man dagegen den Gegendruck der äuſſern Luft in Betrachtung, und braucht mit Hr. Bernoulli die Gleichung $v = \frac{k}{\alpha}\left(mb\, l\frac{a}{b} + b - a\right)$, ſo wächſt v nur bis auf eine gewiſſe Grenze, wenn a wächſt, und nimmt nachher wieder ab. Demnach muß es, wenn alles übrige einerley bleibt, eine gewiſſe Länge des Laufs geben, wobey die Geſchwindigkeit der Kugel am gröſten wird. Um dieſe zu finden, betrachtet man a als eine veränderliche Gröſſe, und ſetzt alsdenn dem 343 §. Mechan. gemäß

$$d.\left(mb\, l\frac{a}{b} + b - a\right) = \frac{mbda}{a} - da = 0,$$

woraus $a = mb$ gefunden wird. Könnte man demnach mit einiger Schärfe und Richtigkeit beſtimmen, wie viel Luft auf jeden Schuß durch das Ventil einer Windbüchſe in den Lauf dringt, ſo würde die Gleichung $a = mb$ eine Regel geben, um die vortheilhafteſte Länge des Laufs zu finden. Je ſtärker demnach die Luft zuſammen gepreſt iſt, deſto länger müſte der Lauf ſeyn, wenn b einerley bleibt. Weil nun b doch nicht ſo gar klein ſeyn kan; ſo ſiehet man

wohl, daß nach dieſer Regel eine viel zu unbequeme Länge des Laufs würde gefunden werden, wenn die Luft ſehr ſtark zuſammen gepreſt iſt. Deswegen ſcheint die umgekehrte Aufgabe des folgenden §. für die Ausübung mehr Nutzen zu haben.

163 §.

Aus der bekannten Länge des Laufs, nebſt der Dichtigkeit der zuſammen gepreſten Luft, zu finden, wie viel Raum ſie anfangs einnehmen müſſe, damit der Kugel die möglichſt gröſte Geſchwindigkeit mitgetheilt werde.

Aufl. Wenn man in der Gleichung für v nunmehr b als eine veränderliche Gröſſe betrachtet, und $dv = 0$ ſetzt, ſo findet man $d.\left(b - a - mbl\frac{b}{a}\right) =$ $db - mdbl\frac{b}{a} - mdb = 0$, und das giebt $l\frac{b}{a} =$ $\frac{1-m}{m}$, oder $l\frac{a}{b} = \frac{m-1}{m}$. Weil nun hier der natürliche Logarithme verſtanden werden muß, ſo wird $2{,}302585\, l\frac{a}{b} = \frac{m-1}{m}$, wenn das l von nun an den Briggiſchen Logarithmen bedeutet, und man erhält $l\frac{a}{b} = \frac{m-1}{2{,}302585 \cdot m}$. Daraus findet man $\frac{a}{b}$ alſo b ſelbſt, wenn a gegeben iſt.

Wenn m ſehr groß iſt, ſo wird $\frac{m-1}{m}$ beynahe

$= 1$, und $l\frac{a}{b} = 0{,}4342944$. Eben dies würde man finden, wenn man die Gleichung $v = \frac{mkb}{\alpha} l \frac{a}{b}$ brauchte, wie denn auch die beyden Fälle, wenn $m = \infty$ genommen wird, und wenn der Raum auſſerhalb der Kugel luftleer angenommen wird, wie man leicht ſiehet, übereinkommen müſſen. Es iſt demnach in dieſem Fall der natürliche Logar. $\frac{a}{b} = 1$, alſo $\frac{a}{b} = 2{,}71828$, und daraus ergiebt ſich, daß die Länge des mit der verdichteten Luft angefüllten Raums noch etwas mehr, als $\frac{1}{3}$ von der Länge des ganzen Laufs ausmachen müſte. Es ſey demnach $\beta = \frac{a}{e}$, und e die baſis der natürlichen Logarithmen, ſo iſt β die vortheilhafteſte Länge des Raums für die zuſammen gepreſte Luft, und der gröſten Geſchwindigkeit, welche der Kugel mitgetheilt werden kan, gehört die Höhe $\frac{mk\beta}{\alpha} = \frac{mka}{\alpha e}$.

Für jede andre Länge b iſt dieſe Höhe $= \frac{mkb}{\alpha} l \frac{a}{b}$, alſo verhält ſich jene zu dieſer, wie

$$a : eb\, l\frac{a}{b} = 1 : \frac{e}{a} b\, l\frac{a}{b},$$

oder wie $1 : \frac{b}{\beta} l \frac{a}{b}$.

164 §.

Wollte man von dieſer Theorie eine Anwendung auf die Windbüchſen machen, ſo müſte man vor allen Dingen wiſſen, wie lange das Ventil offen bleibt, indem das Schloß abgedrückt wird. Ich will die hiezu nöthige Zeit, die, wie man leicht ſiehet, viel weniger als 1 Secunde beträgt, die Zeit des Schuſſes nennen. Aus dieſer Zeit läſt ſich die Menge Luft finden, die auf jeden Schuß heraus geht (19. 22 §.); wenn überdem die Gröſſe der Ventil-Oefnung, die Dichtigkeit der eingeſchloſſenen Luft, und die Gröſſe des Raums zwiſchen den beyden Laufen oder in dem Schaft der Windbüchſe bekannt iſt, den die zuſammengepreſte Luft ausfüllet. Ich will Kürze halber dieſen Raum die **Windkammer** nennen. Dieſe Windkammer ſey nach ihrem ganzen körperlichen Inhalt $= A$, c ſey, wie bisher, der Querſchnitt des Laufs, und $\beta = \frac{a}{e}$, wie im vor. §. Wofern nun auf jeden Schuß aus dem Raum A ein Theil Luft heraus tritt, der ſich zur ganzen in A befindlichen Menge verhält, wie $c\beta : A$; ſo wird dies ohngefehr eben den Erfolg haben, als wenn anfangs ein Theil des Laufs, deſſen Länge $= \beta$, mit Luft von eben der Dichtigkeit mit der in A befindlichen Luft wäre angefüllt geweſen.

165 §.

Die Länge des Laufs einer **Windbüchſe**, die Dichtigkeit der in der **Windkammer** zuſammen gepreſten Luft, nebſt der Zeit des Schuſſes ſind gegeben: man ſucht, wie groß die **Ventil-Oefnung** ſeyn müſſe, damit der

Kugel

Kugel die möglichſt gröſte Geſchwindigkeit mitgetheilet werde.

Aufl. Es ſey die Dichtigkeit der in der Windkammer eingeſchloſſenen Luft vor dem Schuß $= mG$, ſo iſt ſie nach dem Schuß nur noch $= \frac{A - c\beta}{A} . mG$. In den Fällen, wo m ſehr groß iſt, wird die zuſammen gepreſte Luft beynahe mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{gk}$ durch die Ventil-Oefnung hindurch brechen: wenn alſo t die Zeit iſt, worin eine gegebene Menge hindurch geht, und f die Ventil-Oefnung, ſo hat man (19 §.) $t = \frac{A}{2f\sqrt{gk}} \, l \frac{\Delta}{\delta}$, und $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{A}{A - c\beta}$. Bedeutet demnach t die Zeit des Schuſſes, ſo muß $f = \frac{A}{2t\sqrt{gk}} \, l \frac{A}{A - c\beta}$ ſeyn, damit der Kugel die möglichſt gröſte Geſchwindigkeit mitgetheilt werde. Wenn aber m nicht ſehr groß iſt, ſo muß man den Werth von t aus dem 22 §. brauchen, da dann das dortige D hier $=$ G iſt, und die natürliche Dichtigkeit der Atmoſphäre bedeutet. Um abzukürzen, ſetze man $\frac{A - c\beta}{A} = \mu$, ſo hat man $\Delta = mG$, und $\delta = \mu mG$, alſo wird $f = \frac{A}{2t\sqrt{gk}} \, l \frac{\sqrt{\mu m} - \sqrt{(\mu m - 1)}}{\sqrt{\mu m} + \sqrt{(\mu m - 1)}} \times \frac{\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)}}{\sqrt{m} - \sqrt{(m-1)}}$.

Weil die Zeit, binnen der das Schloß abgedruckt wird, beſtändig einerley bleibt, und μ ebenfalls einerley bleiben muß, m aber bey jedem folgenden

Schuß kleiner iſt, als beym vorhergehenden, wenn nicht vorher wieder Luft eingepumpt wird; ſo ſiehet man wohl, daß diejenige Ventil-Oefnung, welche für die erſten Schüſſe vortheilhaft iſt, für die folgenden Schüſſe es nicht mehr bleibt. So lange indeſſen m nur mittelmäßig groß iſt, ſo lange leidet f keine ſehr merkliche Aenderung, und es bleibt beynahe beſtändig $f = \frac{A}{2t\sqrt{gk}} \, l \frac{1}{\mu}$ (164 §.); und ſo lange nicht von neuen Luft eingepumpt wird, muß jeder folgende Schuß vornemlich um deswillen ſchwächer, als der vorhergehende werden, weil m beſtändig abnimmt, obgleich auch die Urſache hinzu komt, daß diejenige Gröſſe der Ventil-Oefnung, welche bey den ſtärkſten Schüſſen erfordert wird, bey den ſchwächern Schüſſen nicht mehr hinlänglich iſt, eine genugſame Menge Luft durchzulaſſen.

166 §.

Den Effect einer Windbüchſe und überhaupt eines jeden andern ähnlichen Schießgewehrs pflegte man vornemlich aus der Stärke des Stoſſes zu beurtheilen, womit die Kugel an einen Gegenſtand anſchlägt, der von dem Ort, wo der Schuß geſchicht, um einen gegebenen Abſtand entfernet iſt. Ueberdem will man mit dem Gewehr auf eben die Entfernung ſicher zielen können: man will den Gegenſtand, wenn er gleich nicht ſonderlich groß wäre, ſicher treffen. Um die letzte Abſicht zu erreichen, muß der Lauf möglichſt vollkommen grade gebohret ſeyn, damit die Richtung, nach welcher die Kugel zur Mündung des Laufs heraus fährt, mit der verlängerten

Axe des Laufs einerley ſey. Eigentlich iſt nun zwar der Weg der Kugel, den ſie in freyer Luft nimmt, eine krumme Linie, wie aus der Mechanik feſter Körper bekannt iſt: indeſſen weicht dieſe Linie auf eine ziemliche Strecke von der erſten Richtung der Kugel ſehr wenig ab, und dies deſto weniger, je gröſſer die der Kugel mitgetheilte Geſchwindigkeit iſt. Wenn der Widerſtand der Luft die Bewegung der Kugel nicht verzögerte, ſo wäre es ſehr leicht, alle Umſtände ihrer Bewegung zu berechnen, wie aus dem V. Abſchnitt der Mechanik bekannt iſt: allein wegen des Widerſtandes der Luft hat dieſe Rechnung weit mehr Schwierigkeit, wovon im XX. Abſchnitt der Mechanik Proben vorgekommen ſind. Schüſſe, wovon die erſte Richtung mit dem Horizont einen ſchiefen Winkel macht, heiſſen Bogenſchüſſe, und dieſe muß ich hier noch ganz beyſeit ſetzen. Die Höhe, welche die Kugel beym vertical aufwärts gerichteten Schuß erreichen würde, nebſt der Zeit, welche die Kugel unterweges zubringt, und was ſonſt hieher gehört, findet man den Grundſätzen des XX. Abſchn. der Mechanik gemäß, ohne weitere Schwierigkeit, wenn man die daſelbſt angenommene Theorie vom Widerſtande der Luft beybehält. Die Schüſſe, deren erſte Richtung horizontal iſt, die ſogenannten Kernſchüſſe, gehören zwar eigentlich auch zu den Bogenſchüſſen, weil der Weg der Kugel ebenfalls eine krumme Linie iſt: indeſſen treten hier einige beſondre Urſachen ein, weswegen die Unterſuchung darüber erleichtert wird, nach welchem Geſetz ſich die Geſchwindigkeit der Kugel ändere, ſo lange ihre Bahn ſich noch nicht ſonderlich krümmt. Es wird nemlich in dieſem Theil ihres Weges die Geſchwindigkeit

keit der Kugel von der Schwere ſo wenig verzögert, daß man dieſe Würkung der Schwere ganz beyſeite ſetzen, und die Rechnung ſo anſtellen kan, als wenn die Kugel blos träge, und nicht ſchwer wäre. Die Urſache davon iſt, wie man leicht ſiehet dieſe, weil die Richtung der Schwere auf der Richtung der Kugel in dem erwehnten Theil ihrer Bahn ſehr nahe ſenkrecht bleibt. Demnach finden die im 317 und 318 §. Mech. erwieſenen Gleichungen hier ihre Anwendung. Daſelbſt war h die anfängliche Geſchwindigkeit der Kugel, c ihre Geſchwindigkeit nachdem ſie ſchon den Weg x zurück gelegt hatte, r der Halbmeſſer der Kugel, n die Dichtigkeit der widerſtehenden flüßigen Maſſe, welches hier die Luft iſt, und m die Dichtigkeit der Kugel; und man hatte die Gleichung $c = \frac{h}{e^{3nx:16mr}}$ (318 §. Mech.) Ich will um Verwirrung der Buchſtaben zu vermeiden, hier G ſtatt n, und D ſtatt m ſchreiben, überdem ſollen v und V die den Geſchwindigkeiten h und c zugehörigen Höhen bedeuten; ſo iſt $\sqrt{V} = e^{-3Gx:16Dr}\sqrt{v}$.

167 §.

Alle Abmeſſungen der Windbüchſe ſind gegeben, nebſt der Dichtigkeit der in der Windkammer zuſammengepreſten Luft: überdem iſt die Geſchwindigkeit gegeben, womit die nach horizontaler Richtung abgeſchoſſene Kugel an einen Gegenſtand anſchlägt, deſſen Entfernung von dem Ort, wo der

Schuß geſchehen iſt, gleichfals bekannt iſt: man ſucht, wieviel Luft aus der Windkammer durch das Ventil hindurch getreten iſt.

Aufl. Wenn $\sqrt{V}$ die bekannte Geſchwindigkeit iſt, womit die Kugel anſchlägt, und $\sqrt{v}$ die Geſchwindigkeit, womit ſie zur Mündung des Laufs herausfährt, ſo hat man $\sqrt{v} = e^{3Gx:16Dr} \sqrt{V}$ (166 §.). Ueberdem iſt die dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $v = \frac{mkb}{\alpha} l \frac{a}{b}$, oder $b = \frac{\alpha v}{mkl(a:b)}$; und aus dieſer Gleichung läſt ſich b finden, wenn man eine von den ſchon verſchiedene mahl vorgekommenen Näherungs-Methoden braucht. Weil man nun annimmt, daß ſoviel Luft von der Dichtigkeit mG durch das Ventil aus der Windkammer herausgetreten ſey, als den Raum eines Cylinders auf der Grundfläche c in der Höhe b füllet, ſo hat man die geſuchte Menge $= cbmG$.

Die Dichtigkeit der Luft in der Windkammer iſt nun nach dem Schuß $= \frac{A - cb}{A}.mG$, und wenn die Geſchwindigkeit, womit die Kugel anſchlägt, durch einen Probeſchuß recht genau gefunden werden könnte, ſo hätte man nun zugleich ein Hülfsmittel, die Zeit des Schuſſes $t = \frac{A}{2f\sqrt{gk}} \; l \frac{A}{A - cb}$ zu finden. Aus mehrern dergleichen Probeſchüſſen würde nun wohl nicht immer genau einerley Werth von t gefunden werden: indeſſen könnte man aus den verſchiedenen auf ſolche Art gefundenen Werthen ein

Mittel

Mittel nehmen, und dieſen mittlern Werth alsdenn im 178 §. bey Auflöſung der dortigen Aufgabe brauchen.

168 §.

Um die Geſchwindigkeit $\sqrt{V}$, womit die Kugel anſchlägt, zu finden, kan man mehr als einen Weg erwehlen. Eine Art dieſes zu bewerkſtelligen, lieſſe ſich aus dem 249 §. Mech. herleiten, wenn man die Kugel gegen einen hölzernen Block, oder einen andern Körper von bekannter Feſtigkeit abſchöſſe: aus der Tiefe des Lochs, welches die Kugel in den Block bohrt, lieſſe ſich alsdenn ihre Geſchwindigkeit für den erſten Augenblick des Stoſſes finden. Der Widerſtand des Blocks ſey dem Gewicht einer Luftſäule gleich auf der Grundfläche c, (dem gröſten Kreiſe der Kugel) in der Höhe $= f$, alſo $= Gcf$; ſo wird den hieſigen Bezeichnungen gemäß $f = \frac{2D}{3G} \cdot \frac{\delta V}{\varepsilon}$, wenn δ den Durchmeſſer der Kugel, und ε die Tiefe des Lochs bedeutet. Daraus findet man $V = \frac{3G}{2D} \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot f$.

Wenn man die Kugel gegen einen nicht gänzlich unbeweglichen Körper abſchöſſe, ſo würde man aus der Geſchwindigkeit, welche ſie dem letztern durch den Stoß mittheilte, ebenfals auf die Geſchwindigkeit der anſchlagenden Kugel ſchlieſſen können; wenn nur die Natur beyder Körper in ſo weit bekannt wäre, daß man mit Sicherheit wiſſen könnte, in wie weit die Geſetze des Stoſſes elaſtiſcher oder unelaſtiſcher Körper ihre Anwendung fänden. Die Herrn

Robin und d'Arcy haben dies Verfahren gebraucht die Geſchwindigkeit der Muſketen-Kugeln durch Verſuche zu finden, wie aus dem 328 §. Mech. ſchon bekannt iſt. Eben daſelbſt aber iſt auch bereits gemeldet worden, wie viele Behutſamkeit bey dieſem Verfahren nöthig ſey, wenn man ſich mit einiger Sicherheit auf die Rechnung verlaſſen will. Eine umſtändliche Unterſuchung darüber iſt mir hier zu weitläuftig, und ich werde ſie bis zur Artillerie verſparen.

169 §.

Die ganze Einrichtung einer Windbüchſe mit allen ihren Abmeſſungen iſt bekannt: man ſucht wie viel Schüſſe damit nach einander geſchehen können, ohne daß es nöthig iſt, wieder Luft einzupumpen.

Aufl. Es ſey $\sqrt{V'}$ diejenige Geſchwindigkeit, womit die Kugel an einen um eine bekannte Diſtanz entfernten Gegenſtand anſchlagen muß, wofern der Schuß noch einigen Effect haben ſoll; die zugehörige anfängliche Geſchwindigkeit, womit die Kugel den Lauf verläſt ſey $= \sqrt{v'}$; ſo hat man $\sqrt{v'} = e^{3Gx:16Dr}\sqrt{V'}$. Weil nun die Einrichtung der Windbüchſe als bekannt angenommen wird, ſo hat man a und b; alſo läſt ſich aus der Gleichung $v' = \frac{mkb}{\alpha} l \frac{a}{b}$ finden, wie groß m ſeyn muß, damit der Kugel die Geſchwindigkeit $\sqrt{v'}$ mitgetheilt werde. Man ſchreibe m' ſtatt m, ſo hat man $m' = \frac{\alpha v'}{kbl(a:b)}$, und man weiß nun, daß die Dichtig-

keit

keit der in der Windkammer eingeſchloſſenen Luft wenigſtens $= m'G$ ſeyn müſſe, wofern der Schuß einigen Effect haben ſoll. Wie ſtark dieſe Luft in der Windkammer überhaupt zuſammengepreſt werden könne, weiß man aus der bekannten mechaniſchen Anordnung der Windbüchſe. Wenn demnach die gröſte Dichtigkeit, wozu dieſe Luft gebracht werden kan, $= mG$ iſt; ſo hat man das Verhältniß $\frac{m}{m'}$.

Nach dem erſten Schuß iſt nun die Dichtigkeit der Luft in der Windkammer $= \frac{A-cb}{A}.mG$, nach dem zweyten Schuß $= \frac{(A-cb)^2}{A^2}.mG$, und nach n Schüſſen $= \frac{(A-cb)^n}{A^n}.mG$. Damit nun der letzte Schuß noch einigen Effect habe, muß die Dichtigkeit der Luft in der Windkammer, die vor dem Schuß $\frac{(A-cb)^{n-1}}{A^{n-1}}mG$ war, $= m'G$ ſeyn, und dies giebt $\frac{(A-cb)^{n-1}}{A^{n-1}} = \frac{m'}{m}$, oder

$$\frac{A^{n-1}}{(A-cb)^{n-1}} = \frac{m}{m'},$$

woraus $(n-1)\,l\frac{A}{A-cb} = l\frac{m}{m'}$ folgt, und man erhält die geſuchte Anzahl

Schüſſe $n = \frac{l(m:m')}{l(A:A-cb)} + 1.$

Bey der vortheilhafteſten Einrichtung der Windbüchſe muß $b = \beta = \frac{a}{e}$ ſeyn (164. 165 §.) Wenn demnach m und m' auch bekannt ſind, ſo läſt ſich die eben gefundene Gleichung auch brauchen, die Gröſſe des Raums A zu finden, damit eine gegebene Anzahl von Schüſſen noch mit gehörigen Effect geſchehen könne. Es wird nemlich $\frac{A}{A-c\beta} = \sqrt[n-1]{\frac{m}{m'}}$, alſo $A = A\sqrt[n-1]{\frac{m}{m'}} - c\beta\sqrt[n-1]{\frac{m}{m'}}$, woraus $A = \frac{c\beta\sqrt[n-1]{(m:m')}}{\sqrt[n-1]{(m:m')} - 1}$ gefunden wird.

Nach Hr. Nollets Bericht (Vorleſungen über die Experimental-Naturlehre III Th. X. Vorleſ. 205 S. der Ueberſ.) wird die Kugel aus einer Windbüchſe mit einer ſolchen Gewalt fortgetrieben, daß man auf 70 Schritte weit gar wohl nach einer Scheibe von 1 Fuß im Durchmeſſer ſicher zielen kan: und der achte Schuß dringt gemeiniglich noch durch ein eichen Bret, das 6 Linien dick, und 20 bis 25 Schritt entfernt iſt.

170 §.

Man iſt in der Artillerie gewohnt das Gewicht der Pulverladung durch das Gewicht der Kugel auszudrücken. So ſagt man z. E. das Geſchütz ſey mit halb

halb Kugel ſchwer Pulver geladen, wenn die Ladung halb ſoviel als die Kugel wiegt. Dieſem Redegebrauch gemäß läſt ſich nun leicht die Geſchwindigkeit finden, welche eine gegebene Pulverladung einer Kugel, deren eigene Schwere bekannt iſt, mittheilen wird, wenn die Länge des Geſchützes und der Durchmeſſer des Laufs bekannt iſt. Das Gewicht der Kugel ſey P das Gewicht der Pulverladung $= Q$, ſo iſt den obigen Bezeichnungen gemäß $Gc\alpha = P$, und $\Delta cb = Q$, wenn Δ die eigene Schwere des Pulvers iſt. Demnach hat man $\alpha = \frac{P}{Gc}$, und $b = \frac{Q}{\Delta c}$. Braucht man nun mit Robin die Gleichung $v = \frac{mkb}{\alpha} . l\frac{a}{b}$, ſo erhält man $v = \frac{mkGQ}{\Delta P} . l\frac{\Delta ca}{Q}$.

Der Durchmeſſer der Kugel heiſt in der Artillerie ihr Caliber, und man iſt gewohnt die Länge des Geſchützes in Calibern anzugeben. Setzt man den Spielraum beyſeite, ſo iſt der Caliber der Kugel und des Geſchützes einerley. Es ſey $= \delta$, ſo iſt $c = \frac{1}{4}\pi\delta\delta$. Wird nun $a = \mu\delta$ geſetzt, ſo hat man $\Delta ca = \frac{1}{4}\mu\Delta\pi\delta^3$; und wenn ferner die eigene Schwere der Kugel $= D$ iſt, ſo hat man $\pi\delta^3 = \frac{6P}{D}$, folglich $\Delta ca = \frac{3\mu\Delta P}{2D}$, und es wird $v = \frac{mkGQ}{\Delta P} l\frac{3\mu\Delta P}{2DQ}$.

171 §.

Die eigene Schwere des Pulvers iſt gegeben nebſt der Länge einer Muſkete oder Canone: man ſucht die vortheilhafteſte Pulverladung.

Aufl. Wenn Δ die eigene Schwere des Pulvers bezeichnet, und die bisher gebrauchten Buchſtaben ihre Bedeutung behalten, ſo iſt $\Delta . cb$ das Gewicht der Pulverladung. Damit nun der Kugel die möglichſt gröſte Geſchwindigkeit mitgetheilt werde, muß $b = \beta = \frac{a}{e}$ seyn (164 §.). Demnach iſt das Gewicht der vortheilhafteſten Pulverladung $= \Delta c . \frac{a}{e}$. Der Durchmeſſer der Kugel ſey δ, ſo iſt ihr Gewicht $= \frac{1}{6} D \pi \delta^3$; und weil es gewöhnlich iſt, das Gewicht der Pulverladung durch das Gewicht der Kugel auszudrücken, ſo dividire man jene Zahl durch dieſe, und man erhält $\frac{\Delta}{D} . \frac{6ca}{\pi \delta^3 e}$ für das Gewicht der Pulverladung durchs Gewicht der Kugel ausgedrückt. Weil nun $c = \frac{1}{4} \pi \delta^2$ iſt; (den Spielraum beyſeit geſetzt) ſo hat man für eben dies Gewicht den Ausdruck $\frac{\Delta}{D} . \frac{3a}{2\delta e}$, oder auch $\frac{\Delta}{D} . \frac{3\mu}{2e}$, wenn man a in Calibern ausgedrückt $= \mu \delta$ annimmt.

Eine ganze Carthaune, woraus 48 pfündige eiſerne Kugeln geſchoſſen werden, iſt gewöhnlich 18 Cali-

Caliber lang. Dies giebt $\frac{3\mu}{2e} = \frac{27}{2,71828} =$ 9,197. Wenn nun das Eiſen 7,82 mahl ſchwerer als Waſſer, und das Pulver mit dem Waſſer ohngefehr von einerley ſpecifiſchen Schwere angenommen wird; ſo hat man $\frac{\Delta}{D} = \frac{1}{7,82}$, und die vortheilhafteſte Pulverladung müſte $\frac{9197}{7820}$ d. i. 1,176 mahl ſchwerer als die Kugel ſeyn, die Länge des Pulver-Raums aber würde 6,622 Caliber betragen.

172 §.

Wenn man dieſe Formuln auf die Ausübung anwenden will, ſo muß man ſich aus dem 157 §. erinnern, daß der würkliche Erfolg mit dem Reſultat der Rechnung deswegen noch nicht völlig übereinſtimmen könne, weil auſſer einigen andern Hinderniſſen, welche die Bewegung der Kugel im Lauf verzögern der Widerſtand und Gegendruck der Luft nicht mit in Betrachtung gezogen ſind. Eine genauere Rechnung würde erfordern, daß man aus dem 156 §. die daſelbſt für v gefundene Gleichung gebrauchte. Wollte man daſelbſt aus der im 157 §. angeführten Urſache x ſtatt $mb + \alpha$ ſchreiben, alſo denjenigen Theil der Kraft nicht in Rechnung bringen, der zur Beſchleunigung der ſich ausbreitenden Luft erfordert wird; ſo würde man folgende Gleichung erhalten:

$$v = \frac{mbk}{\alpha}\left(1 - \frac{a}{2\alpha}\right) l \frac{a}{b} + \frac{mbk(a-b)}{2\alpha^2} -$$

$-\frac{k(a-b)}{\alpha}$, und dieſe iſt mit H. Eulers Gleichung in der Erläutert. Artillerie 133 S. einerley. Daſelbſt iſt c der Durchmeſſer der Kugel, der hier δ heiſt, und die Materie der Kugel iſt n mahl ſchwerer als Waſſer angenommen. Wenn alſo γ das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer iſt, und hier wie bisher c den Querſchnitt des Laufs RS bedeutet, ſo iſt das Gewicht der Kugel $= \frac{2}{3} n\gamma c\delta$. Hier war das Gewicht der Kugel $= Gc\alpha$, alſo wird $\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{\gamma}{G} \cdot n\delta$. Ferner iſt k die Höhe einer Luftſäule, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre das Gleichgewicht hält. Wenn nun eben dies eine 32 Rheinl. Fuß hohe Waſſerſäule thut, ſo iſt $k = \frac{\gamma}{G} \cdot 32$, und es wird $\frac{k}{\alpha} = \frac{48}{n\delta}$. Ferner nimmt Hr. Euler $\frac{\gamma}{G} = 864$ an, alſo wird $\alpha = 576 n\delta$, und $2\alpha = 1152 n\delta$, welches Hr. Euler $= g$ ſetzt. Man hat alſo ferner $\frac{k}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{48}{n\delta g}$, und dieſe Werthe ſubſtituirt, geben, wie beym Euler

$$v = \frac{48mb}{n\delta}\left(1 - \frac{a}{g}\right) l \frac{a}{b} + \frac{48mb(a-b)}{n\delta g} - \frac{48(a-b)}{n\delta},$$

nur daß δ ſtatt c ſteht.

Es würde nicht ſchwer ſeyn, nach dieſer, oder

auch

auch der noch richtigern Gleichung des 156 §. die bisher vorgetragene Theorie der Windbüchſen zu verbeſſern, und beſonders auch die Menge Luft, welche zu der vortheilhafteſten Ladung für jede gegebene Länge des Laufs nöthig iſt, und die derſelben gemäſſe Ventil-Oefnung, genauer, als im vorhergehenden, zu beſtimmen. Weil aber die Anwendung dieſer Unterſuchung auf die Windbüchſen ſo intereſſant nicht iſt, als die Anwendung auf das Pulvergeſchütz, ſo will ich noch zeigen, wie die Formuln des 170 und 171 §. berichtiget werden müſſen, wenn man alle, oder doch wenigſtens die vornehmſten Hinderniſſe, welche die Bewegung der Kugel verzögern, in Rechnung bringen will.

173 §.

Das Gewicht der Pulver-Ladung iſt durch das Gewicht der Kugel ausgedrückt, deren eigene Schwere und Caliber nebſt der Länge des Geſchützes gleichfalls bekannt iſt: man ſucht die Geſchwindigkeit, welche das entzündete Pulver der Kugel mittheilen wird.

Aufl. Man kan ſich das Pulver ſelbſt als eine zuſammen gedrückte flüßige Maſſe vorſtellen, die ſich während der Verbrennung wie die Luft nach allen Seiten gleichförmig ausbreitet, und alsdenn laſſen ſich die Schlüſſe des 154 und 156 §. folgendergeſtalt anwenden. Man muß durch Δ die Dichtigkeit des Pulvers vor der Entzündung, und durch δ die Dichtigkeit des in den ARSD (59 Fig.) durch die Entzündung ausgebreiteten Pulvers verſtehen. Ich will alſo hier, um alles deſto beſſer zu unterſcheiden, $\Delta = nG$ annehmen, ſo wird $\frac{\delta}{G} = \frac{nb}{b+w}$.

Aus dem 153 §. muß man den Werth

$p' = \frac{G}{\delta}\left(k + \frac{1}{2}v + \frac{\alpha dv}{dw}\right)$ brauchen: wenn demnach in der Fundamentalgleichung des 154 §. $s = -w$, $z = y$, $Z = Y$, und $\int \frac{Z}{z} ds = 0$ geſetzt wird, ſo muß $p = p'$ ſeyn, und das giebt

$$C = \frac{G}{\delta}\left(k + \frac{1}{2}v + \frac{\alpha dv}{dw}\right) + v,$$ ſo daß man

$$p = \frac{G}{\delta}\left(k + \frac{1}{2}v + \frac{\alpha dv}{dw}\right) + v + \frac{Y}{ydw} . d\frac{y^2}{Y^2} v \int \frac{Z}{z} ds - \frac{y^2}{Y^2} \cdot \frac{Z^2}{z^2} . v$$ erhält.

Wenn aber nunmehr $s = b$, und $Z = 0$ geſetzt wird, ſo iſt nicht $p = k$, wie im 154 §, wenn k die Bedeutung des 8. und 18 §. hat. Man muß ſtatt p die Höhe einer Luftſäule ſetzen, deren Gewicht ſo groß, als die Federkraft des entzündeten, und in den Raum ARSD ausgebreiteten Pulvers iſt (10 §. am Ende). Dieſe Federkraft ſey ſo groß, als das Gewicht einer Luftſäule von der Dichtigkeit δ auf der Grundfläche AD $= c$ in der Höhe K, alſo $= \delta c$K, ſo muß bey der angenommenen Vorausſetzung $p =$ K ſeyn. Nun wird man leicht ermeſſen, daß dieſe Federkraft eigentlich mit der Federkraft der in dem Pulver eingeſchloſſenen, und jetzt durch die Entzündung ebenfalls ausgebreiteten reinen Luft einerley ſey. Man ſetze demnach für den jetzigen Augenblick die Dichtigkeit dieſer reinen Luft $= \delta'$, ſo iſt nach dem Mariottiſchen Geſetz ihre Federkraft $= \delta' ck$,

und

und es hat nun dies k die Bedeutung des 8ten und 18 §. Wegen der Erhitzung wird dieſe Federkraft noch gröſſer, und wenn ich annehme, daß die Feder-kraft der erhitzten zur Federkraft der temperirtrn Luft ſich wie $\beta:1$ verhalte, ſo muß man βk ſtatt k ſchreiben. Weil nun $\delta c K = \delta' c \beta k$ ſeyn ſoll, ſo wird $K = \frac{\delta' \beta k}{\delta}$. Dieſen Werth ſetze man ſtatt p, und nehme $s = b$, $Z = 0$, dem 32 §. gemäß aber ſetze man $\frac{Y}{y d w} . d \frac{y^2}{Y^2} v \int \frac{Z}{z} ds = \frac{(b+w)dv}{2dw} - v$, ſo wird

$$\frac{\delta' \beta k}{\delta} = \frac{G}{\delta}\left(k + \tfrac{1}{2} v + \frac{\alpha dv}{dw}\right) + \frac{(b+w)dv}{2dw}.$$

Es war aber $\frac{\delta}{G} = \frac{nb}{b+w}$, alſo iſt $b + w = \frac{G}{\delta}.nb$, und dies ſtatt $b+w$ geſetzt, giebt

$$\frac{\delta' \beta k}{G} = k + \tfrac{1}{2} v + \frac{\alpha dv}{dw} + \frac{nbdv}{2dw}.$$

Nun iſt noch übrig, daß man δ' durch w aus-drücke, und dies läſt ſich am füglichſten ſo bewerk-ſtelligen. Um alles genau zu unterſcheiden, muß man bemerken, daß ſich in dem Pulver-Raum drey-erley von einander verſchiedene Materien befinden, wovon jede einen Theil deſſelben einnimmt. Dieſe dreyerley Materien ſind 1.) die in den Beſtandthei-len des Pulvers eingeſchloſſene zuſammen gepreſte Luft, 2.) die zwiſchen den Pulverkörnern und an-dern offenen Zwiſchenräumchen deſſelben befindliche natür-

natürliche Luft, 3.) die gröbern Beſtandtheile des Pulvers. Nun ſey μb die Länge des Raums, den die zuſammen gepreſte Luft von dem übrigen abgeſondert einnehmen würde, νb die Länge desjenigen, den die natürliche Luft für ſich allein einnehmen würde; ſo iſt $(1-\mu-\nu)b$ die Länge deſſen, den die gröbern Beſtandtheile einnehmen würden, wenn ſie von den übrigen abgeſondert wären. Die gröbern Beſtandtheile dehnen ſich eigentlich nicht aus, ſondern werden nur durch den ganzen Raum ARSD ohngefehr gleichförmig verbreitet und zerſtreuet. Die natürliche Luft vermiſcht ſich bey der Losbrennung mit der zuſammen gepreſten: demnach nimmt die reine Luft, wenn alles in den Raum ARSD ausgebreitet iſt, davon einen Theil ein, deſſen Länge $= b + w - (1-\mu-\nu)b = (\mu+\nu)b + w$. Nun ſey die Menge Luft, welche ſich aus der ganzen Pulver-Ladung erzeuget, und aus der zuſammen gepreſten ſowohl, als auch der in den offenen Zwiſchen-Räumchen befindlich geweſenen Luft zuſammen genommen beſtehet, $= cb.mG$; ſo iſt ihre Dichtigkeit in dem Augenblick, da alles in den Raum ARSD ausgebreitet iſt, $= \frac{b}{(\mu+\nu)b+w}.mG$, und dies iſt der Werth von δ', der geſucht ward.

Man ſetze ihn in die obige Gleichung, ſo erhält man $$\frac{mb\beta k}{(\mu+\nu)b+w} = k + \tfrac{1}{2}v + \frac{\alpha dv}{dw} + \frac{nbdv}{2dw}.$$ Ob nun gleich das Integral dieſer Gleichung ohne Schwierigkeit eben ſo gefunden werden könnte, wie im 156 §. das Integral einer völlig ähnlichen Gleichung gefunden ward; ſo will ich doch hier zur Abkürzung

kürzung der Rechnung, weil alles in der Artillerie ausführlicher vorkommen ſoll, den Widerſtand und Gegendruck der äuſſern Luft beyſeit ſetzen, und dieſem gemäß $k+\frac{1}{2}v$ hinter dem Gleichheitszeichen weglaſſen. Das giebt $dv = \frac{mb\beta k}{\alpha+\frac{1}{2}nb} \cdot \frac{dw}{(\mu+\nu)b+w}$,

und es wird $v = \frac{mb\beta k}{\alpha+\frac{1}{2}nb}\, l\, \frac{(\mu+\nu)b+w}{(\mu+\nu)b}$.

Man ſetze nun $w=a-b$, ſo hat man für die Geſchwindigkeit, womit die Kugel den Lauf verläſt, die Höhe $v = \frac{mb\beta k}{\alpha+\frac{1}{2}nb}\, l\, \frac{a-(1-\mu-\nu)b}{(\mu+\nu)b}$.

Nunmehro wäre die Frage, wie groß die Zahlen μ und ν angenommen werden müſſen, welches nicht anders, als durch Verſuche ausgemacht werden kan. Aus Robins Verſuchen ſchlieſſet Hr. Euler, daß die gröbern Beſtandtheile des Pulvers ziemlich nahe die Hälfte des ganzen mit Pulver gefüllten Raums einnehmen. Dieſemnach wäre $1-\mu-\nu=\frac{1}{2}$, folglich auch $\mu+\nu=\frac{1}{2}$, und man erhält

$v = \frac{mb\beta k}{\alpha+\frac{1}{2}nb}\, l\, \frac{2a-b}{b}$. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß bey dieſer Rechnung die Gröſſe des Spielraums nicht in Betrachtung gezogen ſey: durch denſelben ſowohl, als auch durch das Zündloch entwiſcht ein Theil der aus dem Pulver erzeugten elaſtiſchen Materie, ohne die Kugel zu beſchleunigen, und deswegen muß ihre Geſchwindigkeit etwas kleiner ausfallen, als der gefundenen Formul gemäß iſt. Hr. Euler hat aus Robins Verſuchen geſchloſſen, daß dieſe Verminderung der Geſchwindigkeit eini-

einigermaſſen mit in Rechnung gebracht werden könne, wenn man die eigene Schwere des Pulvers um $\frac{1}{15}$ gröſſer annimmt, als ſie würklich iſt. Oben iſt ſie gleich nG angenommen worden, alſo darf man in der gefundenen Gleichung nur $\frac{16}{15}n$ ſtatt n ſchreiben, und man erhält $v = \frac{m\beta bk}{\alpha + \frac{8}{15}nb} \, l \frac{2a-b}{b}$.

Man behalte nun aus dem 170 §. die Bedeutung der Buchſtaben P und Q bey, und nehme das dortige $\Delta = nG$ an, ſo hat man $\alpha = \frac{P}{Gc}$, und $nb = \frac{Q}{Gc}$, folglich $\frac{b}{\alpha + \frac{1}{2}nb} = \frac{2Q}{n(2P+Q)}$. Ferner ſey δ der Caliber der Kugel, und $a = \mu\delta$, ſo iſt $\frac{2a-b}{b} = \frac{2\mu\delta . nGc - Q}{Q}$: es iſt aber $c = \frac{1}{4}\pi\delta\delta$, alſo wird $\frac{2a-b}{b} = \frac{\frac{1}{2}\mu nG . \pi\delta^3 - Q}{Q} = \frac{3\mu nGP - D . Q}{D . Q}$, weil $\pi\delta^3 = \frac{6P}{D}$ war (183 §). Man nehme noch $D = \nu G$ an, ſo erhält man $v = \frac{2m\beta kQ}{n(2P+Q)} \, l \frac{3\mu nP - \nu Q}{\nu Q}$, und ſtatt n wird nun bey der würklichen Berechnung $\frac{16}{15}n$ gebraucht.

Nach Robins Verſuchen iſt $m = 244$, und $\beta = 4$, alſo faſt $m\beta = 1000$. Hr. Euler nimmt $n = 854$, alſo $\frac{16}{15}n = 910$, welches hier ſtatt n geſetzt wird. Wenn ferner $k = 27980$ Rheinl. Fuß an-

angenommen wird, ſo erhält man $\frac{2m\beta k}{n}$ = 61494, und es wird

$$v = \frac{61494Q}{2P+Q}\, l\, \frac{2730\mu P - \nu Q}{\nu Q}.$$

(Man ſ. Eulers Erläut. Artillerie 563 S.). Nimmt man mit Hr. Euler (a. a. O. 497 S.) das Eiſen 7,82 mahl ſchwerer als Waſſer, und das Waſſer 850 mahl ſchwerer als die Luft an, ſo wird für eine eiſerne Kugel $\nu = 850 \times 7{,}82 = 6647$, und

$$\frac{2730\mu P - 6647Q}{6647Q}, \text{ beynahe} = \frac{65\mu P - 158Q}{158Q},$$

wenn man Zehler und Nenner durch 42 dividirt.

174 §.

Die vortheilhafteſte Pulver-Ladung für eine Canone oder Muskete, deren Länge in Calibern gegeben iſt, genauer als im 171 §. zu finden.

Aufl. Weil b die Länge des Pulver-Raums iſt, ſo hat man $Q = \Delta bc$, und $P = \frac{1}{6}\pi D\delta^3$, folglich

$$\frac{Q}{P} = \frac{6\Delta bc}{\pi D\delta^3},$$

welches der allgemeine Ausdruck iſt für das Gewicht der Pulverladung durchs Gewicht der Kugel ausgedrückt, und weil $c = \frac{1}{4}\pi\delta^2$ angenommen wird, ſo iſt eben dies Gewicht

$$\frac{Q}{P} = \frac{\Delta}{D} \cdot \frac{3b}{2\delta} = \frac{n}{\nu} \cdot \frac{3b}{2\delta},$$

wenn n und ν die Bedeutung des vor. §. behalten. Nun war

$$v = \frac{m\beta bk}{\alpha + \frac{1}{2}nb}\, l\, \frac{2a-b}{b},$$

und dieſer Ausdruck wird am grö-

gröſten, wenn der Factor $\frac{b}{\alpha+\frac{1}{2}nb} . l \frac{2a-b}{b}$, am gröſten iſt, die Länge b veränderlich angenommen. Man ſetze nun, abzukürzen $p = \frac{b}{\alpha+\frac{1}{2}nb}$,

und $q = l\frac{2a-b}{b}$, ſo iſt $dp =$

$$\frac{(\alpha+\frac{1}{2}nb)\,db - \frac{1}{2}nbdb}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)^2}$$ (104 §. Mechan.), und

$$dq = \frac{d.(2a-b):b}{(2a-b):b} = -\frac{bdb+(2a-b)\,db}{b(2a-b)}.$$

Das giebt

$$pdq = -\frac{bdb+(2a-b)\,db}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)(2a-b)} = -\frac{2adb}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)(2a-b)}$$

$$qdp = \frac{(\alpha+\frac{1}{2}nb)\,db - \frac{1}{2}nbdb}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)^2}\, l\frac{2a-b}{b}$$

$$= \frac{\alpha db}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)^2}\, l\frac{2a-b}{b},$$

und man muß $d.pq = pdq + qdp = 0$ ſetzen. Demnach erhält man

$$\frac{\alpha}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)^2}\, l\frac{2a-b}{b} - \frac{2a}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)(2a-b)} = 0$$

oder $\frac{\alpha}{(\alpha+\frac{1}{2}nb)}\, l\frac{2a-b}{b} - \frac{2a}{2a-b} = 0$,

und es wird $l\frac{2a-b}{b} = \frac{2a(\alpha+\frac{1}{2}nb)}{\alpha(2a-b)} =$

$\frac{2a}{2a-b} + \frac{nab}{\alpha(2a-b)}$. Aus dieſer Gleichung muß man

man b ſuchen, und dies zu erleichtern, kan man $\frac{2a-b}{b}=u$ ſetzen, ſo wird $2a=bu+b$, und $b=\frac{2a}{1+u}$. Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo wird

$$lu=\frac{1+u}{u}+\frac{na}{\alpha u}, \text{ oder } lu=1+\frac{1}{u}+\frac{na}{\alpha u}$$

gefunden. Noch nehme man $a=\mu\delta$ an, und erinnere ſich, daß das Gewicht der Kugel $\frac{1}{6}\nu G\pi\delta^3=Gc\alpha$ war; weil nun $c=\frac{1}{4}\pi\delta^2$ iſt, ſo wird $\frac{2}{3}.\nu\delta=\alpha$, und $\delta=\frac{3}{2}.\frac{\alpha}{\nu}$. Das giebt $\frac{a}{\alpha}=\frac{\mu\delta}{\alpha}=\frac{3}{2}.\frac{\mu}{\nu}$, und es wird $lu=1+\frac{1}{u}+\frac{3}{2}.\frac{n\mu}{\nu u}$. Aus dieſer Gleichung läſt ſich u vermittelſt einer oder der andern Näherungs-Methode finden, da dann $b=\frac{2\mu}{1+u}\delta$ gefunden wird. Dieſer Werth ſtatt b geſetzt, giebt die vortheilhafteſte Ladung $\frac{Q}{P}=\frac{\Delta}{D}.\frac{3\mu}{1+u}$, die alſo vom Caliber der Kugel gar nicht abhängt, weil u nicht davon abhängt.

175 §.

Ich will dieſe Rechnung noch auf das im 171 §. beygefügte Exempel anwenden. Daſelbſt war $\mu=18$, und weil eine eiſerne Kugel angenommen ward, ſo iſt $\nu=6647$. Uebrigens wird $n=910$ an-

angenommen: alſo iſt $\frac{3n\mu}{2y} = \frac{1365}{6647}\mu = 0{,}205$. μ ſehr nahe $= \frac{1}{5}\mu$, und es wird $lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{\mu}{5u}$

oder $lu = 1 + \frac{\mu + 5}{5u}$. Für $\mu = 18$ iſt nun

$lu = 1 + \frac{23}{5} \cdot \frac{1}{u}$, woraus man $ulu = u + 4{,}6$

und $u = \frac{4{,}6}{lu - 1}$ erhält. Um nun erſtlich ein paar Grenzen in ganzen Zahlen zu finden, zwiſchen welchen u enthalten ſeyn muß, wären berechnete Tafeln für die natürlichen Logarithmen ſehr bequem, ſo wie ſie Hr. Lambert in ſeinen Zuſätzen zu den Logarithmiſchen und Trigonometriſchen Tabellen. Berlin 1770. kürzlich geliefert, und noch vollſtändiger zu liefern verſprochen hat. Nimmt man $u = 6$ an, ſo iſt log. nat. $u = 1{,}7917595$, und es wird $\frac{4{,}6}{lu - 1} = \frac{4{,}6}{0{,}7917595} = 5{,}80985$. Weil dieſe Zahl wenig kleiner als 6 iſt, und der Bruch $\frac{4{,}6}{lu - 1}$ wächſt, wenn u abnimmt, ſo muß u zwiſchen 6 und 5,81 fallen. Man verſuche demnach die Vorausſetzung $u = 5{,}9$, und man findet aus der XIII. lambertſchen Tafel (a. a. O. 123 S.)

$l.\,59 = 4{,}0775373$
$l.\,10 = 2{,}3025851$

alſo $l.\,5{,}9 = 1{,}7749522 = lu$.

Das giebt $\frac{4{,}6}{lu - 1} = \frac{4{,}6}{0{,}7749522} = 5{,}93585$.

Die-

Dieſe Zahl kommt der angenommenen 5,9 ſehr nahe, und man kan nun nach Art einer Regel Falſi ſo ſchlieſſen:

Der Werth $u=6$	$u=5{,}9$
giebt $\frac{4{,}6}{lu-1}=5{,}80785$	$\frac{4{,}6}{lu-1}=5{,}93585$
Differenz $=+0{,}19015$	Diff. $=-0{,}03585$

Ferner ſetzt man an: die Summe beyder Differenzen 0,226 verhält ſich zu 0,03585, wie die Differenz beyder Werthe von u, nemlich 0,1 zur vierten Zahl, als dem Ueberſchuß der geſuchten Zahl über 5,9. Die Rechnung giebt $\frac{0{,}03585 \cdot 0{,}1}{0{,}226} = \frac{3{,}585}{226} = 0{,}016$, und man erhält $u = 5{,}916$.

Das giebt nun $b = \frac{36}{6{,}916}\delta = 5{,}205 \cdot \delta$, und $\frac{Q}{P} = \frac{910}{6647} \cdot \frac{54}{6{,}916} = 1{,}07$. Hr. Euler hat in der Erläutert. Artillerie 600. 601 S. eine nach dieſen Formuln berechnete Tafel mitgetheilt, worin dies Exempel von 18 Caliber auch vorkömmt. Daſelbſt iſt $\frac{Q}{P} = 1{,}04$ angegeben, vermuthlich weil Hr. Euler, wie im Anfang dieſes §, $\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{v} = \frac{1}{5}$, alſo $\frac{n}{v} = \frac{\Delta}{D} = \frac{2}{15}$ angenommen hat. Dies giebt

alsdenn $\frac{Q}{P} = \frac{2}{5} \cdot \frac{18}{6,916} = \frac{36}{34,58} = 1,04.$
Nimmt man nun mit Hr. Euler $Q = 1,04 . P$ an, ſo

findet man $v = \frac{61494 . 1,04}{3,04} \, l \, \frac{65 . 18 - 158 . 1,04}{158 . 1,04}$

$= 20774 \, l \, \frac{1005,68}{164,32}$. Es iſt aber

Brigg. Log. $1005,68 = 3,0024599$
—— Log. $164,32 = 2,2156904$

alſo Brigg. Log. $\frac{1005,68}{164,32} = 1,7867695$

und die Multiplication mit 2,3025851 giebt den natürlichen Logarithmen eben der Zahl = 3,814185, woraus man $v = 79236$ Fuß erhält, und die zugehörige Geſchwindigkeit beträgt 2224 Rheinl. Fuß in einer Secunde. Im leeren Raum würde demnach die Weite des gröſten Bogenſchuſſes unter dem Erhöhungswinkel von 45°, auf der Horizontfläche gemeſſen, 158472 Rheinl. Fuß betragen (73 §. Mech.), welches mehr als 6 deutſche Meilen ſind: die Weite des Kernſchuſſes auf einer etwa 4 Fuß tief unter der Mündung der Canone liegenden Horizontfläche gemeſſen aber würde (80 §. Mech.) = $\sqrt{4 . 4 . v} = 4\sqrt{v} = 1128$ Rheinl. Fuß befunden werden.

Der Widerſtand der Luft vermindert dieſe Schußweiten, und beſonders die Weite der Bogenſchüſſe, ganz ungemein. Wenn eine ganze Carthaune von 18 Caliber mit halb Kugel ſchwer Pulver geladen wird, ſo wirft ſie vermöge der Erfahrung bey der

gröſten

gröſten Elevation ihre Kugel 14400 Rheinl. Fuß weit (Struenſee Anfangsgründe der Artillerie 221 S.). Wenn man aber nach dem 173 §. die Rechnung anſtellet, ſo findet man

$$v = \frac{61494 \cdot \frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} \, l \, \frac{65 \cdot 18 - \frac{1}{2} \cdot 158}{\frac{1}{2} \cdot 158}$$

$$= 12300 \, l \frac{1091}{79} = 32169,$$ alſo müſte die gröſte Schußweite 64338 Rheinländiſche Fuß ausmachen, da doch die würkliche Schußweite noch nicht den vierten Theil davon beträgt.

Der IX. Abſchnitt.

Vom Stoß des Windes an feſte Körper.

176 §.

Die Luft, welche die Erde umgiebt, und die ſo genannte Atmoſphäre ausmacht, iſt nur ſehr ſelten, und vielleicht niemahls in einer und eben derſelben Gegend nahe an der Erdfläche völlig in Ruhe: gewöhnlich bemerkt man an freyen und durch keine Gebäude, oder andre Hinderniſſe, eingeſchloſſenen Orten einen beſtändigen Zug der Luft von einer Gegend des Horizonts nach der gegen über liegenden, und dieſer Zug der Luft, der in der Atmoſphäre ohngefehr das, was das beſtändig fortlaufende Waſſer in Strömen iſt, heiſt der **Wind**. Wenn man ſich

einen ſolchen Luftſtrohm in gewiſſer Breite und Höhe auf der Erdfläche vorſtellet, ſo können ſich zwar die einzelnen Lufttheilchen mit ſehr verſchiedenen Geſchwindigkeiten auch mit mancherley Veränderungen ihrer Richtung fortbewegen, obgleich die ganze Maſſe hauptſächlich einer gewiſſen Richtung folgt: hier werde ich aber allein den Fall betrachten, wenn alle Theilchen dieſes Luftſtrohms mit gleicher Geſchwindigkeit nach parallelen Richtungen fortrücken, da dann die Richtung und Geſchwindigkeit der einzelnen Lufttheilchen mit der **Richtung** und **Geſchwindigkeit** des **Windes** einerley iſt. Man unterſcheidet auf dieſe Art die **regulären Winde** von **Wirbelwinden**, und man ſchlieſt aus den Würkungen der leztern, daß mit denſelben kreisförmige Bewegungen der Lufttheilchen verbunden ſind. Daß der Wind, wenn er an feſte Körper ſtößt, eine ähnliche Gewalt dagegen ausübe, wie das in einem Strom oder Gerinne fortflieſſende Waſſer, davon kan man ſich durch unzählige Erfahrungen überzeugen, und die Sache iſt zu bekannt, als daß es nöthig wäre, ein mehreres zu ihrer Beſtättigung zu ſagen. Man fühlet ſelbſt den Gegendruck des Windes, wenn man ihm in ſeiner Richtung entgegen gehet, und wird von demſelben fortgetrieben, wenn man ihn auf dem Rücken hat. Wer weiß es nicht, daß man ſich eben deswegen ſchon längſt des Windes auf ähnliche Art wie des Waſſers bedient hat, Maſchinen zu treiben, und ſonſt auch allerley andre Arten von Bewegungen hervorzubringen.

177 §.

60 Fig. **Der Wind ſtößt mit paralleler Bewegung ſenkrecht gegen eine ebene Fläche** *CD*, **die ſelbſt** unbe-

unbeweglich iſt, und die Gröſſe der Fläche *CD* nebſt der Geſchwindigkeit des Windes iſt gegeben: man ſucht die Stärke des Drucks, den dieſe Ebene leidet.

Aufl. Man kan auch hier diejenige Vorausſetzung annehmen, worauf die Auflöſung der ähnlichen Aufgabe im 98 §. Hydraul. gebauet iſt. Wenn die Luft völlig in Ruhe wäre, und ſtatt deſſen die ebene Fläche CD mit paralleler Bewegung und eben der Geſchwindigkeit nach der grade entgegengeſetzten Richtung *Ga* fortbewegt würde; ſo wäre der Widerſtand, den ſie litte, eben ſo groß, als der Druck des gegen die Ebene ſtoſſenden Windes iſt. Es ſey demnach die Höhe, welche der Geſchwindigkeit des Windes zugehört, $=v$, die Gröſſe der Ebene CD $=a^2$, und das Gewicht eines Cubicfuſſes Luft $=$ G; ſo wäre vermöge des 301. 325. 327. 328 §. Mech. der geſuchte Druck $P = Ga^2v$, ſo groß nemlich, als das Gewicht einer Luftſäule auf einer der Ebene CD gleichen Grundfläche, und deren Höhe einerley iſt, mit derjenigen, welcher die Geſchwindigkeit des Windes zugehört.

Ich bin in bisheriger Ermangelung einer vollſtändigern und zur überzeugenden Richtigkeit gebrachten Theorie von der Stärke des Stoſſes flüßiger Maſſen an feſte Körper genöthiget, bey dem gewöhnlichen Vortrage dieſer Lehre zu bleiben, ob ich gleich im 99 §. der Hydraulik der dabey noch obwaltenden Schwierigkeiten ſchon erwehnt habe. Ich beziehe mich übrigens auch hier auf dasjenige, was ich im 100 §. Hydraul. ſchon geſagt habe: des Hrn. Lamberts Zweifel und Erinnerungen gegen die Art und Weiſe, wie man ſonſt aus des Hrn. Robins

Verſuchen, und den ähnlichen Verſuchen des Herrn d'Arcy gerechnet hat, um die Theorie vom Widerſtande der Luft zu prüfen, ſcheinen mir zu erheblich zu ſeyn, als daß ich nicht Bedenken tragen ſollte, alles das für ausgemacht zu halten, was Hr. Robin aus ſeinen Verſuchen geſchloſſen hatte. Man kann indeſſen $P = \zeta G a^2 v$ annehmen, und durch ζ eine beſtändige Zahl verſtehen, die durch Verſuche noch näher beſtimmt werden muß. Hiebey würden doch wenigſtens die Vorausſetzungen ſtehen bleiben, welche man gewöhnlich annimmt, daß 1) auf einerley Fläche, und bey verſchiedenen Geſchwindigkeiten des Windes die Stärke des Windſtoſſes dem Quadrat der Geſchwindigkeit proportional ſey, 2) bey einerley Geſchwindigkeit des Windes aber der Gröſſe der Fläche, welche den Stoß leidet. Indeſſen ſind dieſe Vorausſetzungen ſo vollkommen ſicher nicht, daß man ſie für ganz ausgemacht halten könnte.

178 §.

Es ſey ABEF die flüßige Maſſe, wovon alle Theilchen mit paralleler Bewegung ſenkrecht gegen die Fläche CD fortſtröhmen: man ſtelle ſich die ganze Maſſe in ſehr zarte Strahlen *ab*, *ab*, u. ſ. f. eingetheilt vor, ſo wird man leicht ermeſſen, daß von dieſen Strahlen, wenigſtens diejenigen, welche in ihrer urſprünglichen Richtung grade auf die Fläche zutreffen, von ihren erſten gradlinichten Wegen abgelenkt werden, und ſtatt deſſen Wege nehmen müſſen, die ſich ohngefehr ſo krümmen, wie es die Linie *abcd* vorſtellen. Dieſe Linien müſſen ſich deſto mehr krümmen, je näher ſie auf die Mitte der Fläche CD zutreffen, und deſto weniger, je näher die Puncte,

wo

wo ihre verlängerten urſprünglichen Richtungen die Ebene CD treffen würden, an den Grenzen C und D dieſer Ebene liegen. Selbſt diejenigen, welche ſchon auſſerhalb der Grenzen, des grade gegen CD ſtrömenden Waſſerpriſma liegen, müſſen ſich noch etwas biegen, wie $\alpha\beta\gamma\delta$, aber deſto weniger, je weiter ſie über dieſe Grenzen hinaus fallen, bis endlich dieſe Krümmungen nicht mehr merklich bleiben, und die weiter hinaus fallenden Strahlen, wie AF, BE, ihren Weg wieder ungeändert in graden Linien fortſetzen. Wenn nun gleich die Geſchwindigkeit aller Elemente eines jeden ſolchen einzelnen Strahls ſo lange er gradlinicht iſt, einerley bleibt, ſo muß doch dieſe Geſchwindigkeit Aenderungen leiden, ſo bald der Weg des Strahls wie bey *b* ſich zu krümmen anfängt. Die Bewegung eines jeden Elements wird in dem Augenblick, da es in *b* anlangt, verzögert, und die Geſchwindigkeit nimmt von jetzt an bis auf eine gewiſſe Grenze ab: eben dieſe Geſchwindigkeit nimmt bald darauf wieder zu, wenn das Element gegen die Grenzen C und D der Ebene zu flieſt. Stellt man ſich nun alle dieſe zarten Strahlen des Flüßigen als ſo viele kleine Röhren vor, ſo muß man auch annehmen, daß ihre Querſchnitte, ſoweit dieſe Röhrchen krumm ſind, von *b* durch *c* bis *d*, nicht einerley Gröſſe haben; man muß ſich vorſtellen, daß dieſe Röhrchen bey *b* anfangen ſich zu erweitern, und hiernächſt gegen C und D zu ſich wieder zu verengern. Wenn nun die Geſtalt dieſer Röhren bekannt wäre; ſo könnte man daraus das Geſetz finden, nach welchem ſich die Geſchwindigkeit des durchflieſſenden Waſſers ändert: daher lieſſe ſich ferner der Druck finden, dem die flüßige Maſſe in

dieſen Röhrchen ausgeſetzt iſt, ſo wie auch der geſammte Druck, den die Fläche CD von der zunächſt vorbey flieſſenden flüßigen Maſſe leidet. Wäre umgekehrt der Druck bekannt, dem jedes Element der Röhre ausgeſetzt iſt, ſo lieſſe ſich daher die Geſchwindigkeit der Elemente, und die Geſtalt dieſer Röhrchen finden. Hr. Euler hat in der Abhandlung: Dilucidationes de reſiſtentia fluidorum Comment. Nov. Petrop. Tom. VIII. p. 197. ſqq. verſucht, wie weit ſich dieſe Unterſuchung treiben laſſe, wenn man die gewöhnliche Regel, den Widerſtand in Rechnung zu bringen, als beynahe richtig annimmt. Doch ſind ſeine Rechnungen nur auf unelaſtiſche flüßige Maſſen eingeſchränkt, und bisher ſind die Reſultate derſelben noch zu weit von der Anwendung auf die Ausübung entfernt, als daß ich es wagen dürfte, Anwendungen zu verſuchen, oder Herrn Eulers Unterſuchungen weiter zu treiben.

179 §.

Geſetzt nun die gemeine Regel des Widerſtandes, oder auch des Stoſſes flüßiger Maſſen an feſte Körper träfe auch ſo ziemlich zu, wenn ſich alles unter den Umſtänden befindet, wie die noch mangelhafte Theorie vorausſetzt; ſo läſt ſich doch einigermaſſen ein Grund angeben, woher es kommt, daß die Verſuche den Widerſtand der Luft und die Stärke des Windſtoſſes zuweilen etwas gröſſer geben, als die Regel des 177 §. Eine ebene Fläche CD, die ſich in der Atmoſphäre befindet, und von allen Seiten mit Luft umgeben iſt, leidet alsdenn, wenn die Luft vollkommen ruhig iſt, von beyden Seiten den natürlichen Druck der Atmoſphäre, der von ihrer Fe-

derkraft herrührt. In einer unelaſtiſchen, aber doch ſchweren flüßigen Maſſe, dergleichen das Waſſer iſt, würde die Fläche ebenfals auf beyden Seiten dem hydroſtatiſchen Druck ausgeſetzt ſeyn, der von der Waſſerhöhe über der Fläche abhängt. Nur in einer unelaſtiſchen und blos trägen flüßigen Maſſe, würde die Ebene CD, ſo lange alles in Ruhe iſt, gar keinen Druck leiden. Wenn man ſich nun die Vorſtellung macht, daß ABEF eine ſolche blos träge und unelaſtiſche flüßige Maſſe ſey, die nach der Richtung *ab* ſenkrecht gegen CD ſtrömt; ſo ſcheint es, daß die Stärke des Drucks, den CD leiden würde, ziemlich nahe = *Gaav* ſeyn müſte. Unmittelbar hinter CD würde ein leerer Raum entſtehen; denn weil alles nach der Richtung AF fortſtrömt, ſo ſiehet man wohl, daß die flüßige Maſſe nicht ſogleich unmittelbar hinter CD wieder zuſammen flieſſen könne. Im Waſſer und in der Luft erfolgt dies aus ganz andern Urſachen: das ſchwere Waſſer ſowohl, als die Luft, welche alle beyde, wegen ihrer Schwere einem Druck ausgeſetzt ſind, ſtreben nach allen Seiten auszuweichen, und treten ſehr ſchnell hinter der Fläche von allen Seiten her, auch ſelbſt von unten hinauf hinter der Fläche wieder zuſammen. Dies hat indeſſen doch wohl wenigſtens den Erfolg, daß der Druck von der hintern Seite gegen CD, der allein vom Gewicht, oder zugleich von der Federkraft der flüßigen Maſſe herrührt, ſo groß nicht iſt, als auf der andern Seite, die dem Stoß ſelbſt ausgeſetzt iſt. Hier häuft ſich die flüßige Maſſe an, und hinter der Fläche erfolgt das Gegentheil. Der Wind ſcheint alſo wohl vor der Fläche die Federkraft der Luft zu verſtärken, und im Gegentheil hinter derſelben

ſelben zu vermindern. Demnach muß CD blos wegen dieſer ungleichen Federkraft einen Druck leiden, welcher zu dem Stoß ſelbſt noch hinzu kommt. Es ſey der natürliche Druck der Atmoſphäre mit dem Gewicht einer Luftſäule in der Höhe $= k$ im Gleichgewicht: wenn nun dagegen die Federkraft der Luft unmittelbar hinter der Fläche CD mit dem Gewicht einer Luftſäule in der Höhe q im Gleichgewicht, und $q < k$ iſt; ſo leidet CD auſſer dem eigentlichen Stoß noch den Druck $Gaa(k-q)$ nach der Richtung des Stoſſes, und der geſammte Druck iſt $= Gaa(v+k-q)$. Eigentlich beſtehet die Würkung des Stoſſes würklich nur in der Vermehrung der Federkraft der Luft vor der Ebene, und ihrer Verminderung hinter der Ebene, und man kan annehmen, daß der vermehrten Federkraft die Höhe $k+v$ zugehört. Demnach wäre nur die Frage, wie q von v abhängt, und dies iſt grade der Punct, den die bisher noch unvollkommene Theorie nicht entſcheiden kan. Soviel ſiehet man wohl, daß $q = k$ ſeyn muß, wenn $v = 0$ iſt, und daß im Gegentheil $q = 0$ werden müſte, wenn $v = \infty$ werden könnte: denn nun würde wohl hinter der Fläche ein völlig leerer Raum entſtehen. Aber das iſt auch alles, was man weiß, und man kann leicht allerley Formuln erſinnen, die beyden Bedingungen ein Genüge leiſten. Die ſimpelſte wäre, wenn man $q = \frac{Bk}{B+v}$ annehmen dürfte, da dann B durch Verſuche beſtimmt werden müſte, und dies würde den Windſtoß $= Gaa\left(v+k-\frac{Bk}{B+v}\right) =$

Gaa

$Gaa\left(v+\frac{kv}{B+v}\right)$ geben. So kommt Hr. Euler auf dieſe Formul in den Recherches plus exactes ſur l'effet des moulins a vent. M. ſ. die Hiſtoire de l'Academie Royales des Sciences de Pruſſe Tom. XII. A. 1756 p. 165. ſqq. Ich habe nicht finden können, daß ſie der Sache näher komme als die gewöhnliche, wenigſtens alsdenn nicht, wenn v in Vergleichung mit k nur klein iſt. So lange v nicht ſonderlich groß iſt, muß q beynahe $= k$ bleiben, deswegen muß B ſehr groß, und gröſſer als k ſeyn; alsdenn aber iſt $1+\frac{k}{B+v}$ beynahe unveränderlich, wenn ſich gleich v ändert, und dieſer Ausdruck iſt als ein beſtändiger Factor, wie ζ (177 §.) zu betrachten. In der That betrachtet Hr. Euler die Sache eben ſo, wie man finden wird, wenn man in der angeführten Abhandlung den XXVI §. 180 S. nachſehen will.

180 §.

Die Richtung GV des Windſtoſſes iſt gegen die Ebene CD unter einem ſchiefen Winkel geneigt: man ſucht die Stärke des Stoſſes. 61 Fig.

Aufl. Wenn man ſich denjenigen Theil des Luftſtrohms allein vorſtellt, der die Ebene CD trift, ſo wird dies ein Luftpriſma ſeyn, welches die Ebene CD ſchief ſchneidet. Zerlegt man nun wie im 103 §. Hydraul. die Geſchwindigkeit des Windes in zwo andre auf CD ſenkrecht nach GL, und mit CD parallel nach GE; ſo wird $GL = \sin\vartheta\sqrt{v}$, den Anſtoßwinkel $EGV = \vartheta$ geſetzt, und nach der Regel

des

des 177 §. wäre nach der ſenkrechten Richtung GL der Stoß $= Gaav \sin\vartheta^2$, oder wenn man will, $= \zeta Gaav \sin\vartheta^2$.

Ich geſtehe gern, daß die Schlüſſe, welche dieſen Ausdruck rechtfertigen ſollen, mangelhaft ſind: wenn aber Hr. Euler ſelbſt meynt, daß eine wahre und völlig ſcharf erwieſene Theorie vom Stoß und Widerſtande flüßiger Maſſen die Kräfte des menſchlichen Verſtandes zu überſteigen ſcheine; ſo wird es mir um ſo weniger verdacht werden können, wenn ich keine ſchärfere Unterſuchungen anzuſtellen wage. Man ſ. die Comment. Nov. Petrop. T. VIII. p. 200. Wenn gleich der Druck gegen die Fläche beym ſenkrechten Stoß richtig der Höhe v gemäß wäre, ſo darf man doch wohl nicht ſchlechthin beym ſchiefen Stoß die Höhe $v \sin\vartheta^2$ brauchen, als wenn in Abſicht der aus der Zerlegung entſtandenen ſenkrechten Geſchwindigkeit alles ſo wäre, wie es beym ſenkrechten Stoß mit der Geſchwindigkeit $\sin\vartheta\sqrt{v}$ ſeyn würde. Die zarten Strahlen, worin man dem 178 §. gemäß die ganze anſtoſſende flüßige Maſſe in Gedanken zerlegen kan, werden ſich, wie man leicht ſiehet, beym ſchiefen Stoß ganz anders, als beym ſenkrechten krümmen, und zwar auf der einen Seite bey C anders, als auf der andern bey D, da ſtatt deſſen dieſe Krümmungen an den Grenzen der Fläche beym ſenkrechten Stoß auf der einen Seite ſo, wie bey der andern ausfallen. Dem ſey indeſſen, wie ihm wolle, ſo ſehe ich mich doch genöthiget, die Formul $Gaav \sin\vartheta^2$ bey den folgenden Unterſuchungen zum Grunde zu legen; alſo zugleich die gewöhnliche Regel anzunehmen, daß der Stoß dem Quadrat vom Sinus des Anſtoßwinkels proportional ſey, wenn die

die Geſchwindigkeit des Windes, und die Ebene, welche den Stoß leidet, einerley iſt.

181 §.

Herr Schober hat verſchiedene Verſuche über den Widerſtand der Luft ſowohl, als auch über die Stärke des Windſtoſſes angeſtellet, und in einer beſondern Abhandlung bekannt gemacht, die im IX. Bande des Hamburgiſchen Magazins im zweyten und dritten Stück abgedruckt iſt. Auf dem Schachthauſe zu Köſen an der Saale im ſechſten Stock ſtellte man eine eiſerne Spindel aufrecht, oben auf dem Kopf der Spindel ward eine Leiſte ſenkrecht gegen die Axe der Spindel befeſtiget, welche auf jeder Seite anderthalb Fuß hervor ging, und etwa 2 Zoll breit war. Auf der Leiſte ward grade über dem Mittelpunct der Spindel ein horizontal liegendes Rad mit einem Geſperre angebracht, und am Ende der Leiſte drey ſtählerne Federn, welche, wenn ſich das Rad umdrehete, durch eine Schnur, ſo ſich auf das Rad aufwand, angeſpannt wurden, und zwar entweder nur eine allein, oder zwo, oder auch alle drey zugleich, nachdem es die Spannung erforderte. Aus dem Rade gieng ein flacher Stab, an deſſen Ende eine Fläche, welche gegen die Luft beweget werden ſollte, angemacht war, und zwar ſo, daß das Mittel der Fläche von der Axe der Spindel allemahl 4 Fuß weit entfernt war: auf die Spindel aber war eine gute geflochtene Schnur aufgewunden, die von da über eine Rolle gieng, und mittelſt welcher die Spindel, nachdem alles gehörig vorgerichtet war, durch hinlängliche Gewichte umgetrieben wurde. Dieſe Spindel mit der Leiſte konnte ſich zwar allein umdrehen,

drehen, ohne das Rad, welches eigentlich das Sperrrad war, mit umzudrehen: (dies hatte auch ſeine eigene ſtählerne Axe, die mit zwo Spitzen in meßingenen Pfannen ſtund.) man konnte aber den Stab mit der am Ende daran befindlichen Fläche vermittelſt eines Stifts an dem Ende der Leiſte befeſtigen, und wenn alsdenn durch angehängte Gewichte die Spindel umgetrieben ward, ſo liefen Spindel und Rad zugleich um, und zwar beſtändig mit einerley Umlaufs-Geſchwindigkeit. So war, wie ich es verſtehe, alles eingerichtet, wenn man durch öfteres Probiren ſuchte, wie viel Gewicht an der Spindel seyn müſte, wenn die letztern 60 Umwendungen derſelben, nach Erfordern der Geſchwindigkeit, welche man in dem Verſuche brauchte, in 120 oder 60, oder 30 Secunden ablaufen, folglich die Fläche, oder vielmehr ihr von der Axe der Spindel um 4 Fuß entfernter Mittelpunct, mit einer Geſchwindigkeit von $12\frac{1}{2}$ oder 25 oder 50 Fußen gegen die Luft bewegt werden ſollte. Hatte man dies Gewicht gefunden, ſo wurde, nachdem man die Schnur wieder auf die Spindel gewunden hatte, der Stab von der Leiſte los gemacht, und das Gewicht von neuen aufgehängt, welches den im erſten Augenblick allein die Spindel mit der Leiſte in Bewegung ſetzte. Die Stahlfedern an der Leiſte waren aber vermittelſt einer Schnur mit dem Rade verbunden, ſo daß hiedurch das Rad mit dem Stabe und der Fläche gleichfalls in Bewegung geſetzt ward, und weil der Widerſtand der Luft ſich der Fläche entgegen ſetzte, ſo blieb der Stab in der Bewegung anfangs zurück, ſo daß Stab und Leiſte einen Winkel mit einander machten, der nach und nach gröſſer ward. Weil aber nun zugleich die Federn

dern geſpannt wurden, und dies immer mehr, je mehr der erwehnte Winkel an Gröſſe zunahm; ſo kam endlich, wenn der Widerſtand der Luft mit der Federkraft der Stahlfedern im Gleichgewicht war, das Rad mit dem Stabe und der Fläche in eine gleiche Umlaufsbewegung. Wenn alles in dieſem Zuſtande war, ſo ließ man einen Sperrkegel vorfallen, der Stab und Leiſte in einerley Lage gegen einander, folglich die Feder eben ſo geſpannt erhielte. Am Ende verſuchte man, wie viel Gewicht an der um die Peripherie des Rades gelegten Schnur ziehen muſte, um die Federn eben ſo ſtark zu ſpannen. Der Halbmeſſer des Rades bis dahin genommen, wo ſich die Schnur aufwickelte, war 0,23 Fuß; wenn alſo das Gewicht, welches die Feder ſpannte, $=P$, der Widerſtand der Luft gegen die Fläche $=R$ war, ſo hatte man $R=\frac{23}{400}P$. Hiebey aber war noch zu erwegen, daß der Stab ſelbſt einen Theil des Widerſtandes der Luft leidet, worauf bey den Schlüſſen aus dieſen Verſuchen Rückſicht genommen werden muß. Um dieſen Theil des Widerſtandes zu erfahren, wurde der Stab, ſo viel als jede Fläche deckte, nach dem Verſuch jedesmahl abgeſchnitten, und der ſo weit verkürzte Stab allein eben ſo, wie zuvor gegen die Luft bewegt, um zu beobachten, wie ſtark alsdenn jedesmahl die Feder angeſpannt würde. Das Gewicht, welches die Feder eben ſo ſtark ſpannte, muſte von dem vorigen abgezogen werden, und ſo hatte man dasjenige Gewicht P, woraus $R=\frac{23}{400}P$ gefunden werden konnte.

Der auf dieſe Art geprüften Flächen waren verſchiedene, fünf ebene Quadratflächen, eine Scheibe, eine halbe Kugel, ferner eine Pyramide und ein Ke-

gel mit der Spiße grade gegen die Luft gekehrt, und ein hohler Kegel mit der Höhlung grade gegen die Luft geſetzt. Von den fünf ebenen Flächen waren die drey kleinern aus dünnen meßingenen Blech gemacht, und die beyden gröſten waren dünne hölzerne Rahmen, mit ſtarkem Papier überzogen. Die Seitenlinie der kleinſten war beynahe 2,6 Zoll, und ihr Inhalt 6,72 Quadrat-Zoll: die übrigen nach der Ordnung waren ihrem Flächen-Inhalt nach 2mahl, 4mahl, 8mahl, 16mahl gröſſer, als die erſte. Die Scheibe hielte 1,95 Zoll im Durchmeſſer, alſo war ihr Inhalt 3 Quadratzoll. Die beyden Kegel nebſt der Halbkugel hatten eine eben ſo groſſe Grundfläche, und die Höhe der Kegel war dem Durchmeſſer ihrer Grundfläche gleich. Die Pyramide war regulär, ihre Grundfläche ein Quadrat von 53,76 Quadratzoll Inhalt, und ihre Höhe ſo groß, als die Seitenlinie des Quadrats. Noch bemerke ich, daß Hr. Schober durchgängig die Decimal-Abtheilung annimmt, daß das gebrauchte Fußmaaß das franzöſiſche, und das Pfundgewicht das Cöllniſche ſey, das Pfund zu 32 Loth gerechnet.

182 §.

Ich werde nun die Schoberſchen Verſuche ſelbſt herſetzen, und ſie hiernächſt mit der Theorie vergleichen.

Erſte Claſſe
der Verſuche, wo man ebene Quadratflächen ſenkrecht gegen die Luft bewegt hat.

Verſuche	Geſchwindigkeit	Gröſſe der Fläche	Das Gewicht P	R
1	25 Fuß	6,72 Qz.	1 Pf. 11 Lt.	2,47 Lt.
2	= =	13,44 =	2 = 24½ =	5,09 =
3	= =	26,88 =	6 = 1 =	11,10 =
4	= =	53,76 =	13 = 0 =	23,92 =
5	= =	107,52 =	29 = 20 =	54,51 =
6	12½ =	107,52 =	7 = 30½ =	14,63 =
7	12½ =	13,44 =	0 = 27½ =	1,56 =
8	50 =	13,44 =	10 = 17¼ =	19,09 =

Zweyte Claſſe

der Verſuche, wo man eine Quadratfläche, 26,88 Quadr. Zoll groß, mit einerley Geſchwindigkeit von 25 Fuß unter verſchiedenen Anſtoßwinkeln gegen die Luft bewegt hat.

Verſuche	Anſtoßwinkel.	Das Gewicht P	R
1	90 Grad	6 Pf. 1 Lt.	11,10 Lt.
2	80 =	5 = 29 =	10,87 =
3	70 =	5 = 18 =	10,23 =
4	60 =	4 = 26 =	8,85 =
5	50 =	3 = 27 =	7,07 =
6	40 =	2 = 30 =	5,40 =
7	30 =	2 = 1 =	3,74 =
8	20 =	1 = 10 =	2,41 =
9	10 =	0 = 19½ =	1,12 =

Dritte Claſſe

der Verſuche, wo man den Widerſtand auf ebene, krumme und gebrochene Flächen mit einander verglichen hat.

	Geſchwindigkeit.	Das Gewicht P	R
Kreisfläche	50 Fuß	2 Pf. $13\frac{1}{2}$ Lt.	4,45 Lt.
Kugelfläche	— —	1 = 10 =	2,44 =
erhab. Kegelfl.	— —	1 = $3\frac{1}{2}$ =	2,04 =
hohle Kegelfl.	— —	2 = $18\frac{1}{2}$ =	4,74 =
Pyramide	25 Fuß	6 = 29 =	12,71 =

Die Abmeſſungen dieſer Flächen ſind ſchon am Ende des vor. §. angegeben.

183 §.

Dieſe Verſuche können auf mehr als eine Art dienen, die Theorie vom Widerſtande zu prüfen: man kan ſie einmahl brauchen, wenn man wiſſen will, ob die abſolute Gröſſe des Widerſtandes nach der gemeinen Regel richtig gefunden wird; man kan ſie auch brauchen, wenn man wiſſen will, ob der Widerſtand bey verſchiedenen Geſchwindigkeiten, verſchiedenen Anſtoßwinkeln, und verſchiedener Gröſſe der bewegten Fläche ſich in eben den Verhältniſſen ändert, wie es nach der gemeinen Regel ſeyn ſollte. Ich will mit H. Schober gleich den erſten Verſuch brauchen, die abſolute Gröſſe des Widerſtandes, welche die Regel giebt, zu prüfen. Hier iſt $aa = 6{,}72$ Quadratzoll $= 0{,}0672$ Qu. Fuß, und $v = \frac{25^2}{4 \cdot 15{,}1} = 10{,}4$ Fuß. H. Schober nimmt $G = \frac{1}{850}\gamma$, und γ (das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer) = 73 Pf. an, und findet G = 2,76 Loth, alſo $R = Gaav = 2{,}76 \cdot 0{,}0672 \cdot 10{,}4 = 1{,}92$ Loth. Nach dem Verſuch war $\frac{23}{400} P = 2{,}47 = R$, alſo giebt die Rechnung zu wenig, und wenn man $R = \zeta Gaav$ annimt, ſo

ſo wäre dieſem Verſuch gemäß $\zeta = \frac{247}{192} = 1,3$ beynahe.

Bey dieſer Rechnung aber iſt noch zu erinnern, daß die Flächen ſind im Kreiſe herum geführet worden, und daß eben um deswillen nicht alle ihre Puncte mit dem mittlern einerley Geſchwindigkeit gehabt haben: man muß alſo etwas anders rechnen, wenn man das R, was der Verſuch giebt, aus P finden will, und kan nicht ſchlechthin $R = \frac{23}{400}P$ annehmen. H. Schober erinnert dies ſelbſt, läſt ſich aber in keine ſchärfere Rechnungen ein, weil der Unterſcheid bey ſo kleinen Flächen, als von ihm ſind geprüft worden, wenig oder nichts zu bedeuten hat. Um indeſſen zu zeigen, wie man eigentlich rechnen muß, habe ich die folgende Aufgabe, die auch in andrer Abſicht ihren Nutzen hat, beyfügen wollen.

184 §.

Die Fläche *EHFI* iſt mit dem Hebelsarm *BC* verbunden, der ſich um *C* mit gegebener Winkelgeſchwindigkeit gleichförmig drehet, und zwar in der Ebene eines Kreiſes, worauf *EHFI* ſenkrecht iſt: man ſucht das Moment des Widerſtandes der Luft gegen dieſe Ebene. 65 Fig.

Aufl. Es ſey $CA = a$, $CB = b$, und $CG = \frac{1}{2}(a+b)$; ferner ſey MN und CP ſenkrecht, und man ſetze $CP = x$, $MN = y$, ſo iſt das Element $MNnm = ydx$. Wenn nun die wahre Geſchwindigkeit des Puncts $G = \surd h$ iſt, und die Geſchwindigkeit des Elements $MNnm = \surd v$, ſo hat man $\surd v = \frac{\surd h}{\frac{1}{2}(a+b)}x$. Nun leidet eben dies Element den

Widerſtand $G.ydx.\frac{h}{\frac{1}{4}(a+b)^2}xx$, und das Moment deſſelben iſt $=\frac{G.h}{\frac{1}{4}(a+b)^2}yx^3dx$; demnach wird die Summe dieſer Momente für die ganze Fläche $=\frac{G.h}{\frac{1}{4}(a+b)^2}\int yx^3dx+C$, und dies iſt das geſuchte Moment des Widerſtandes.

Die Fläche ſey ein Quadrat, deſſen Seitenlinie $=c$ iſt, ſo hat man $y=c$, und das geſuchte Moment $=\frac{Gch}{\frac{1}{4}(a+b)^2}.\frac{1}{4}x^4+C$, da dann C ſo genommen werden muß, daß dies Moment verſchwindet, wenn $x=b$ iſt. Demnach erhält man $C=-\frac{Gchb^4}{(a+b)^2}$. Nach der Integration wird $x=a$ geſetzt, und wenn ich das geſuchte Moment $=M$ annehme, ſo wird $M=\frac{Gch(a^4-b^4)}{(a+b)^2}$. Man nehme $CG=\frac{1}{2}(a+b)$ $=f$ an, und $a-b$ als die Seite des Quadrats $=c$, ſo hat man $(a^4-b^4)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=$ $2(a^2+b^2)cf$, und man erhält $M=\frac{Gcch(a^2+b^2)}{2f}$. Ferner iſt $a=f+\frac{1}{2}c$ und $b=f-\frac{1}{2}c$, dieſe Werthe geben $a^2+b^2=2(f^2+\frac{1}{4}cc)$, alſo wird $M=$ $\frac{Gcch(f^2+\frac{1}{4}cc)}{f}=Gcch\left(f+\frac{\frac{1}{4}cc}{f}\right)$. Wenn nun ein Gewicht $=P$ in der Entfernung α vom Bewegungspunct C angebracht, mit dem Wider-

derſtande im Gleichgewicht iſt; ſo hat man $P\alpha = Gcch\left(f + \frac{\frac{1}{4}cc}{f}\right)$: und wenn derjenige Widerſtand R heiſt, welchem die Fläche ausgeſetzt wäre, wenn ſie mit gradlinichter Bewegung nach einer auf ſie ſenkrechten Richtung fortgienge; ſo iſt $R = Gcch$, und es wird $R = \frac{\alpha}{f + \frac{1}{4}cc:f} . P.$

Macht man hievon die Anwendung auf den erſten Verſuch im 182 §. ſo hat man $\alpha = 0{,}23$ Fuß, $f = 4$ Fuß, $cc = 0{,}0672$, alſo $\frac{1}{4}cc:f = 0{,}0042$, und $\frac{\alpha}{f + \frac{1}{4}cc:f} = \frac{0{,}23}{4{,}0042} = \frac{2300}{40042}$ noch ſehr nahe $= \frac{23}{400}$, daß alſo der Werth von R, welchen Hr. Schober gefunden hat, beybehalten werden kan.

185 §.

Man nehme nun $R = \zeta Gcch$ an, ſetze für cc und h nach einander die Werthe, die ſie bey den acht Schoberſchen Verſuchen nach und nach gehabt haben, und vergleiche alsdenn die Werthe von $Gcch$ mit den Werthen von R, ſo wie ſie jeder Verſuch unmittelbar giebt; ſo findet man $\zeta = \frac{R}{Gcch}$, vorausgeſetzt, daß ζ als eine beſtändige Zahl gelten könne. Die Vergleichung giebt folgendes:

Versuche	Werthe von R	Werthe von $Gcch$	Werthe von ζ
1	2,47	1,92	1,28
2	5,09	3,84	1,32
3	11,10	7,68	1,45
4	23,92	15,36	1,56
5	54,51	30,72	1,77
6	14,63	7,68	1,97
7	1,56	0,96	1,62
8	19,09	15,36	1,24

Man bringe alle Werthe von ζ in eine Summe, und dividire durch die Zahl der Beobachtungen, ſo hat man einen mittlern Werth für $\zeta = 1,53$, oder $\zeta = \frac{3}{2}$. Es ſcheint zwar aus den erſten fünf Beobachtungen, bey welchen die Geſchwindigkeit einerley geweſen iſt, zu folgen, daß der Widerſtand in einem gröſſern Verhältniß wachſe, als die Fläche, welche den Widerſtand leidet, welches auch Hr. Schober daraus ſchlieſt: allein beynahe hat es das Anſehen, daß noch eine andre unbekannte Urſache bey den erſten 6 Verſuchen gemacht habe, daß P nach und nach immer etwas zu groß gefunden iſt. Bey dem ſechſten Verſuch findet ſich ζ wiederum gröſſer, als beym fünften Verſuch, obgleich die Fläche einerley war. Die Geſchwindigkeit war im ſechſten Verſuch halb ſo groß, als im fünften, alſo hätte P viermahl kleiner ſeyn ſollen: allein P beträgt im ſechſten Verſuch etwas mehr als den vierten Theil deſſen, was es im fünften Verſuch betragen hatte, da doch nach andern Erfahrungen ehe das Gegentheil wäre zu erwarten geweſen. Doch getraue ich mir nicht etwas gewiſſes darüber zu entſcheiden, denn der ſiebente, zweyte, und

und achte Verſuch ſind mit einerley Fläche gemacht, und die Geſchwindigkeiten waren wie 1, 2, 4, alſo hätten die Werthe von P wie 1, 4, 16 ſeyn ſollen: ſie waren aber $27\frac{1}{2}$ Loth, $88\frac{1}{2}$ Loth, $337\frac{1}{4}$ Loth, alſo wie 1; 3,22; 12,26; woraus allerdings zu folgen ſcheint, daß der Widerſtand nicht völlig wie das Quadrat der Geſchwindigkeit wachſe. Wenn man aber dagegen bedenkt, daß nach Robins Verſuchen, der Widerſtand in einem weit gröſſern Verhältniß als das Quadrat der Geſchwindigkeit wachſen ſoll; (M. ſ. Robins Artillerie mit Hr. Eulers Erläuterungen 2 Cap. 2 und 3 Satz 488 u. f. S.) ſo muß man wohl billig alles unentſchieden laſſen. Bey langſamen Bewegungen hat man ſonſt ſchon angemerkt, daß der Widerſtand nicht völlig in dem Verhältniß des Quadrats der Geſchwindigkeit abnehme, und hat dieſen Umſtand der Zähigkeit der flüßigen Maſſen zuſchreiben wollen. Man hat geglaubt, der Widerſtand verhalte ſich wie v in vollkommen flüßigen Maſſen, und wie $v+C$ in ſolchen flüßigen Maſſen, deren Theilchen mehr oder weniger zuſammen hängen, da dann die beſtändige Gröſſe C von der Beſchaffenheit einer jeden beſondern Art der flüßigen Maſſen abhängen würde. Umſtändlichere Unterſuchungen ſowohl über dieſe als andere Hypotheſen, den Widerſtand in Rechnung zu bringen findet man beym Newton im II Buch der Principiorum Phil. Nat. Mathm. und beſonders auch in dem Commentario der Herren le Seur und Jacquier über das 2 Buch.

186 §.

Die zweyte Claſſe der Schoberſchen Verſuche betrift den Widerſtand unter verſchiedenen Anſtoßwin-

keln, und es ſcheint, als wenn durch dieſe Verſuche die Regel ganz umgeſtoſſen werde, daß der Widerſtand dem Quadrat vom Sinus der Anſtoßwinkel proportional ſey. Vorläufig muß ich bemerken, daß die Werthe von P, welche die Schoberſchen Verſuche gegeben haben, den Cubiczahlen der Sinus der Anſtoßwinkel proportional ſeyn müſten, wenn die gemeine Theorie vollkommen richtig wäre. Im 180 §. war nemlich der Stoß nach der Richtung $GL = \zeta G a^2 v \sin\vartheta^2$, (61 Fig.) und der Anſtoßwinkel $EGV = \vartheta$. Nun ſey GN auf GV ſenkrecht, und man zerlege die Kraft GL nach GM und GN, ſo wird $GM = GL \sin\vartheta = \zeta G a^2 v \sin\vartheta^3$, und $GN = GL \cos\vartheta = \zeta G a^2 v \sin\vartheta^2 \cos\vartheta$. Bey den Schoberſchen Verſuchen gieng der Stab, woran die Fläche befeſtiget war, durch G, und der Druck GN ward von dem Stabe aufgehalten. Der Druck nach GM aber, der Richtung der Bewegung grade entgegen, war es, der ſich mit der Elaſticität der Stahlfedern ins Gleichgewicht ſetzte; eben dieſer Druck müſte alſo dem Gewicht P proportional ſeyn. Hiemit ſtimmen aber die Reſultate der Verſuche ganz und gar nicht überein: die Cubiczahlen der Sinus der Anſtoßwinkel nehmen viel ſchneller ab, als bey den Verſuchen das Gewicht P abgenommen hat, welches die Feder eben ſo ſtark ſpannte, als der Widerſtand der Luft ſie geſpannt hatte, wie folgende Vergleichungstafel zeiget.

Winkel in Graden	Sinus	Cubiczahlen der Sinus	die Werthe von P	Verhältniß der Werthe P
90	1,0000	1,0000	193 Loth	1,0000
80	0,9848	0,9549	189 =	0,9793
70	0,9397	0,8296	178 =	0,9223
60	0,8660	0,6493	154 =	0,7979
50	0,7660	0,4493	123 =	0,6399
40	0,6428	0,2655	94 =	0,4870
30	0,5000	0,2050	65 =	0,3368
20	0,3420	0,0399	42 =	0,2176
10	0,1736	0,0052	$19\frac{1}{2}$ =	0,1010

Ich muß dieſe Verſuche ſchlechthin an ihren Ort geſtellet ſeyn laſſen. Die gemeine Theorie mag immerhin fehlerhaft ſeyn, ſo ſehe ich doch nicht, was den Widerſtand bey kleinen Anſtoßwinkeln ſo ſehr kan vermehrt haben, als vermöge dieſer Verſuche geſchehen ſeyn müſte. Hr. Hennert wird durch dieſe Verſuche bewogen, anzunehmen, daß der Widerſtand nicht dem $\sin\vartheta^2$, ſondern dem $\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ proportional ſey, wenn ϑ der Anſtoßwinkel iſt. M. ſ. deſſen Tweede Verhandeling wegens de Kracht der Vloeiſtoffen, en inzonderheid de Wederſtand van de Lugt, im X Theil II Stück der Verhandelingen uitgegeewen door de Hollandſche Maatſchappye der Weetenſchapen te Haarlem 45 u. f. S. Ich ſehe aber nicht, daß Hr. Hennert ſich beſtimmt darüber erklärt hat, ob nach ſeiner Meynung der Widerſtand nach der ſenkrechten Richtung GL ſich wie $\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ verhalten ſoll, oder derjenige, welcher nach der Richtung GM der Bewegung grade entgegen geſetzt iſt. Aus der Art, wie er im IX-XI. §. 57-60 S. die Vergleichung anſtellt, muß man ſchlieſſen,

daß

daß das letzte ſeine Meynung ſey; allein in der Folge nimmt er den Widerſtand nach der ſenkrechten Richtung GL dem $\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ proportional an. Es hat faſt das Anſehen, als wenn Hr. Hennert den Umſtand überſehen hat, daß bey den Schoberſchen Verſuchen die Werthe von P ſich wie $\sin^3$ verhalten müſten, wenn die gewöhnliche Regel richtig wäre.

187 §.

Nun iſt noch die dritte Claſſe der Schoberſchen Verſuche übrig: dieſe ſind mit krummen und gebrochenen Flächen angeſtellet, und ich werde zuerſt den Verſuch mit der Pyramide prüfen. Dies war eine gleichſeitige Pyramide, und wenn man die Auflöſung der Aufgabe des 307 §. Mech. hier anwendet, ſo läſt ſich leicht finden, wie groß der Widerſtand ſey, den eine ſolche Pyramide leidet, wenn ſie nach der Richtung ihrer Axe mit der Spitze vorwärts gegen die Luft bewegt wird. Setzt man den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $=\alpha$, ſo iſt der Anſtoßwinkel $\vartheta = 90° - \alpha$. Wenn ferner der Inhalt einer jeden Seitenfläche $= k^2$, ihre Anzahl $= n$, und v die Höhe iſt, welche der Geſchwindigkeit zugehört; ſo leidet die Pyramide einen Widerſtand $= nGk^2 v \sin\vartheta^3$. Die Schoberſche Pyramide war vierſeitig, ihre Grundfläche ein Quadrat, und ihre Höhe ſo groß, als die Seitenlinie der Grundfläche. Setzt man demnach dieſe Seitenlinie $= c$, ſo findet man die Höhe der dreyſeitigen Seitenflächen $= \sqrt{\frac{5}{4}c^2}$, alſo den Inhalt jeder Seitenfläche $= \frac{1}{2}c\sqrt{\frac{5}{4}c^2}$ $= \frac{1}{4}c^2\sqrt{5} = k^2$, und $\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{\frac{5}{4}c^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

folg-

folglich $\cos\alpha = \sin\vartheta = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}4472$, und $\sin\vartheta^3 = 0{,}0895$. Die Grundfläche war 0,5376 Quadratfuß groß, daraus findet man $k^2 = 0{,}3006$ Qu. F., und weil $n = 4$, $v = 10{,}4$ iſt, ſo wird der Widerſtand $= 4 \cdot 2{,}76 \cdot 0{,}3006 \cdot 10{,}4 \cdot 0{,}0895 = 3{,}17$ Loth, oder wenn man vermöge der vorigen Verſuche mit $\zeta = \frac{3}{2}$ multipliciren will, $= 4{,}755$ Loth. Dagegen gab der Verſuch 12,71 Loth und das iſt eine ganz unerwartete Abweichung von der Theorie.

Hr. Hennert prüft dieſen Verſuch ebenfals, und nimmt a. a. O. 85. 86 S. den Widerſtand gegen die Seitenflächen nach der Richtung dem $\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ proportional an. Dieſe Vorausſetzung zum Grunde geſetzt, würde man dem 307 §. Mech. gemäß den Widerſtand $= nGk^2v\sin\vartheta^{\frac{5}{2}}$ finden. Hier iſt nun $\sin\vartheta^{\frac{5}{2}} = 0{,}17$; alſo giebt dieſe Hennertſche Vorausſetzung den Widerſtand $= \frac{1700}{895} \cdot 4{,}755 = 9{,}06$ Loth. Dies kommt nun freylich dem Verſuch viel näher, als vorhin, da $\sin\vartheta^2$ ſtatt $\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ gebraucht ward, indeſſen beträgt doch dieſe Zahl noch nicht $\frac{3}{4}$ deſſen, was der Verſuch gegeben hat. Vermöge der am Ende des vor. §. beygefügten Anmerkung ſcheint es, daß Hr. Hennert den Widerſtand hätte $= nGk^2v\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ annehmen müſſen, um ſeine Hypotheſe den Schoberſchen Verſuchen gemäß einzurichten. Ich geſtehe aber gern, daß mir gegen dieſe Verſuche noch zu viele Zweifel übrig bleiben, als daß ſie mich überzeugen könnten, die gewöhnliche Regel ſey ſo ſehr fehlerhaft.

Uebrigens will ich nur noch kurz bemerken, daß auch hier eigentlich nicht $R = \frac{23}{400}P$ genommen werden müſte, weil das Moment des Widerſtandes bey der Umdrehungsbewegung würklich gröſſer iſt, als es ſeyn würde, wenn blos der Schwerpunct der Grundfläche denſelben Widerſtand litte, den die Pyramide leiden würde, wenn ſie nach der Richtung ihrer Axe in grader Linie fortgienge. Man weiß aus dem 184 §. ſchon, was dies bey ebenen Flächen zu ſagen hat, und es hat hier noch mehr zu ſagen. In der That iſt der Anſtoßwinkel auf der Pyramidenfläche bey der Umdrehungsbewegung nicht in allen Puncten einerley, ſo wie er es iſt, wenn die Pyramide in grader Linie nach der Richtung ihrer Axe fort gehet, und eine genaue Rechnung würde erfordern, daß man wüſte, auf welche Art beym Verſuch der Stab an der Grundfläche der Pyramide befeſtiget worden: ob er nemlich mit den Seitenlinien der Grundfläche parallel, oder mit ihrer Diagonallinie in grader Linie befeſtiget geweſen. Es mag nun das eine oder das andre ſeyn, ſo iſt doch ſoviel gewiß, daß dieſer Umſtand das Moment des Widerſtandes keinesweges ſo ſehr ſtark habe ändern können, daß die Rechnung um deswillen ſo ausnehmend von dem Verſuch abweichen ſollte.

188 §.

Wenn ein grader Kegel nach der Richtung ſeiner Axe mit der Spitze vorwärts ſenkrecht gegen die Luft bewegt wird; ſo iſt der Anſtoßwinkel ϑ einerley mit dem Winkel, unter welchem die Seitenlinie des Kegels ſeine Axe ſchneidet. Es ſey der Kegel mit einer Ebene der Grundfläche parallel geſchnitten,

der Halbmeſſer der Durchſchnittsfigur ſey $= y$, und die Seitenlinie des abgeſchnittenen Kegels $= s$, ſo iſt $\sin\vartheta = \frac{y}{s}$. Der Widerſtand, welchen der Kegel leidet ſey $= R$, ſo iſt $R = 2\pi G v \sin\vartheta^3 \int y ds$ (308 §. Mech.). Weil nun $ds = \frac{dy}{\sin\vartheta}$ iſt, ſo wird $R = 2\pi G v \sin\vartheta^2 \int y dy = \pi G v y^2 \sin\vartheta^2$; und wenn der Halbmeſſer der Grundfläche $= r$ iſt, ſo muß man $y = r$ ſetzen um den Widerſtand für den ganzen Kegel zu haben.

Beym Verſuch, welchen H. Schober mit der Kegelfläche anſtellte (182 §.), war nun $\pi rr = 0{,}03$ Quadr. Fuß, und $v = \frac{50^2}{4 \cdot 15{,}1} = 41{,}4$ Fuß, alſo wird $\pi rr G v = 0{,}03 \cdot 41{,}4 \cdot 2{,}76 = 3{,}428$ Loth, und dies wäre der Widerſtand gegen die Grundfläche bey eben der Geſchwindigkeit, wofür der Verſuch 4,45 Loth gegeben hat. Für den Kegel war ferner $\tan\vartheta = \frac{1}{2}$, alſo $\cot\vartheta = 2$, $\operatorname{cosec}\vartheta = \sqrt{5} = 2{,}23607$, $\sin\vartheta = \frac{1}{2{,}23607} = 0{,}4472$, und $\sin\vartheta^2 = 0{,}1999$ beynahe $= 0{,}2$. Dies in 3,428 multiplicirt, giebt den Widerſtand gegen den Kegel $= 0{,}6856$ Loth, oder wenn man mit $\zeta = \frac{3}{2}$ multipliciren will, $= 1{,}028$ Loth, welches doch nur ohngefehr die Hälfte deſſen iſt, was der Verſuch gelehrt hat. Nach H. Hennert (a. a. O. 79. 80 S.) ſoll $R = 2\zeta\pi G v \sin\vartheta^{\frac{5}{2}} \int y ds = 2\zeta\pi G v \sin\vartheta^{\frac{3}{2}} \int y dy$ angenommen werden; alſo für den ganzen Kegel $R = \zeta\pi G v rr \sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ ſeyn. Es wird aber

aber $\sin\vartheta^{\frac{3}{2}}$ beynahe $= 0{,}3$, alſo würde man $R = \frac{3}{2} \cdot 3{,}428 \cdot 0{,}3 = 1{,}543$ Loth finden, da es doch nach dem Verſuch 2,04 Loth ſeyn ſollten. Vermöge der im vor. §. ſchon beygebrachten Erinnerung hätte H. Hennert $R = 2\zeta\pi G v \sin\vartheta^{\frac{3}{2}} \int y ds = 2\zeta\pi G v \sin\vartheta^{\frac{1}{2}} \int y dy$ ſeinen Schlüſſen gemäß annehmen müſſen.

Was nun das eigentliche Moment des Widerſtandes gegen den Kegel betrift, ſo finden zwar die im vor. §. bey der Pyramide erwehnten Erinnerungen ebenfals ihre Anwendung; wegen der nur kleinen Grundfläche und Höhe des Kegels aber kan hier der Unterſcheid zwiſchen dem wahren Moment des Widerſtandes bey der Umlaufsbewegung des Kegels, und dem vom H. Schober berechneten, nur ſehr wenig auf ſich haben: er wird hier lange ſo weit nicht gehen, als bey der Pyramide, die eine viel gröſſere Grundfläche und Höhe hatte, wobey jedoch die Länge des Stabes vom Bewegungspunct bis zum Mittelpunct der Grundfläche einerley war.

Wenn es beym Widerſtande blos auf die Trägheit der im Wege liegenden Theilchen der flüßigen Maſſe ankäme, und die Theilchen, welche ſchon dem Stoß ausgeſetzt geweſen ſind, den Widerſtand weiter nicht vermehrten; ſo müſte der hohle Kegel eben ſo viel Widerſtand leiden, als der erhabene. Man ſiehet aber leicht, daß ſich die Sache anders verhalten wird, weil ſich die Luft, wie man wohl zu ſagen pflegte, in der Höhlung fängt. Es iſt mit jeder andern flüßigen Maſſe eben ſo. Der ganze innere Raum des Kegels wird damit ausgefüllt, und es iſt alsdenn eben ſo viel, als wenn ein ſolider Kegel mit der Grundfläche vorwärts ſenkrecht gegen die Luft

bewegt würde. Deswegen muß der Widerſtand ſo groß ausfallen als gegen einen Kreis ſo groß wie die Grundfläche, welches auch mit dem Verſuch ſehr wohl übereinkommt.

Gegen die Kugel ſollte nun der Widerſtand halb ſo groß geweſen ſeyn, als gegen ihren gröſten Kreis (309 §. Mechan.), und dies iſt faſt der einzige Punct, in Anſehung deſſen die Schoberſchen Verſuche die gemeine Theorie vom Widerſtande zu beſtätigen ſcheinen. Der Widerſtand war gegen den gröſten Kreis $=4,45$ Loth, und gegen die Halbkugel $=2,44$ Loth. Die letzte Zahl übertrift die Hälfte der erſten ſo wenig, daß der Fehler gar wohl einer kleinen Unrichtigkeit der Verſuche ſelbſt zugeſchrieben werden könnte: und ſo müſte denn doch auch die Regel noch nicht ſo ſchlechterdings verworfen werden, daß der Widerſtand dem $\sin\vartheta^2$ proportional ſey. Ich habe dieſe bisher angeſtellte Vergleichung der Schoberſchen Verſuche mit der gewöhnlichen Theorie nicht weglaſſen wollen, um dasjenige, was derſelben entgegen zu ſeyn ſcheinet, nicht zu verſchweigen: allein bey dem allen ſind mir dieſe Verſuche nicht einleuchtend genug, daß ſie mich von der Nothwendigkeit überzeugen könnten, die gewöhnliche Theorie zu verlaſſen. Hr. Schober hat andre Verſuche mit Windflügel im Groſſen angeſtellt, welche die gewöhnliche Theorie eben ſo ſehr beſtätigen, als ihr die bisher erzehlten Verſuche zu widerſprechen ſcheinen, wie ich im folgenden Abſchnitt zeigen werde.

189 §.

Die Ebene *DC* geht mit paralleler Bewegung nach der Richtung *GM* fort, die mit der 62 Fig.

Ebene ſelbſt den Winkel $CGM = \eta$ einſchlieſt; gegen dieſe Ebene ſtößt der Wind nach der Richtung AGV, und der Anſtoßwinkel iſt $CGV = \vartheta$: man ſucht den Druck, welchem die Ebene CD wegen des Windſtoſſes ausgeſezt iſt, wenn beyde Geſchwindigkeiten der Ebene ſowohl, als auch des Windes gleichfalls bekannt ſind.

Aufl. Es ſey die Geſchwindigkeit des Windes $GV = C$, und die Geſchwindigkeit der Ebene $GM = c$; beyde Geſchwindigkeiten zerlege man in zwo andre auf CD ſenkrecht und damit parallel, ſo ſind die ſenkrechten Geſchwindigkeiten, des Windes $GL = C\sin\vartheta$, und der Ebene $GK = c\sin\eta$. Nun iſt es eben ſo viel, als wenn der Wind mit der Geſchwindigkeit $C\sin\vartheta - c\sin\eta$ gegen die ruhende Ebene ſenkrecht anſtieſſe, und die Ebene leidet den ſenkrechten Druck $P = \frac{\zeta G aa}{4g}(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2$, wenn aa ihren Flächen-Inhalt bedeutet. (Man vergleiche den 108 §. Hydraul.).

Dieſer Ausdruck iſt allgemein, was auch ſonſt die Richtungen GV und GM für eine Lage gegen die Ebene CD haben. Die Figur ſtellt den beſondern Fall vor, wenn die Neigungswinkel η und ϑ in einer Ebene liegen, die alsdenn mit MGV einerley iſt, da dann eben dieſe Ebene auf derjenigen ſenkrecht iſt, die den Stoß empfängt. Die Zeichnung ſtellt nur die Durchſchnittslinie CD dieſer beyden Ebenen vor, und die Ebene des Papiers iſt mit der Ebene MGV einerley. Für dieſen beſondern Fall kan man ſich die Sache auch ſo vorſtellen. Man nehme $Gl =$

Cſinϑ

$C\sin\vartheta - c\sin\eta$, und $Ge = C\cos\vartheta - c\cos\eta$, und verzeichne das Rechteck $Gevl$; ſo wird deſſen Diagonale $Gv = \sqrt{((C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2 + (C\cos\vartheta - c\cos\eta)^2)}$ $= \sqrt{(C^2 - 2Cc.\cos(\eta - \vartheta) + c^2)}$, weil $\cos\eta\cos\vartheta + \sin\eta\sin\vartheta = \cos(\eta - \vartheta)$ iſt (423 §. Geom.). Eben dieſe Diagonale iſt gegen die Ebene CD unter dem Winkel CGv geneigt, und es iſt $\sin CGv =$

$$\frac{C\sin\vartheta - c\sin\eta}{\sqrt{(C^2 - 2Cc.\cos(\eta - \vartheta) + c^2)}}.$$

In dieſen Ausdrücken iſt nun $\eta - \vartheta = VGM$ der Winkel, unter welchem beyde Richtungen des Windes und der Ebene einander ſchneiden; wenn man denſelben $= \alpha$ ſetzt, ſo hat man $\eta - \vartheta = \alpha$, und $\eta = \alpha + \vartheta$, folglich

$$\sin CGv = \frac{C\sin\vartheta - c.\sin(\vartheta + \alpha)}{\sqrt{(C^2 - 2Cc.\cos\alpha + c^2)}}.$$

Die Stärke des Windſtoſſes gegen die bewegliche Ebene iſt demnach eben ſo groß, als wenn die Ebene in Ruhe wäre, und der Wind mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{(C^2 - 2Cc.\cos\alpha + c^2)}$ unter einem Winkel anſtieſſe, deſſen Sinus

$$= \frac{C.\sin\vartheta - c\sin(\vartheta + \alpha)}{\sqrt{(C^2 - 2Cc.\cos\alpha + c^2)}}.$$

Der Druck ſelbſt, dem die Ebene ausgeſetzt iſt, wird alſo $=$

$$\frac{\zeta Gaa}{4g}(C\sin\vartheta - c\sin(\vartheta + \alpha))^2.$$

Will man die Höhen in der Rechnung gebrauchen, welche den Geſchwindigkeiten C und c zugehören; ſo ſetze man $C^2 = 4gV$, und $c^2 = 4gu$, und es wird die relative Geſchwindigkeit des Windes $= \sqrt{(V - 2\cos\alpha\sqrt{V.u} + u}$, ſo wie die relative Rich-

tung des Windes gegen die Ebene CD unter einem Winkel geneigt iſt, deſſen Sinus

$$= \frac{ſin\vartheta\sqrt{V} - ſin(\vartheta+\alpha)\sqrt{u}}{\sqrt{(V - 2coſ\alpha\sqrt{Vu} + u)}}.$$

Der X. Abſchnitt.

Theorie der Windflügel bey Mühlen und andern Maſchinen.

190 §.

Soll durch den Stoß einer flüßigen Maſſe ein Rad mit ſeiner Welle umgetrieben werden, ſo muß man die Einrichtung ſo machen, daß der Stoß beſtändig eine hinlänglich groſſe Fläche trift. Dies war die Maxime, worauf der Bau der unterſchlächtigen Waſſerräder beruhete (110 u. f. §. Hydraul.), und es war nicht ſchwer, darauf zu verfallen, daß man die Schaufeln am Umfang des Rades auf die allgemein bekannte Art ſo einſetzen müſſe, daß ſie das unter dem Rade weglaufende Waſſer beſtändig vor ſich her treiben könne. Ein Windrad ließ ſich aber nicht auf eine völlig ähnliche Art, wie ein unterſchlächtiges Waſſerrad dem Winde ſo entgegen ſtellen, daß die Richtung des Windes mit der Ebene des Rades parallel ſeyn könnte. Weil der Wind allemahl das ganze Rad faſſet, ſo würde ein Theil der Schaufeln der Richtung des Windes entgegen laufen, alſo der Wind dem Rade zweyerley entgegen geſetzte Umlaufs-Bewegungen mitzutheilen ſtreben:

ben: es wäre denn, daß man durch Einſchlieſſung des Rades in ein umher aufgeführtes Gebäude und eine beſonders dazu dienliche Anordnung den Wind auf einen Theil des Rades allein leiten wollte. Dieſerwegen müſte man den Windrädern, welche dem Winde ganz blos geſtellet ſeyn ſollten, eine ähnliche Einrichtung geben, wie den horizontalen Waſſerrädern, auf welche das Waſſer vertical herab fällt (152 §. Hydraul.). Wenn ein ſolches Rad vertical ſtünde, und der Wind in horizontaler Richtung gegen die Ebene des Rades ſenkrecht anſtieſſe, ſo würde er die gegen die Ebene des Rades ſchief eingeſetzten Schaufeln nicht blos nach ſeiner eigenen mit der Axe des Rades parallelen Richtung vorwärts, ſondern zugleich ſeitwärts drücken: folglich das Rad, wofern nur der Widerſtand nicht zu groß wäre, zum Umlauf bringen.

191 §.

Die Schaufeln des Windrades muſten aber wegen der ſehr geringen Dichtigkeit der Luft, und der gewöhnlich nur mäßigen Geſchwindigkeit des Windes, viel gröſſer ſeyn, als die Schaufeln des Waſſerrades, wenn ein beträchtlich groſſer Widerſtand überwunden werden ſollte: doch hatte man dagegen den Vortheil, daß alle Schaufeln zugleich ununterbrochen vom Winde getroffen wurden. Dieſe Gründe rechtfertigen die jetzt allgemein gebräuchliche Anordnung des verticalen Windrades: bey demſelben dienen die ſo genannten **Wind-Flügel** ſtatt der Schaufeln des Waſſer-Rades, und ſie ſind ebene, oder auch wegen einer unten anzuführenden Urſache etwas gekrümmte, ziemlich groſſe, gewöhnlich vier-

eckte Tafeln, welche um die Hauptwelle einer Maſchine ſo herum geſetzt werden, daß die Axe der Hauptwelle gegen die Ebene dieſer Tafeln unter einem ſchiefen Winkel geneigt iſt. Ihre Länge übertrift gewöhnlich die Breite um ein anſehnliches, und vier ſolche Flügel, wovon die Mittel-Linien gegen die Axe der Welle zu unter rechten Winkeln zuſammen laufen, thun ganz gute Dienſte. Der Kopf AB
63 Fig. der Hauptwelle AC bleibt viereckt, und es werden ein paar lange hölzerne Bäume DE, FG, welche die **Windruthen** heiſſen, ſo durch den Kopf AB hindurch geſteckt, daß beyde ſowohl gegen einander, als auch gegen die Welle AC eine ſenkrechte Lage bekommen. Dieſe Ruthen werden in Entfernungen von etwa 1 bis 2 Ellen bey V, X, Y, Z, u. ſ. f. mit Löchern durchbohrt, und hölzerne Sproſſen MO, HI, KL, u. ſ. f. ſo lang als der Flügel breit ſeyn ſoll, hindurch geſteckt, die zu beyden Seiten durch die Leiſten oder Rahmen MN, OP, wegen mehrerer Feſtigkeit verbunden werden. Hiernächſt werden die Sproſſen entweder mit Schilf ausgeflochten, oder mit dünnen Brettern, den hier ſo genannten **Thüren**, gedeckt, die man auch bey Stürmen wegnehmen kan, damit der Wind durch die Flügel alsdenn hindurch ſtreichen könne, und der Maſchine keinen Schaden zufüge. Wenn die Sproſſen alle in einerley Ebene liegen, ſo bekommt der Windflügel auf ſolche Art die Natur einer feſten Ebene, gegen welche die Umlaufs-Axe unter einem gewiſſen Winkel geneigt iſt. Man ſpannt auch Seegeltuch über die Sproſſen aus, welches vornemlich in Holland üblich iſt. Bey der ſchrägen Stellung der Flügel gegen die Umlaufsaxe muß, wie ſich von ſelbſt verſtehet, darauf Rückſicht

genom-

genommen werden, daß der Wind ſie alle vier auf einerley Art herum treiben könne, und deswegen können zwey Flügel an einerley Ruthe nicht in einerley Ebene liegen, ſondern ſie müſſen ſich unter einem Winkel ſchneiden, der doppelt ſo groß iſt, als der Neigungswinkel der Umlaufs-Axe gegen die Flügel. Man hat ſeit einiger Zeit angefangen, es für beſſer zu halten, wenn die Sproſſen nicht in einer Ebene liegen, ſondern mit der Richtung des Windes gegen die äuſſern Enden der Flügel zu immer gröſſere Winkel machen: alsdenn wird die dem Winde ausgeſetzte Fläche des Flügels eine krumme Fläche, wovon unten beſonders gehandelt werden ſoll.

192 §.

Wenn an der horizontal liegenden Welle der Windflügel ein Kammrad befindlich iſt, das in einen Trilling greift, deſſen Axe vertical ſteht; ſo kan die Welle dieſes Trillings wie ſonſt bey Kornmühlen das Mühleiſen eingerichtet ſeyn, und einen unterhalb des Trillings gehörig daran befeſtigten Mühlſtein umtreiben. Das übrige läſt ſich alsdenn alles wie bey Waſſermühlen einrichten, und der einzige Unterſcheid beſteht darin, daß hier das Mahlgerüſte mit den Mühlſteinen unterhalb der Welle der Windflügel angebracht wird, weil die Welle verſchiedener leicht einzuſehender Gründe halber ziemlich hoch liegen muß. Man ſiehet leicht, daß auf eine ähnliche Art auch andre Arten von Mühlen durch Windflügel ihren Umtrieb erhalten können. Sollen die Windflügel eine Waſſerkunſt treiben, ſo läſt ſich leicht die gehörige Veränderung der Anordnung treffen, wenn die Art der Künſte gewählt iſt, welche

man brauchen will. Statt des Kammrades kan der Bock zu einer Kaſtenkünſt, oder zu einem Roſenkranz angebracht werden, wovon man in Belidors Waſſerbaukunſt im III Buch. II Cap. 861 u. f. §. Beyſpiele findet. Bey Pumpenkünſten hat man die Windflügel ſchon auf mehr als eine Art ſehr vortheilhaft angebracht. Durch die hölzerne Welle der Flügel wird eine eiſerne Stange geſteckt, und letztere wird alsdenn ſo gebogen, daß ſie die Geſtalt einer Kurbel oder eines Krumzapfens bekommt: an dieſe Kurbel hängt man ein Kunſtgeſtänge, das mehr oder wenigere Pumpen treibt nach Beſchaffenheit der Gröſſe der Flügel. Dieſe Einrichtung dient, wenn das Geſtänge vertical ſchieben ſoll. In Fällen, wo man eine horizontale Bewegung des Geſtänges haben will, kan das Kammrad bleiben, welches in einen Trilling mit der vertical ſtehenden Welle greift. Am unterſten Ende dieſer verticalen Welle bringt man nun einen Krumzapfen an, der horizontal umläuft, und das Geſtänge ſchiebt. Nahe bey dem Königlichen Schloſſe Meudon, nicht weit von Paris ſind zwey dergleichen Pumpenkünſte erbauet, welche von Windflügeln getrieben werden, und Hr. Weidler hat in dem Tractatu de Machinis Hydraulicis Marlyenſi & Londinenſi etc. Cap. III. eine umſtändliche Beſchreibung davon mitgetheilt. Belidor beſchreibt eine kleine Pumpe mit Windflügeln a. a. O. 860 §. M. ſ. auch Leupolds Theatrum Mach. Hydraul. T. II. 124 §. 59. S.

Bey allen Maſchinen dieſer Art ſind noch zwey Puncte zu erwegen, worauf bey der ganzen Anordnung Rückſicht genommen werden muß. Der Wind muß mit der Axe der Flügel parallel gegen die Flü-

gel ſtoſſen, und deswegen muß dieſe Axe auf einem beweglichen Lager liegen, damit man ſie ſo wenden könne, wie es die jedesmahlige Richtung des Windes erfordert. Ferner muß man den Umlauf der Flügel hemmen können, wenn die Maſchine zum Stillſtand gebracht werden ſoll. Die gemeinen deutſchen Windmühlen, welche zum Mehl- Grütz- und Graupen-Mahlen gebraucht werden, und **Bockmühlen** heiſſen, ſind ſo gebauet, daß man das ganze Mahlgerüſte mit dem Gehäuſe und allem Zubehör vermittelſt eines auswärts angebrachten langen Baums, der zugleich zur Treppe dient, und der Sterz heiſt, um eine Spindel drehen kan, die in der Mitte des Stuhls, worauf das ganze Gebäude ruhet, in verticaler Stellung befeſtiget iſt. Bey den Holländiſchen Windmühlen iſt allein das Dach, worin die Welle liegt, die ſo genannte Haube beweglich. Auf dem feſtſtehenden Mühlgebäude befindet ſich ein Stuhl, welcher das Dach trägt, und auf dem Gebäude ſelbſt iſt eine vertical ſtehende Spindel befeſtiget, um welche ſich das Dach mit dem Stuhl, woran der Sterz befeſtiget iſt, drehen läſt. Statt dieſer Art findet man bey gröſſern Maſchinen auch folgende Einrichtung. Das Dach iſt auf einem ſtarken kreisrunden Rahmen befeſtiget, der an ſeinem innern Umfang mit Kämmen verſehen iſt, worin ein Trilling greift, deſſen Welle entweder nach Art eines Haſpels mit Speichen verſehen iſt, womit man alles drehen kan, oder mit einem Sternrade, worin von neuen ein Getriebe mit einer Kurbel greift. Unter dem mit Kämmen verſehenen Ringe iſt ein andrer Ring befeſtiget, und mit einer hinlänglichen Anzahl kleiner meßingener Walzen oder Rollen ver-

ſehen, weswegen er der **Rollring** heiſt. Dieſer Rollring mit dem ganzen Dach ruhet auf einem dritten Ringe, auf welchem die kleinen Walzen in einer Vertiefung laufen, wenn alles vermittelſt der vorerwehnten Haſpel oder Kurbel in Bewegung gebracht wird. Die deutſchen Windmühlen beſchreibt **Beyer** im Schauplatz der Mühlenbaukunſt XI Cap. 73 S. und **Leupold** in Theatro Machin. Gen. 300 §. 99 u. f. S. beyde Arten, die Deutſchen und Holländiſchen. Letztere kan man auch aus Pet. **Limperghs** und **Joh. van Zyl** Mühlenbüchern kennen lernen, wovon die Titel ſchon im 566 §. der Hydraulik angeführt ſind.

Der Umlauf der Windflügel, wenn die Maſchine ſtille ſtehen ſoll, wird vermittelſt der ſo genannten **Premſe** gehemmet. Dies iſt ein groſſer hölzerner Cirkelbogen, der das Kammrad an der Welle der Windflügel bis auf die Hälfte umſchließt, und oben auf dem äuſſern Umfang folgendermaſſen aufgelegt wird. An dem einen Ende iſt dieſer hölzerne Halbkreis um einen Polzen oder Zapfen beweglich, und an dem andern Ende hängt ein ſchweres Gewicht, etwa ein Kaſten mit Steinen, oder ſonſt etwas dergleichen. Ferner iſt neben der Premſe ein Hebel angebracht, an deſſen kurzen Arm das mit dem Gewicht beſchwerte Ende der Premſe hängt: am langen Arm aber hängt ein Seil in das Gebäude hinab, vermittelſt deſſen die Premſe gehoben und niedergelaſſen werden kan, da dann im letzten Fall die ganze Laſt des angehängten Gewichts auf dem Umfang des Kammrades liegt, und den Umlauf deſſelben hemmet. Wenn kein Kammrad für die Maſchine ſelbſt nöthig iſt, ſo wird an der Welle der

Wind-

Windflügel bloß eine groſſe hölzerne Scheibe angebracht, und die Premſe eben ſo, wie ſonſt auf das Kammrad, darauf gelegt.

193 §.

Ob nun gleich die im 191 §. beſchriebenen vertical umlaufenden und ſchräg gegen den Wind geſtellten Windflügel am gewöhnlichſten ſind, und den meiſten Beyfall gefunden haben; ſo hat man dennoch ſowohl mit horizontal umlaufenden Flügeln als auch mit ſolchen vertical umlaufenden Verſuche gemacht, die dem Winde nach Art der Schaufeln unterſchlächtiger Waſſerräder grade entgegen geſtellet ſind. Hiebey war, wie im 190 §. ſchon erwehnt iſt, nöthig, den Wind auf einen Theil des Rades allein zu leiten, und dies hat bey vertical umlaufenden Flügeln viele Schwierigkeit, ob man es gleich bey ſolchen, die horizontal umlaufen, mit ziemlichen Erfolge ins Werk gerichtet hat. Man kan allerley hieher gehörige Vorſchläge aus Leupolds Theatro Machinarum Generali im 321 u. f. §§. kennen lernen, woſelbſt ſie mit vieler richtigen Beurtheilung erzehlt werden. Eben daſelbſt wird im 315 §. ein horizontal umlaufendes Windrad mit acht Flügeln beſchrieben, welches in einigen beſondern Fällen bey kleinen Maſchinen ganz guten Nutzen hat. Die verticale Welle mit ihren acht Flügeln ſtehet unter einem Dach, und ſtatt der Säulen, welche das Dach tragen müſten, ſetzt man rund um das Rad herum dünne Bretter, oder im kleinen nur dünne Bleche in ſchräger Stellung gegen die Halbmeſſer des Rades, ohngefehr ſo wie die Stoßſchaufeln in den Kranz des oberſchlächtigen Waſſerrades eingeſetzt werden.

Wenn man ſich nun vom Umfang des Rades denjenigen Halbkreis vorſtellet, welcher der Richtung des Windes grade entgegen ſtehet, ſo iſt die eine Hälfte deſſelben, alſo ein Quadrant des ganzen Umfangs offen, die andre aber gegen den Wind geſchloſſen, ſo daß der Wind nur einen Quadranten des Rades und zwar ſo treffen kan, daß er die Schaufeln, welche dem Stoß ausgeſetzet ſind, auf einerley Art umzutreiben ſtrebet. Dieſe Einrichtung hat den Vortheil, daß nichts nach dem Winde gedrehet werden darf, denn der Wind mag herkommen, woher er will, ſo findet er einen Quadranten des Rades offen. Leupold ſchlägt einige Verbeſſerungen vor, welche dienlich ſeyn würden, wenn man das Rad im groſſen brauchen wollte. In Polen ſollen dergleichen Räder gebräuchlich ſeyn: man hat auch eine Maſchine mit einem ſolchen Rade bey Stockholm auf dem Thiergarten im Groſſen erbauet, und Hr. **Elvius** hat im erſten Theil der **Abhandlungen der Königl. Schwediſchen Academie der Wiſſenſch.** auch eine Verbeſſerung angegeben. Bis jetzt ſehe ich nicht, daß bey Windrädern dieſer und andrer ähnlicher Arten eine genaue theoretiſche Berechnung ihres Effects ſich füglich anſtellen laſſe, weil die Richtung und Geſchwindigkeit des Windes, wenn er zwiſchen den Brettern und andern Vorſetzungen durchbläſet, mancherley Aenderungen leidet, die ſich ſchwerlich auf eine genaue Berechnung bringen laſſen dürften. Ich werde deswegen die folgenden theoretiſchen Unterſuchungen blos auf die gemeine im 192 §. beſchriebene Art der Windflügel anwenden, und ich werde um ſo mehr dazu berechtiget ſeyn, weil ihre allgemeine Brauchbarkeit durch eine ſchon ſehr lange

ge mit dem beſten Erfolg verſuchte Ausübung hinlänglich beſtätiget iſt.

194 §.

Ein Paar Ebenen *EF* und *EG* ſchneiden einander unter dem Winkel α, und in der einen Ebene *EG* iſt eine grade Linie *MT* gezogen, welche mit der Durchſchnittslinie *EH* beyder Ebenen den Winkel $EMT = \beta$ einſchließt: man ſucht den Neigungswinkel dieſer Linie *MT* gegen die andre Ebene *EF*. 64 Fig.

Aufl. Es ſey TR auf EF ſenkrecht, und man ziehe MR, ſo iſt TMR der geſuchte Neigungswinkel. Noch ziehe man TA auf EH ſenkrecht; ſo iſt auch RA auf EH ſenkrecht, und $TAR = \alpha$, (314 §. Geom.) folglich $ATR = 90° - \alpha$, und $ATM = 90° - \beta$. Wird nun $RMT = \eta$ geſetzt, ſo iſt $MTR = 90° - \eta$. Das körperliche Dreyeck aber, deſſen Spitze T iſt, hat an AT einen rechten Winkel, alſo iſt $\cos MTR = \cos ATM \cos ATR$ (532 §. Geom.) d. i. $\sin \eta = \sin \alpha \sin \beta$.

195 §.

Die Umlaufsgeſchwindigkeit der Flügel iſt gegeben: man ſoll die wahre Geſchwindigkeit finden, womit jeder gegebene Punct in der Ebene des Flügels umläuft, vorausgeſetzt, daß der Flügel ſelbſt eine ebene Fläche ſey. 65 Fig.

Aufl. Es ſey CA die Mittellinie der Windruthe, die man als die Axe des Flügels betrachten kan, und CD die Umlaufsaxe, ſo iſt $ACD = 90°$. Wenn nun γ die Umlaufs- oder Winkel-Geſchwindigkeit des Flügels EHFI iſt, und P ein Punct in ſeiner

Axe,

Axe, CP $=x$ ſeine Entfernung von der Umlaufsaxe, ſo iſt die wahre Geſchwindigkeit dieſes Puncts P $=\gamma x$; (138 §. Mech.) und wenn PT eine Tangente des Kreiſes iſt, worin P umläuft, ſo iſt PT die Richtung der Bewegung des Puncts P, und die Ebene CPT iſt auf CD ſenkrecht.

Wenn nun ein anderer Punct M in der Ebene des Flügels auſſerhalb ſeiner Axe gegeben iſt, und man zieht MP auf CA ſenkrecht, ſo iſt die Lage dieſes Puncts durch CP und PM gegeben. Durch P ſey PQ mit CD parallel gezogen, ſo iſt auch CPQ $=90°$, alſo die Ebene MPQ auf AC ſenkrecht und mit CD parallel. In eben dieſer Ebene MPQ liegt auch PT, ſie ſchneidet die Ebene des Flügels ſenkrecht in MP, und wenn MP nach N verlängert wird, ſo iſt NPQ der Neigungswinkel des Flügels gegen die Umdrehungsaxe. Es ſey dieſer Winkel $=\vartheta$, und man ziehe Mq ⧣ PQ, ſo iſt auch NMq=NPQ $=\vartheta$. Ueberdem ſey MV auf PQ, und VS auf CD, folglich auch auf VQ ſenkrecht, ſo iſt die Ebene MVS auf VQ, folglich auch auf SD ſenkrecht: und wenn man MS ziehet, ſo iſt MS die Entfernung des Puncts M von der Umlaufsaxe. In dieſer Ebene MVS ſey Mt auf MS ſenkrecht, ſo iſt dies die Richtung der Bewegung des Puncts M, und ſeine Geſchwindigkeit nach Mt iſt $=\gamma s$, wenn man SM $=s$ ſetzt. Wird überdem CP$=x$, PM $=y$ geſetzt, ſo hat man MV $=y\sin\vartheta$, und MS$=\surd(\text{MV}^2+\text{VS}^2)$ $=\surd(x^2+y^2\sin\vartheta^2)$, folglich iſt die geſuchte wahre Geſchwindigkeit des Puncts M $=\gamma\surd(x^2+y^2\sin\vartheta^2)$.

Wenn man ſich die Ebene MVS gehörig erweitert vorſtellet, ſo wie ſie in der Figur durch das Viereck SW ausgedrückt iſt; ſo ſchneidet ſie die Ebene des

Flügels

Flügels in einer graden Linie EH, die durch M gehet. Weil nun die Ebene MVS auf VQ ſenkrecht war, ſo iſt ſie auf der Ebene MPQ ſenkrecht, worauf auch die Ebene des Flügels ſenkrecht ſteht: folglich muß EH auf MPQ ſenkrecht ſeyn, und PMV = $90° - \vartheta$ iſt der Neigungswinkel des Flügels gegen die Ebene MVS oder SW. Ferner hat man SMt $= 90° =$ HMV, alſo SMt − SMH = HMV − SMH, oder HMt = SMV: wird alſo HM$t = \beta$ geſetzt, ſo

iſt $\sin\beta = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 \sin\vartheta^2)}}$. Man ſetze

dem 194 §. gemäß den Neigungswinkel des Flügels gegen die Ebene WS $= \alpha$, den Neigungswinkel der Linie Mt gegen die Ebene des Flügels EF $= \eta$, ſo hat man $\sin\eta = \sin\alpha \sin\beta$, und weil hier $\alpha = 90° - \vartheta$ war, ſo findet man $\sin\eta = \sin\beta \cos\vartheta =$

$$\frac{x \cos\vartheta}{\sqrt{(x^2 + y^2 \sin\vartheta^2)}}.$$

Wird der Punct M in P angenommen, ſo iſt $y = 0$, und alsdenn fällt Mt mit PT zuſammen. Die gefundene Gleichung giebt nun $\sin\eta = \cos\vartheta$, wovon die Richtigkeit ſogleich aus Betrachtung der Figur erhellet, weil nun MPT $= \eta$ iſt, und TPQ $= 90°$, alſo NPQ + MPT, d. i. $\vartheta + \eta = 90°$ ſeyn muß.

196 §.

Die Geſchwindigkeit des parallel mit der Umlaufsaxe gegen den Windflügel *EF* anſtoſſenden Windes iſt gegeben, nebſt der Winkelgeſchwindigkeit, womit die Windruthe umläuft: man ſucht das ſtatiſche Moment der Kraft des Windes, womit derſelbe den Flügel zu drehen ſtrebt. 65 Fig.

Aufl.

Aufl. Man ſtelle ſich zuerſt in einem unbeſtimmten Punct M der Ebene des Flügels ein Element etwa dem 114§. Mech. gemäß unter der Geſtalt eines Rechtecks vor, wovon beyde Seitenlinien unendlich klein ſind, und deſſen Lage in der Ebene des Flügels durch $MP = y$, und $CP = x$ beſtimmt wird. Dieſer Vorſtellung gemäß wäre die Fläche dieſes Elements $= dxdy$, und ſtatt deſſen will ich hier Z ſchreiben. Wenn man nun die Zeichnung des vor. §. unverändert läſt, ſo iſt PQ die Richtung des Windes; ſetzt man aber noch PR auf die Ebene des Flügels ſenkrecht, ſo iſt dies die Richtung des ſenkrechten Drucks, dem der Punct P ausgeſetzt iſt. Man ziehe $Mq \# PQ$, und $Mr \# PR$, ſo iſt jenes die Richtung des Windes, und dies die Richtung des ſenkrechten Drucks gegen das Element M; und dieſer Druck iſt $= \frac{\zeta . G . Z}{4g} (C \sin\vartheta - c \sin\eta)^2$ (204§.)

Hier iſt nun $c = \gamma s$ und $\sin\eta = \frac{x \cos\vartheta}{s}$ (195 §.), alſo $c \sin\eta = \gamma x \cos\vartheta$: wenn demnach der Kürze wegen $\frac{\zeta}{4g} = n$ geſetzt wird, ſo iſt der ſenkrechte Druck gegen das Element $M = nG.Z (C \sin\vartheta - \gamma x \cos\vartheta)^2$. Wird nun MV nach v verlängert, ſo liegt Mv in der Ebene MVQ, worin auch Mr liegt, und es iſt $vMq = 90°$, $rMq = 90° - \vartheta$, alſo $rMv = \vartheta$. Man zerlege den ſenkrechten Druck gegen M, der Kürze halber P heiſſen ſoll, nach Mq und Mv, ſo wird der Druck nach $Mq = P \sin\vartheta$, und der Druck nach $Mv = P \cos\vartheta$. Jener Druck ſtrebt nur den Winkel ACD zu ändern, ohne auf die

die Umdrehungsbewegung Einfluß zu haben: die Richtung des letzten Drucks $Mv = P\cos\vartheta$ liegt in der Ebene MVS, und wenn SM nach s verlängert wird, ſo iſt $sMt = 90°$, $vMs = VMS = \beta$ (193 §.) und $vMt = 90° - \beta$. Demnach zerlegt ſich der Druck Mv in den Druck $Mt = P\cos\vartheta\sin\beta$ und $Ms = P\cos\vartheta\cos\beta$; und weil die Richtung des letztern durch die Umdrehungsaxe geht, ſo hat derſelbe auf die Umdrehungsbewegung ebenfals keinen Einfluß, ſondern nur der Druck $Mt = P\cos\vartheta\sin\beta$, und deſſen Moment iſt $= P\cos\vartheta . s\sin\beta = x . P\cos\vartheta$ (193 §.) $= nG . Z . x(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$.

Dieſer Ausdruck gilt nun für jedes Element M, es mag in der Linie MN liegen, wo es wolle, und $Z = dydx$ bedeutet die Fläche dieſes Elements. Die Summe aller zwiſchen MN und mn liegenden Elemente Z macht die Fläche MmnN aus, und wenn man von nun an die ganze Linie MN durch y verſteht, ſo iſt MmnN $= ydx$; demnach iſt das Moment des Windſtoſſes gegen MmnN $=$ $nGxydx(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$. Wenn demnach die Geſtalt des Flügels bekannt iſt, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen x und y, und kan y durch x ausdrücken, da dann hiernächſt die Summe dieſer Momente für alle Elemente MmnN, folglich das ganze geſuchte Moment gefunden werden kan.

Es folgt noch aus dieſen Schlüſſen, daß alle Puncte des Elements MmnN nach Richtungen, die mit PT parallel ſind, in jedem Augenblick mit einerley Geſchwindigkeiten fortgehen. Denn die Geſchwindigkeit des Puncts P nach PT iſt $= \gamma x$, und die Geſchwindigkeit eines jeden andern Puncts M nach $Mt = \gamma s$. Es war aber $Mv \# PT$, $vMt =$

$90° - \beta$, und $HMt = \beta$; demnach entſteht aus der Geſchwindigkeit $Mt = \gamma s$ nach Mv die Geſchwindigkeit $\gamma s \sin\beta = \gamma x$, weil $\sin\beta = \frac{x}{s}$ war. Dieſe Betrachtung bringt die gegenwärtige Aufgabe, auf den am Ende des 193 §. betrachteten Fall, und es iſt ſoviel, als wenn die Ebene $MmnN$ in jedem Augenblick nach der Richtung PT mit paralleler Bewegung und mit der Geſchwindigkeit γx fortgienge. Die Ebene durch PT und durch die Richtung des Windes PQ ſteht auf $MmnN$ ſenkrecht, und was im 189 §. α war, iſt hier $QPT = 90°$. Die Formul des ſenkrechten Drucks $nGaa(C\sin\vartheta - c\sin(\vartheta + \alpha))^2$ (189 §. am Ende) verwandelt ſich alsdenn hier in $nGydx(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2$, woraus nach der Richtung der Bewegung PT der Druck $nGydx(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$ entſteht, und das Moment dieſes Drucks wird wie vorhin $=$ $nGxydx(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$ gefunden. So verfährt Hr. **Euler** bey Auflöſung dieſer Aufgabe in der Abhandlung: Recherches plus exactes ſur les moulins a vent. Hiſt. de l'Acad. de Pruſſe T. XII. A. 1756. p. 179. M. ſ. auch T. VIII. A. 1752. p. 173. Allgemeinere Formuln für jede auch gekrümmte Geſtalt des Flügels giebt Hr. Euler in der Abhandlung: De conſtructione aptiſſima molarum alatarum, Comment. Nov. Petrop. T. IV. p. 49. ſqq.

197 §.

Die Geſtalt des Flügels iſt durch eine Gleichung zwiſchen x und y gegeben: man ſucht das Moment des Windſtoſſes für den erſten Anfang der Bewegung.

Aufl.

Aufl. Man ſetze CA $= a$, CB $= b$, ſo iſt vermöge der angenommenen Vorausſetzung $y = 0$; alſo das geſuchte Moment des Windſtoſſes

$$= \frac{\zeta G C^2 \, ſin\vartheta^2 \, coſ\vartheta}{4g} \int xydx + C.$$

Dies Integral wird ſo genommen, daß es verſchwindet, wenn man $x = b$ ſetzt, und nach der Integration nimmt man $x = a$. Nun ſey A der Flächen-Inhalt des Flügels, G ſein Schwerpunct, und CG $= f$, ſo iſt $\int xydx = Af$ (143 §. Mech.), folglich wird das geſuchte Moment des Windſtoſſes $= \frac{\zeta}{4g} . G . A . f C^2 \, ſin\vartheta^2 \, coſ\vartheta$. Demnach iſt das geſuchte Moment des Windſtoſſes ſo groß, als wenn am Schwerpunct des Flügels nach der Richtung ſeiner Bewegung eine Kraft angebracht wäre, ſo groß als das Gewicht einer Luftſäule auf der Fläche des Flügels als der Grundfläche in der Höhe $= \frac{\zeta C^2 \, ſin\vartheta^2 \, coſ\vartheta}{4g}$.

Um dieſe Auflöſung durch die Anwendung auf einen ſpeciellen Fall zu erläutern, will ich annehmen, der Flügel ſey ein rechtwinklichtes Parallelogramm, deſſen Breite MN $= e$ ſeyn ſoll, ſo wird das geſuchte Moment $= \frac{\zeta G e . C^2 \, ſin\vartheta^2 \, coſ\vartheta}{4g} \int xdx + C.$

Weil nun dies Integral $= 0$ ſeyn muß, wenn $x = b$ iſt, und nach der Integration $x = a$ geſetzt werden muß, ſo findet man den Ausdruck

$$\frac{\zeta G e . C^2 \, ſin\vartheta^2 \, coſ\vartheta}{8g} (aa - bb) = \frac{\zeta G e (a - b) C \, ſin\vartheta^2 \, coſ\vartheta}{4g} . \tfrac{1}{2}(a + b).$$

Wenn nun

$CG = \frac{1}{2}(a+b)$ genommen wird, ſo iſt G der Schwerpunct des Flügels, und $(a-b) = AB$ iſt ſeine Länge, alſo $(a-b)e$ ſein Flächen-Inhalt, der vorhin $= A$ geſetzt ward, ſo wie das $= f$ war, was jetzt $= \frac{1}{2}(a+b)$ iſt. Die Auflöſung in dieſem beſondern Fall kommt demnach völlig mit der allgemeinen Auflöſung überein.

Es iſt der Natur der Sache gemäß, daß dies Moment verſchwinde, ſowohl wenn $\vartheta = 0$, als auch, wenn $\vartheta = 90°$ iſt, und beydes ergiebt auch die gefundene Formul, weil der Factor $\sin\vartheta^2 \cos\vartheta$ in beyden Fällen verſchwindet. Eben dieſer Factor ergiebt, daß dies Moment anfangs mit ϑ wachſe, hiernächſt aber wieder abnehme, demnach muß dies Moment bey einem gewiſſen Werth von ϑ am gröſten werden.

198 §.

Denjenigen Neigungswinkel der Windflügel gegen die Umdrehungsaxe zu finden, wobey der Windſtoß die Flügel im erſten Augenblick der Bewegung am ſtärkſten zu drehen ſtrebt.

Aufl. Man ſetze dem 343 §. Mechan. gemäß $d.\sin\vartheta^2 \cos\vartheta = 0$, und beſtimme aus dieſer Gleichung den Werth von ϑ, ſo findet man $\cos\vartheta \,.\, d \,.\, \sin\vartheta^2 + \sin\vartheta^2 \,.\, d \,.\, \cos\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^3 = 0$, und daraus folgt $\sin\vartheta^2 = 2\cos\vartheta^2$, oder $\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \text{tang}\,\vartheta = \sqrt{2} = 1{,}4142135$. Die Trigonometriſchen Tafeln ergeben, daß dieſe Tangente einem Winkel von 54° 44′ zugehöre, und ſo groß muß der geſuchte Winkel ϑ ſeyn.

Ob nun gleich beym erſten Angrif des Windes, bevor die Flügel merklich von der Stelle gerückt ſind, das Moment des Windſtoſſes am ſtärkſten iſt, wenn die Umdrehungs-Axe dieſer Rechnung gemäß gegen die Flügel unter einem Winkel von 54° 44′ geneigt iſt; ſo folgt doch daraus nicht, wie man wohl ehedem daraus geſchloſſen hat, daß dies die vortheilhafteſte Wendung der Flügel ſey, weil noch zuförderſt unterſucht werden muß, ob das Moment des Windſtoſſes bey eben dieſem Winkel auch alsdenn noch am gröſten bleibe, wenn die Flügel im völligen Schwunge ſind. Bevor dies umſtändlicher unterſucht war, nahm man es zur Regel an, daß die Windflügel mit der Axe einen Winkel von 54° bis 55° einſchlieſſen müſten, und dieſe Regel giebt unter andern auch **Belidor** in der Architect. Hydraul. III. Buch II. Cap. 850 §; er gründet ſie auf die eben vorgetragene Rechnung, die bey ihm im 847 §. vorkommt, und in ſo weit, als die vorausgeſetzte Einſchränkung es verſtattet, ganz richtig iſt. Hr. von **Wolf** bleibt bey eben der Regel, wenn er im 929 §. der lateiniſchen Mechanik, im Tomo II. Elem. Math. univerſæ pag. 297. das äuſſerliche einer Windmühle beſchreibt, und obgleich hieſelbſt kein Beweis ſtehet, ſo findet man ihn doch im VII. Cap. der Hydraul. im 316 §. a. a. O. pag. 503. Weil Hr. von Wolf im XVI. und XVII. Cap. der Mechanik nur eine **bloſſe Beſchreibung** von dem äuſſerlichen Anſehen ſowohl, als auch der innern Einrichtung der gebräuchlichſten Maſchinen geben wollte, wie er ſich im 932 §. ausdrücklich erklärt; ſo war hier kein Beweis zu erwarten: im VII Cap. der Hydraulik aber iſt eine nähere Anleitung gegeben, ſo-

wohl den Waſſerſtoß, als auch den Windſtoß zu berechnen. Ich führe unter einer Menge andrer Schriftſteller, welche die Regel nicht blos vortragen, ſondern auch ihren Vorausſetzungen gemäß richtig beweiſen, die beyden erwehnten ſehr verdienten Schriftſteller nur deswegen an, weil Hr. Schober in ſeiner oben angeführten Abhandlung im IX. Theil des Hamb. Magazins den Hrn. Belidor wegen dieſer Regel tadelt, und ſich wundert, daß ſo viele andre Schriftſteller eben die Regel beybehalten haben: im Gegentheil aber Hr. Clemm in ſeinem mathematiſchen Lehrbuch, im 122 §. der Statik und Mechanik 40 S. ſeine Verwunderung äuſſert, daß Hr. v. Wolf nicht einmahl in ſeinen lateiniſchen Elementen die Regel bewieſen habe. Dieſe letzte Aeuſſerung iſt aus einem Verſehen entſtanden, weil H. Clemm vermuthlich aus dem Mangel des Beweiſes in der Mechanik auf den gänzlichen Mangel geſchloſſen hat: und was die Aeuſſerungen des H. Schober betrift, ſo wäre noch wohl manches dagegen zu erinnern. Den Hrn. Belidor muß man nach dem Zuſtand der Wiſſenſchaft beurtheilen, ſo wie derſelbe damals beſchaffen war, als er ſein ſo ſehr brauchbares und vorzüglich ſchönes Werk von der Waſſerbaukunſt aufſetzte. Hr. Parent hat um das Jahr 1700 die Regel vermittelſt der Differential-Rechnung für die Wendung der Windflügel erfunden, nachdem Herr Renau in ſeiner Theorie de la Manoeuvre des Vaiſſeaux. Paris 1689. für die vortheilhafteſte Stellung des Steuer-Ruders am Schif eben den Winkel gefunden hatte: und es iſt gewiß, daß alles ganz richtig aus den Vorausſetzungen flieſt, welche Hr. Parent und alle, die ihm folgen, annehmen, weil ſie

den Flügel in Ruhe betrachten. Huygen und Joh. Bernoulli (M. ſ. Hugenii Opera varia Vol. I. p. 296. Joh. Bernoulli Opera Tom. IV. p. 40. 41.) haben dieſe Regel vom Renau (der ihre Richtigkeit bald nach Bekanntmachung ſeines erwehnten Werks ſelbſt zu bezweifeln anfieng,) und Parent doch wohl nicht, ohne ſelber darüber zu denken, für gut hingenommen, da ſie in andern Stücken vom H. Renau abgiengen, wovon man auch Bernoulli Opera Tom. IV. p. 101-167. nachſehen kan. Die Beſchuldigung des H. Schober, daß hier alle Mathematiker bis auf Maclaurin auf einerley Art geirret haben, trift ſie alſo nur in ſo ferne, als man bis dahin unterlaſſen hatte, zu unterſuchen, ob auch alsdenn, wenn die Flügel im völligen Umlauf ſind, bey einem andern Winkel das Moment des Windſtoſſes, in ſo ferne nun nur die relative Geſchwindigkeit des Windes in Betrachtung kommen kan, am gröſten ſey. Doch iſt würklich Maclaurin nicht der erſte, der auf dieſen Umſtand Rückſicht genommen hat: H. Dan. Bernoulli hat es ſchon gethan, (Hydrodyn. Sect. IX. §. 39. 40. pag. 196. 197.) deſſen Werk Maclaurin ſchon kannte (M. ſ. unten den 219 §.); und andre Schriftſteller, wenn ſie gleich den Winkel von 54° 44′ vorſchlagen, erinnern doch ausdrücklich, daß ihre Regel unter der Einſchränkung nur ihre Anwendung finde, wenn die Geſchwindigkeit des Windflügels in Vergleichung mit der Geſchwindigkeit des Windes nur klein iſt. Seit dem Jahr 1751, in welchem Hr. Schober ſeine Abhandlung aufgeſetzt hat, iſt dieſe Sache weiter unterſucht worden, und dies beſonders durch die Bemühungen des H. Euler,

ler, wovon das folgende nun weitern Unterricht gegeben wird.

199 §.

Es bleiben alle gegebene Stücke für den Beharrungsſtand der Maſchine, ſo wie ſie im 195 §. angenommen wurden, nachdem die Flügel im vollen Umlauf gekommen ſind: man ſucht das mechaniſche Moment des Windſtoſſes in Anſehung der Umlaufs-Axe.

Aufl. Jedes Element $MmnN$ leidet nach der Richtung ſeiner Bewegung einen Druck $=$ $nGydx(C\sin\vartheta - \gamma x \cos\vartheta)^2 \cos\vartheta$ (196 §.), und es iſt $n = \frac{\zeta}{4g}$, alſo $nG = \frac{7}{4 \cdot 15,1 \cdot 80}$, wenn man franzöſiſch Maaß und Gewicht verſtehet, und $\zeta = 1$ annimmt. Ich will nun c ſtatt C ſchreiben, ſo daß hinführo c die Geſchwindigkeit des Windes bedeuten ſoll, weil der Buchſtab c in der Bedeutung des 189 §. nicht weiter gebraucht wird. Wenn man ſich nun aus dem 196 §. erinnert, daß die Geſchwindigkeit aller Puncte der unendlich kleinen Ebene $MmnN$ $= \gamma x$ war, ſo ergiebt ſich das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen das Element $MmnN$ $=$ $nG\gamma xydx(c.\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2 \cos\vartheta$. Dies mechaniſche Moment wird demnach auch gefunden, wenn man das ſtatiſche Moment im 196 §. mit der Winkel-Geſchwindigkeit γ multiplicirt, welches auch mit den Begriffen des ſtatiſchen und mechaniſchen Moments, und dem Begrif der Winkel-Geſchwindigkeit ſehr wohl übereinkommt, wie man leicht überſiehet. Wenn ich nun das gefundene Moment $=$

dM

dM annehme, ſo findet man $dM = nG\gamma(xydx \cdot c^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta - 2x^2ydx \cdot c\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta^2 + x^3ydx\gamma^2 \cos\vartheta^3)$; und hieraus wird das Moment M für den ganzen Windflügel gefunden, wenn man dieſen Ausdruck integrirt, und die beſtändige Gröſſe ſo beſtimmt, daß $M = 0$ wird, wenn man $x = CB = b$ ſetzt, nach der Integration aber $x = CA = a$ nimmt. Dieſemnach nehme man die drey Integrale $\int xydx$, $\int x^2ydx$, und $\int x^3ydx$ ſo, daß ſie verſchwinden, wenn $x = b$ iſt, und ſetze nach der Integration $x = a$. Wird alsdenn dieſen Vorausſetzungen gemäß $\int xydx = P$, $\int x^2ydx = Q$, $\int x^3ydx = R$, ſo erhält man $M = nG\gamma(Pc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta - 2Qc\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta^2 + R\gamma^2 \cos\vartheta^3)$.

Weil das ſtatiſche Moment des Windſtoſſes gegen das Element

$$MmnN = nGxydx(c\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$$

war, ſo ſiehet man leicht, daß für den ganzen Flügel das ſtatiſche Moment des Windſtoſſes $= nG(Pc^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta - 2Qc\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta^2 + R\gamma^2\cos\vartheta^3)$ gefunden werde, woraus alsdenn durch die Multiplication mit γ das mechaniſche Moment gefunden wird. Ich will das ſtatiſche Moment $= S$ ſetzen, ſo iſt das mechaniſche Moment $M = \gamma S$. Wenn nun die Fläche des Flügels $= A$ der Abſtand ſeines Schwerpuncts von der Umdrehungsaxe $= f$ iſt, ſo hat man $P = \int xydx = Af$ (143 §. Mech.). Ferner ſey Akk das Moment der Trägheit des Flügels in Anſehung einer durch C mit MN parallelen Axe, ſo iſt $Q = \int xxydx = Akk$ (163 §. Mech.) Setzt man demnach $\int x^3ydx = R = Ah^3$, ſo wird $S = nGA(fc^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta - 2k^2c\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta^2 + h^3\gamma^2\cos\vartheta^3)$

Dies Moment iſt demnach ſo groß, als wenn am Schwerpunct des Flügels nach der Richtung ſeiner Bewegung eine Kraft angebracht wäre, ſo groß als das Gewicht einer Luftſäule auf der Fläche des Flügels in der Höhe $= nc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta - \frac{2k^2}{f} c\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta^2 + \frac{h^3}{f}\gamma^2 \cos\vartheta^3$. In dem Fall, wenn $\gamma = 0$ iſt, das iſt, ſo lange der Flügel ruhet, wird dieſe Höhe $= nc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta$, wie im 197 §. Wird die eben erwehnte Kraft $= F$ geſetzt, ſo hat man $S = Ff$, und das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen den Flügel iſt $= Ff\gamma$.

Dies Moment $Ff\gamma$ verſchwindet nun nicht allein, wenn $\gamma = 0$ iſt, ſondern auch alsdenn, wenn γ diejenige Grenze erreicht hat, die $Ff = 0$ giebt: alſo muß es einen gewiſſen Werth für γ geben, der ſtatt γ geſetzt, das gröſte Moment $Ff\gamma$ zuwege bringt. Bevor aber derjenige Werth von γ geſucht wird, der dem gröſten Werth von $Ff\gamma$ zugehört, iſt es nicht undienlich, den Werth von γ zu ſuchen, welcher $Ff = 0$ giebt. Dieſen findet man aus der Gleichung $fc^2 \sin\vartheta^2 - 2k^2 c\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta + h^3 \gamma^2 \cos\vartheta^2 = 0$, oder $fc^2 \tang\vartheta^2 - 2k^2 c\gamma \tang\vartheta + h^3\gamma^2 = 0$, welche gehörig geordnet $\gamma^2 - \frac{2k^2 c \tang\vartheta}{h^3}\gamma = -\frac{fc^2 \tang\vartheta^2}{h^3}$ giebt, und $\gamma = \frac{k^2 c \tang\vartheta}{h^3} \pm \sqrt{\frac{k^4 c^2 \tang\vartheta^2}{h^6} - \frac{fc^2 \tang\vartheta^2}{h^3}}$, oder auch $\gamma = \frac{k^2 c \tang\vartheta \pm c \tang\vartheta \sqrt{(k^4 - fh^3)}}{h^3}$. Man wird die

die Natur dieſer Formuln deſto beſſer überſehen, wenn man mit der allgemeinen Auflöſung die Anwendung auf einen beſondern Fall verbindet.

200 §.

Die Auflöſung der Aufgabe des vor. §. in dem Fall zu finden, wenn der Flügel die Geſtalt eines Rechtecks hat, deſſen Breite $= e$ iſt.

Aufl. Weil $A = (a-b)e$ und $f = \frac{1}{2}(a+b)$ wird, ſo iſt nur noch nöthig k und h zu ſuchen, und man findet $Q = \int exxdx = \frac{1}{3}e(a^3 - b^3) = Akk$, und $R = \int ex^3dx = \frac{1}{4}e(a^4 - b^4) = Ah^3$. Dies giebt $k^2 =$

$$\frac{1}{3}.\frac{a^3-b^3}{a-b} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = \frac{2}{3}af + \frac{1}{3}b^2,$$

und $h^3 = \frac{1}{4}.\frac{a^4-b^4}{a-b} = \frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)f$. Braucht man dieſe Werthe in der für S gefundenen Formul, ſo findet man $S =$

$$nG.A.f(c^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta - (\tfrac{4}{3}a + \tfrac{2}{3}(b^2:f))c\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\gamma^2\cos\vartheta^3),$$

und alsdenn wird das mechaniſche Moment $M = \gamma S$.

Weil a gewöhnlich ſehr viel länger als b iſt, ſo wird $\frac{b^2}{f}$ ein kleiner Bruch ſeyn, den man ohne ſehr zu fehlen weglaſſen kan; und alsdenn kan auch $a^2 + b^2 = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2$ angenommen werden, ſo erhält man

$$S = nG.A.f(c^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta - \tfrac{4}{3}ac\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}a^2\gamma^2\cos\vartheta^3),\quad \text{oder}$$

$$S = nG.A.f\cos\vartheta^3(c^2\tang\vartheta^2 - \tfrac{4}{3}ac\gamma\tang\vartheta + \tfrac{1}{2}a^2\gamma^2).$$

Dies

Dies Moment wird nun $= 0$, wenn $6c^2 \tang\vartheta^2 - 8ac\gamma \tang\vartheta + 3a^2\gamma^2 = 0$ iſt, und dieſe Gleichung giebt $\gamma^2 - \frac{8c \tang\vartheta}{3a}\gamma = - \frac{2c^2 \tang\vartheta^2}{a^2}$, woraus $\gamma = \frac{4c \tang\vartheta}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{16c^2 \tang\vartheta^2}{9a^2} - \frac{2c^2 \tang\vartheta^2}{a^2}\right)}$ folgt, oder $\gamma = \frac{4c \tang\vartheta \pm c \tang\vartheta \sqrt{-2}}{3a}$. Beyde Wurzeln ſind demnach unmöglich, und dies wird anfangs unerwartet ſcheinen: ja es könnte den Verdacht erwecken, als wenn es vielleicht nur daher käme, daß man nicht berechtiget geweſen, b in Vergleichung mit a wegzulaſſen. Allein dieſer Verdacht wird ſogleich wegfallen, wenn man erwegen will, daß die für S gefundene Formul in der Schärfe richtig ſey, wenn CB würklich $= 0$ iſt, und der Flügel ſich bis an die Umlaufsaxe erſtreckt: und aus der am Ende des vor. §. gefundenen allgemeinen Formul für γ läſt es ſich allgemein überſehen, unter welchen Umſtänden beyde Werthe von γ unmöglich werden. Man multiplicire ſie im Zehler und Nenner mit A, ſo wird $\gamma = \frac{Q \tang\vartheta \pm c \tang\vartheta \sqrt{(Q^2 - P.R)}}{R}$, und daraus erſiehet man, daß beyde Wurzeln allemahl alsdenn unmöglich ſind, wenn $P.R > Q^2$ oder $\frac{R}{Q} > \frac{Q}{P}$ iſt. Soviel iſt nun zwar für ſich klar, daß die

drey

drey Integrale $\int xydx$, $\int xxydx$, und $\int x^3 ydx$, oder P, Q und R nach der Ordnung immer gröſſer werden, ob aber allemahl R in Vergleichung mit Q gröſſer ſey, als Q in Vergleichung mit P iſt, ſolches würde noch weiter unterſucht werden müſſen, wenn es hier nicht genügen könnte, ſoviel gewiß zu wiſſen, daß wenigſtens in einigen beſondern Fällen $P.R > Q^2$ gefunden werde. Dies bleibt doch allemahl unerwartet, weil die Integrale P, Q, R, blos von der Geſtalt des Flügels abhängen, und man doch der Natur der Sache nach geneigt ſeyn wird, anzunehmen, daß es bey jeder Geſtalt des Flügels eine gewiſſe Umlaufsgeſchwindigkeit geben müſſe, wobey der Wind auf den Flügel weiter keine Würkung hat.

201 §.

Der Druck ſelbſt, welchen jedes Element nach der Richtung ſeiner Bewegung leidet, war $=$

$$nGydx(c\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta \text{ (199 §.)} =$$

$$nG\cos\vartheta^3(c^2\tang\vartheta^2.ydx - 2c\gamma\tang\vartheta.xydx + \gamma^2.x^2ydx);$$

Demnach iſt die Summe aller Kräfte, welchen der ganze Flügel ausgeſetzt iſt, $= nGA\cos\vartheta^3(c^2\tang\vartheta^2 - 2c\gamma f\tang\vartheta + \gamma^2k^2)$, und dieſe Summe verſchwindet, wenn $c^2\tang\vartheta^2 - 2c\gamma f\tang\vartheta + \gamma^2k^2 = 0$ iſt. Dieſe Gleichung giebt $\gamma^2 - \frac{2cf\tang\vartheta}{k^2}\gamma = -\frac{c^2\tang\vartheta^2}{k^2}$, alſo $\gamma = \frac{cf\tang\vartheta}{k^2}$

$\pm\surd$

$\pm\sqrt{\left(\frac{c^2 f^2 \tang\vartheta^2}{k^4} - \frac{c^2 \tang\vartheta^2}{k^2}\right)}$ oder $\gamma = \frac{cf\tang\vartheta \pm c\tang\vartheta\sqrt{(f^2 - k^2)}}{k^2}$. Mit dieſer Gleichung hat es eben die Bewandniß, wie mit der Gleichung des vor. §.; beyde Wurzeln ſind allemahl unmöglich, weil $k^2 > f^2$ iſt, was auch der Flügel für eine Geſtalt hat. Wenn nemlich das Moment der Trägheit des Flügels in Anſehung einer durch den Schwerpunct mit MN parallelen Axe $= \mathrm{A}mm$ geſetzt wird, ſo iſt $kk = ff + mm$, (164 §. Mech.) alſo allemahl $f^2 < k^2$. Um nun die Urſache dieſes ebenfals unerwartet ſcheinenden Erfolgs der Rechnung ausfündig zu machen, betrachte man zuerſt den Druck, welchem jedes einzelne Moment ausgeſetzt iſt. Dieſer war $= nGydx\cos\vartheta^3(c\tang\vartheta - \gamma x)^2$, und derſelbe verſchwindet, wenn $c\tang\vartheta - \gamma x = 0$, alſo $\gamma = \frac{c\tang\vartheta}{x}$ iſt. Dies Reſultat der Rechnung iſt nun der Natur der Sache ganz gemäß; denn γx iſt die Geſchwindigkeit des Elements nach der Richtung PT, und $\gamma x\cos\vartheta$ deſſelben Geſchwindigkeit nach der Richtung PR. Nach eben dieſer Richtung iſt die Geſchwindigkeit des Windes $= c\sin\vartheta$: demnach leidet dies Element gar keinen Druck, wenn $c\sin\vartheta = \gamma x\cos\vartheta$, oder $c\tang\vartheta = \gamma x$ wird. Hieraus erſiehet man ſogleich, daß die Kraſt des Windes nicht für alle Elemente zugleich verſchwinden könne, weil x für jedes Element einen eigenen Werth hat. Wenn man jetzt CP durch x verſteht, ſo hat der Wind keine Würkung mehr gegen das Element MmnN ſobald

als

als $\gamma = \frac{c \tan \vartheta}{CP}$ wird; und weil nun ſchon für diejenigen Elemente, welche weiter von der Axe weg-liegen $\gamma > \frac{c \tan \vartheta}{x}$ iſt, ſo leiden ſie ebenfals keinen Druck mehr: aber für diejenigen, welche der Axe näher liegen, iſt noch $\gamma < \frac{c \tan \vartheta}{x}$, und dieſe letztern ſind dem Druck des Windes noch ausgeſetzt. Gänzlich hört die Würkung des Windſtoſſes gegen den Flügel alsdenn allererſt auf, wenn $\gamma = \frac{c \tan \vartheta}{b}$ wird, denn nun kann auch dasjenige Element, welches der Umdrehungsaxe am nächſten liegt, vom Winde weiter gar keine Gewalt leiden.

202 §.

Dieſe allmählige Verminderung des Drucks gegen den Flügel, ſo wie derſelbe mit der Fläche abnimmt, die nur noch vom Winde getroffen wird, können die vorhin betrachteten Integralformuln aus folgender Urſache nicht anzeigen. Weil der Druck gegen jedes Element dem Quadrat der relativen Geſchwindigkeit des Windes gegen die Fläche des Flügels proportional iſt, ſo giebt die Formul den Druck gegen jedes Element des Flügels poſitiv, die relative Geſchwindigkeit des Windes mag poſitiv oder negativ ſeyn: aber im letzten Fall, wenn die relative Geſchwindigkeit des Windes $c \sin \vartheta - \gamma x \cos \vartheta$ negativ wird, das heiſt, wenn die Fläche dem Winde ſchneller ausweicht, als der Wind folgt; ſo verwan-

delt ſich der Druck in Widerſtand, und das Element wird nicht nach PR zu, ſondern rückwärts nach $P\rho$ zu gedrückt. Man wird ſich dies ganz deutlich vorſtellen, wenn man den einfachſten Fall erwegen will, wenn die Fläche CD (60 Fig.) mit paralleler Bewegung und mit dem Winde nach einerley Richtung *ab*, die auf ihr ſelbſt ſenkrecht iſt, fortgehet. Wenn nun C und c die Geſchwindigkeiten des Windes und der Ebene ſind, ſo iſt der Druck des Windes gegen die Ebene $= nG.CD.(C-c)^2$ nach der Richtung *ab*, ſo lange $C > c$ iſt. Wird $c = C$, ſo hat der Wind auf die Fläche gar keine Würkung: wenn aber $c > C$ wird, ſo leidet CD einen Widerſtand gegen *ba* zu, der $= nG.CD(c-C)^2$ iſt, und es iſt nun ſo viel, als wenn der Wind mit der Geſchwindigkeit $c-C$ gegen die hintere Seite der Ebene CD ſtieſſe. Dies alles iſt der Natur der Sache vollkommen gemäß, und wenn $C=0$ iſt, das heiſt, wenn die Luft völlig in Ruhe iſt, ſo hat man die gewöhnliche Formul des Widerſtandes $= nG.CD.c^2$. Weil nun die Formul für den Druck des Windes gegen ein Element des Windflügels allemahl poſitiv bleibet, wenn gleich $\gamma x \cos\vartheta > c \sin\vartheta$ wird; ſo geben die vorhin betrachteten Integralformuln die Summe aller Kräfte gegen den Flügel, und die Summe aller Momente, ohne Rückſicht auf den Umſtand, ob dieſe Kräfte den Flügel mit oder gegen den Wind zu drehen ſtreben, und da ſiehet man nun wohl, daß dieſe Summe nie $=0$ werden könne, es mag γ ſo groß werden, als man will; und das war die Urſache, warum für γ kein möglicher Werth gefunden ward, wenn man die Summe aller Kräfte, oder die Summe ihrer Momente $=0$ ſetzte. Eben dieſe

65 Fig.

Schlüſ-

Schlüſſe führen nun zugleich auf eine andre Art, wie man die Rechnung anſtellen muß, wenn man diejenige Winkelgeſchwindigkeit des Flügels finden will, wobey der Wind dagegen weiter keine Würkung hat.

203 §.

Diejenige Winkelgeſchwindigkeit des Windes zu finden, wobey die Würkung des Windſtoſſes gegen denſelben völlig aufhört.

Aufl. Dieſe Würkung des Windſtoſſes wird völlig aufhören, wenn die Summe der Momente aller Kräfte, die den Flügel mit dem Winde zu drehen ſtreben, eben ſo groß iſt, als die Summe aller Momente der entgegen geſetzten Kräfte. Man muß demnach von dieſen Summen eine jede beſonders ſuchen, und alsdenn prüfen, unter welchen Umſtänden beyde einander gleich werden können. Dieſemnach ſetze man voraus, es werde ein gewiſſes Element $M'm'n'N$ ſchon gegen den Wind getrieben; ſo iſt der 65 Fig.
Druck auf daſſelbe $= nGydx(\gamma x\cos\vartheta - c\sin\vartheta)^2\cos\vartheta$, und alle zwiſchen EI und $M'N'$ liegende Elemente werden eben ſo gegen den Wind gedruckt. Das Moment dieſes Drucks iſt $= nGxydx.(\gamma x\cos\vartheta$
$- c\sin\vartheta)^2\cos\vartheta = nG\cos\vartheta^3(\gamma^2 x^3 ydx$
$- 2c\gamma x^2 ydx\tang\vartheta + c^2 xydx\tang\vartheta^2)$.
Wenn nun EKLI derjenige Theil des Flügels iſt, der jetzt gegen den Wind getrieben wird, und man will die Summe aller Momente der Kräfte haben, die gegen dieſen Theil drücken, ſo muß man das gefundene Differential ſo integriren, daß es verſchwindet, wenn $x = CO$ iſt, und nach der Integration muß $x = a$ geſetzt werden. Ich will nun annehmen, daß in dieſer Vorausſetzung $\int xydx = A$, $\int x^2 ydx = B$,

$\int x^3 ydx = C$ werde, ſo erhält man für das Moment der gegen EKLI drückenden Kräfte den Ausdruck

$$nG\cos\vartheta^3(\gamma^2 C - 2c\gamma B \,\mathrm{tang}\,\vartheta + c^2 A \,\mathrm{tang}\,\vartheta^2).$$

Iſt nun im Gegentheil MmnN ein Element, das zu dem untern Theil des Flügels HKLF gehört, ſo leidet es den Druck $nG\cos\vartheta^3 (ccxydx \,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 2c\gamma x^2 ydx \,\mathrm{tang}\,\vartheta + \gamma^2 x^3 ydx \,\mathrm{tang}\,\vartheta^3)$. Hievon wird das Integral ſo genommen, daß es bey der Vorausſetzung $x = b$ verſchwindet, und nach der Integration ſetzt man $x =$ CO. In dieſer Vorausſetzung ſey nun $\int xydx = D$, $\int x^2 ydx = E$, $\int x^3 ydx = F$, ſo findet man für das Moment der gegen HKLF drückenden Kräfte den Ausdruck

$$nG\cos\vartheta^3(cc D \,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 2c\gamma E \,\mathrm{tang}\,\vartheta + \gamma^2 F).$$

Beyde Werthe gleich geſetzt, geben die Gleichung

$$(C-F)\gamma^2 - 2c\,\mathrm{tg}\,\vartheta(B-E)\gamma + c^2(A-D)\,\mathrm{tg}\,\vartheta^2 = 0,$$

woraus aber der geſuchte Werth von γ noch nicht gefunden werden kan, bevor auch die Linie CO, welche in allen ſechs Integralformuln vorkommen wird, ebenfalls durch γ ausgedrückt iſt. Dieſe Linie CO erſtreckt ſich von der Umlaufs-Axe bis an die Grenze KL, welche beyde Theile des Flügels, die auf entgegen geſetzte Art gepreſt werden, von einander abſondert. Demnach ſiehet man wohl, daß das hieſelbſt befindliche Element von keiner Seite Druck leiden werde, und daß alſo $c\sin\vartheta - \gamma.\mathrm{CO}.\cos\vartheta = 0$ ſeyn müſſe, woraus $\mathrm{CO} = \frac{c\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{\gamma}$ gefunden wird. Dieſe Gleichung mit der vorigen verbunden, beſtimmt alsdenn CO ſowohl, als auch die geſuchte Winkelgeſchwindigkeit γ.

204 §.

Die Auflöſung der Aufgabe des vor. §. zu finden, wenn der Flügel die Geſtalt eines Rechtecks hat, und ſeine Abmeſſungen gegeben ſind.

Aufl. Die Breite des Flügels ſey $=e$, und $CO=p$; ſo findet man

$$C=\int ex^3 dx=\tfrac{1}{4}e(a^4-p^4)$$
$$F=\int ex^3 dx=\tfrac{1}{4}e(p^4-b^4)$$
$$C-F=\tfrac{1}{4}e(a^4-2p^4+b^4)$$
$$(C-F)\gamma^2=\tfrac{1}{4}e\left(a^4\gamma^2-\frac{2c^4 tg\vartheta^4}{\gamma^2}+b^4\gamma^2\right),$$
$$B=\int ex^2 dx=\tfrac{1}{3}e(a^3-p^3)$$
$$E=\int ex^2 dx=\tfrac{1}{3}e(p^3-b^3)$$
$$B-E=\tfrac{1}{3}e(a^3-2p^3+b^3)$$
$$(B-E)\gamma=\tfrac{1}{3}e\left(a^3\gamma-\frac{2c^3 tg\vartheta^3}{\gamma^2}+b^3\gamma\right),$$
$$A=\int exdx=\tfrac{1}{2}e(a^2-p^2)$$
$$D=\int exdx=\tfrac{1}{2}e(p^2-b^2)$$
$$A-D=\tfrac{1}{2}e\left(a^2-\frac{2c^2 tang\vartheta^2}{\gamma^2}+b^2\right).$$

Dieſe Werthe in die Gleichung des vor. §. geſetzt, geben $\tfrac{1}{4}(a^4+b^4)\gamma^4-\tfrac{2}{3}c\,\text{tang}\vartheta\,(a^3+b^3)\gamma^3$ $+\tfrac{1}{2}c^2\,\text{tang}\vartheta^2(a^2+b^2)\gamma^2-2c^4\,\text{tg}\vartheta^4+2c^3\,\text{tg}\vartheta^3$ $-2c^2\,\text{tang}\vartheta^2=0$, oder

$$\gamma^4-\frac{8c\text{tg.}\vartheta(a^3+b^3)}{3(a^4+b^4)}.\gamma^3+\frac{2c^2\text{tg}\vartheta^2(a^2+b^2)}{a^4+b^4}.\gamma^2$$
$$-\frac{8(c^4 tang\vartheta^4-c^3 tang\vartheta^3+c^2 tang\vartheta^2}{a^4+b^4}=0.$$

Es iſt ſchon vorläufig verſchiedene mahl angemerkt worden, daß jede höhere Gleichung ſo viel Würzeln habe, als der höchſte Exponent der geſuchten Gröſſe 1 enthält, daß aber gleichwohl unter dieſen Wurzeln einige, oder gar alle unmöglich ſeyn können, wie denn die Richtigkeit dieſer Sätze auch für die quadratiſche Gleichung ſchon bekannt und erwieſen iſt. Die eben gefundne Gleichung ſteigt auf die vierte Ordnung, und giebt deswegen vier verſchiedne Werthe für γ, wovon der Natur der Sache nach einer möglich ſeyn muß. Aber die Algebra lehrt, daß eine Gleichung, wovon der höchſte Exponent eine grade Zahl iſt, wenigſtens zwey mögliche Wurzeln habe, wenn ſie nicht alle unmöglich ſind, alſo wird die gefundene Gleichung wenigſtens zwey mögliche Werthe für γ geben, wovon aber nur derjenige der geſuchte iſt, welcher zwiſchen den Grenzen $\frac{c\tang\vartheta}{a}$, und $\frac{c\tang\vartheta}{b}$ enthalten iſt. Denn die Vergleichung mit dem 201 §. ergiebt, daß gegen die hintere Fläche ſchon ein Druck entſtehe, wenn $\gamma > \frac{c\tang\vartheta}{a}$ wird, und daß die Vorderfläche vom Windſtoß gar nichts mehr leiden könne, wenn $\gamma > \frac{c\tang\vartheta}{b}$ iſt. Hier iſt hinlänglich, dieſe beyden Grenzen zu kennen, und deswegen werde ich mit fernerer Auflöſung der biquadratiſchen Gleichung mich jetzt noch nicht beſchäftigen, ich wollte nur zeigen, wie die Rechnung geführt werden müſte, um das γ genau zu finden, wobey die Würkung des Windſtoſſes auf der Fläche völlig

aufhört. Unten im 225 §. werde ich dieſe Unterſuchung weiter brauchen.

205 §.

Diejenige Winkelgeſchwindigkeit zu finden, wobey das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen den Flügel am gröſten wird; vorausgeſetzt, daß die Geſchwindigkeit des Windes, die Abmeſſungen des Flügels, und die Neigung ſeiner Ebene gegen die Umlaufsaxe gegeben ſind.

Aufl. Es iſt gewiß, daß es einen ſolchen Werth geben muß, der ſtatt γ geſetzt für das mechaniſche Moment des Windſtoſſes, welches im 199 §. M hieß, einen gröſten Werth giebt. Um dieſen Werth von γ zu finden, kan man dem 343 §. Mech. gemäß $dM = 0$ ſetzen, und aus dieſer Gleichung den Werth von γ ſuchen. Die Rechnung giebt

$$(Pc^2 \tang\vartheta^2 - 2Qc\gamma \tang\vartheta + R\gamma^2)d\gamma + \gamma d\gamma(2R\gamma - 2Qc\tang\vartheta) = 0$$

oder $3R\gamma^2 - 4Qc\tang\vartheta.\gamma = - Pc^2\tang\vartheta^2$, daraus folgt $\gamma^2 - \frac{4Qc\tang\vartheta}{3R}\gamma = - \frac{Pc^2\tang\vartheta^2}{3R}$

und $\gamma = \frac{2Qc\tang\vartheta \pm c\tang\vartheta\sqrt{(4Q^2 - 3PR)}}{3R}$.

Von dieſen Wurzeln iſt nur diejenige brauchbar, welche kleiner iſt, als $\frac{c\tang\vartheta}{a}$, denn die bisherigen Schlüſſe ergeben, daß derjenige Effect des Windſtoſſes, wovon hier eigentlich die Rede iſt, alsdenn ſchon gewiß anfange abzunehmen, wenn γ die Grenze $\frac{c\tang\vartheta}{a}$ zu übertreffen anfängt.

Damit man dies deſto leichter überſehen könne, ſetze man $\frac{c \tang \vartheta}{a\gamma} = z$, ſo hat man $\gamma = \frac{c \tang \vartheta}{az}$. Weil nun γ die Grenze $\frac{c \tang \vartheta}{a}$ nicht übertreffen, oder $a\gamma$ nicht gröſſer, als $c \tang \vartheta$ ſeyn muß, ſo muß auch z nicht kleiner als 1, oder $\frac{1}{z}$ nicht gröſſer als 1 ſeyn. Wird nun der Werth $a\gamma z$ ſtatt $c \tang \vartheta$ in die gefundene Gleichung $Pc^2 \tang \vartheta^2 - 4Qc \tang \vartheta . \gamma + 3R\gamma^2 = 0$ geſetzt; ſo verwandelt ſie ſich in folgende $Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R = 0$, und dieſe giebt das vortheilhafteſte Verhältniß z eben ſo wie vorhin. Es wird nemlich $3R . \frac{1}{z^2} - 4Qa . \frac{1}{z} = - Pa^2$, alſo $\frac{1}{z^2} - \frac{4Qa}{3R} . \frac{1}{z} = - \frac{Pa^2}{3R}$, und $\frac{1}{z} = \frac{2Qa \pm a\sqrt{(4Q^2 - 3P.R)}}{3R}$, woraus derſelbe Werth wie vorhin für γ folgt, wenn man $\frac{a\gamma}{c \tang \vartheta}$ ſtatt $\frac{1}{z}$ ſchreibt.

Dieſelbe Gleichung giebt auch $z^2 - \frac{4Q}{Pa} z = - 3R$, alſo $z = \frac{2Q \pm \sqrt{(4Q^2 - 3P.R)}}{Pa}$. Vorhin war $z = \frac{3R}{2Qa \pm a\sqrt{(4Q^2 - 3P.R)}}$,

und

und daß beyde Werthe gleich groß ſind, ſiehet man gleich, wenn man nur bemerkt, daß die Wurzelgröſſe in dem einen Ausdruck das Zeichen (+) erfordere, wenn in dem andern das Zeichen (—) gebraucht wird.

In dem beſondern Fall, wenn der Flügel ein Rechteck iſt, hat man aus dem 200 §.

$Q = \frac{1}{3}e(a^3 - b^3)$, und $R = \frac{1}{4}e(a^4 - b^4)$.

Ferner iſt $P = \frac{1}{2}e(a^2 - b^2)$, alſo wird

$3P.R = \frac{3}{8}e^2(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = \frac{3}{8}e^2(a-b)^2(a+b)^2 (a^2 + b^2)$; und

$4Q^2 = \frac{4}{9}e^2(a^3 - b^3)^2 = \frac{4}{9}e^2(a-b)^2(a^2 + ab + b^2)^2$;

folglich $\sqrt{(4Q^2 - 3PR)} =$

$e(a-b(\sqrt{(\frac{4}{9}(a^2 + ab + b^2)^2 - \frac{3}{8}(a+b)^2(a^2+b^2))}$:

was nun unter der Wurzelgröſſe ſteht, findet man $= \frac{5}{72}a^4 + \frac{10}{72}a^3b + \frac{42}{72}a^2b^2 + \frac{10}{72}ab^3 + \frac{5}{72}b^4$, wo man auch alle Brüche im Zehler und Nenner mit 2 multipliciren kan, damit der Nenner eine Quadratzahl werde. Dieſe Werthe ſetze man in die

Gleichung $\gamma = \frac{c\tan g\vartheta}{3R}(2Q \pm \sqrt{(4Q^2 - 3P.R)}$,

ſo findet man $\gamma = \frac{4c\tan g\vartheta}{3(a^4 - b^4)}(\frac{2}{3}(a^3 - b^3) - \frac{1}{12}(a-b)$

$\sqrt{(10a^4 + 20a^3b + 84a^2b^2 + 20ab^3 + 10b^4)}$.

Setzt man alſo um abzukürzen die Wurzelgröſſe $= r$, und dividirt im Zehler und Nenner durch $a - b$, ſo hat man

$$\gamma = \frac{c\tan g\vartheta\,(8(a^2 + ab + b^2) - r)}{9(a^2 + b^2)(a+b)},$$

oder $$z = \frac{9(a^2 + b^2)(a+b)}{8a(a^2 + ab + b^2) - ar}.$$

 Wofern

Wofern b gegen a ſo klein iſt, daß der Bruch $\frac{b}{a}$ als unbeträchtlich angeſehen werden kan; ſo wird

$$r = a^2\sqrt{10}, \text{ und } \gamma = \frac{c\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{a} \cdot \frac{8-\sqrt{10}}{9},$$

alſo $z = \frac{9}{8-\sqrt{10}} = 1{,}8604$, welches alles mit den Auflöſungen überein kommt, die Hr. Euler von dieſer Aufgabe gegeben hat. M. ſ. die am Ende des 196 §. ſchon angeführten Abhandlungen. In dem eben erwehnten Fall muß demnach der Schwerpunct des Flügels mit der Geſchwindigkeit $\frac{1}{2}a\gamma = \frac{8-\sqrt{10}}{18} \cdot c\,\mathrm{tang}\,\vartheta = 0{,}27 \cdot c\,\mathrm{tang}\,\vartheta$ umlaufen; und wenn alsdenn $\vartheta = 54^\circ\, 44'$ groß iſt, ſo hat man $\mathrm{tang}\,\vartheta = \sqrt{2} = 1{,}4142$, und das giebt die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit für den Schwerpunct der Flügel $\frac{1}{2}a\gamma = 0{,}382 \cdot c$.

206 §.

Eine Maſchine ſoll durch vier rechteckigte und ebene Windflügel getrieben werden, und die Neigung der Flügel gegen die Umlaufsaxe iſt feſtgeſetzt: man ſoll eine ſolche Anordnung der Maſchine angeben, wobey der Windſtoß für eine gegebene Geſchwindigkeit des Windes den gröſten Effect hat.

Aufl. Vermöge des 200 §. iſt der Effect $= 4\gamma S$

$$= 4n G.A. f\gamma \cos\vartheta^3 \left(c^2 \mathrm{tang}\,\vartheta^2 - \left(\tfrac{4}{3}a + \tfrac{2}{3}(b^2 : f)\right)\gamma c \mathrm{tg}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\gamma^2\right).$$

Weil nun $f\gamma$ die Geſchwindigkeit des Schwerpuncts der

der Flügel iſt, ſo will ich $f\gamma = \alpha$ ſetzen, und um noch mehr abzukürzen, was in $4G.A.f\gamma$ multiplicirt iſt, $= L$ annehmen, ſo iſt der Effect $= 4G.A.L.\alpha$ ſo groß, als wenn am Schwerpunct eines jeden Flügels eine Kraft $= G.A.L$ nach der Richtung der Bewegung drückte. Damit nun dieſer Effect bey der angenommenen Neigung der Flügel gegen die Umlaufsaxe am gröſten werde, muß

$$\gamma = \frac{8(a^2+ab+b^2)-r}{9(a^2+b^2)(a+b)} \cdot c\tang\vartheta \text{ ſeyn, und}$$

$$r = \sqrt{(10a^4+20a^3b+84a^2b^2+20ab^3+10b^4)}.$$

Wenn alsdenn ein Widerſtand $= K$ mit der Geſchwindigkeit β bewegt werden ſoll, ſo wird für den Beharrungsſtand der Maſchine $4G.A.L..\alpha = K.\beta$, und nachdem nun von K oder β das eine gegeben oder willkührlich angenommen wird, läſt ſich das andre vermittelſt dieſer Gleichung finden, und das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ beſtimmt die Anordnung der Maſchine wie aus den allgemeinen Gründen der Maſchinenlehre bekannt iſt. Die Umlaufszeit der Windflügel wird alsdenn $= \frac{2\pi f}{\alpha} = \frac{2\pi}{\gamma}$.

Es ſey die ganze Länge der Windruthen 10 Fuß, die Länge der Windflügel 7 Fuß, ihre Breite 4 Fuß, und ihre Neigung gegen die Umlaufsaxe $54\frac{3}{4}^{\circ}$; alſo $\tang\vartheta = \sqrt{2}$ (198 §.) und $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $a = 10$ Fuß, $b = 3$ Fuß, $e = 4$ Fuß, $(a-b)e = 28$ Qu. Fuß $= A$, $f = 6\frac{1}{2}$ Fuß. Dieſe Vorausſetzun-

 gen

gen geben $r = 492$, $\gamma = \frac{8.139 - 492}{9.1417} . c\sqrt{2} = \frac{877}{12753} . c$, und $\alpha = f\gamma = 0{,}447 . c$. Wenn alſo $c = 20$ Fuß angenommen wird, ſo findet man $\gamma = 1{,}375$; alſo $\alpha = 8{,}94$ beynahe 9 Fuß, und die Umlaufszeit $= \frac{2.3{,}1416}{1{,}375} = 4{,}57$ Sec. Ferner findet man

$c^2 \text{tang}\,\vartheta^2 = 800$	$n = \frac{\zeta}{4g} = \frac{1}{60{,}4}$ (212§.)
$\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\gamma^2 = 103$	
Summe 903	$\text{coſ}\,\vartheta^3 = \frac{1}{9}\sqrt{3} = 0{,}1924502$
$\left(\frac{4}{3}a + \frac{2b^2}{3f}\right)\gamma \text{ctg}\,\vartheta = 554{,}7$	$n\,\text{coſ}\,\vartheta^3 = 0{,}0031862$
Reſt ... 348,3	

Dies in 348,3 multiplicirt giebt L = 1,11 Fuß. Will man nun die Luft 800mahl leichter als Waſſer annehmen, ſo wird $G = \frac{7}{80}$ Pf., und die Kraft am Schwerpunct eines Flügels iſt $= G.A.L = \frac{7}{80} . 28 . L = \frac{49}{20} . L = 2{,}45 . L = 2{,}72$ Pf., folglich für alle 4 Flügel zuſammen = 10,88 Pf. Den möglichſt gröſten Effect giebt alſo die Zahl $10{,}88 . 8{,}94 = 97{,}3$.

Bey dieſer Rechnung wird man vermuthlich für ſich ſchon die Anmerkung gemacht haben, daß es eine ziemlich unnöthige Mühe ſeyn dürfte, für eine angenommene Geſchwindigkeit des Windes die vortheilhafteſte Anordnung einer ſolchen Maſchine zu ſuchen, weil dieſe Geſchwindigkeit ganz ungemein veränderlich iſt. Wenn man indeſſen die Maſchine der mittleren Geſchwindigkeit des Windes, die ohngefehr 25 Fuß in einer Secunde betragen dürfte, gemäß

gemäß einrichtet, ſo kan man doch verſichert ſeyn, daß bey nicht ſehr viel gröſſerer, oder geringerer Geſchwindigkeit des Windes die Maſchine noch immer gute Dienſte thun werde. Man könnte auch wohl die Anordnung ſo machen, daß ſie ſich den Abwechſelungen in der Geſchwindigkeit des Windes gemäß verändern lieſſe, wie auch würklich zum Theil ſchon in Uebung gekommen iſt. Jetzt aber iſt noch zu unterſuchen übrig, wie groß die Neigung der Flügel gegen die Umlaufsaxe ſeyn müſſe, wenn die Einrichtung in aller Abſicht die vortheilhafteſte ſeyn ſoll; denn die im 198 §. gefundene Neigung darf man nicht ſchlechthin für die vortheilhafteſte halten, wie eben daſelbſt ſchon zur Genüge iſt erinnert worden.

207 §.

Denjenigen Neigungswinkel des Windflügels gegen die Umlaufs-Axe zu finden, wobey das mechaniſche Moment des Windſtoſſes bey gegebener Geſchwindigkeit des Windes und gegebener Umlaufs-Geſchwindigkeit am gröſten wird.

Aufl. Man muß aus dem 199 §. die Gleichung $M = nG\gamma \cos\vartheta^3 (Pc^2 \tan\vartheta^2 - 2Qc\gamma \tan\vartheta + R\gamma^2)$ zum Grunde legen, den Winkel ϑ allein als veränderlich betrachten, und alsdenn $dM = 0$ ſetzen, ſo erhält man eine Gleichung für den geſuchten Neigungswinkel. Die Rechnung giebt

$$\left(Pc^2 \cdot \frac{2\,\mathrm{tg}.\vartheta}{\cos\vartheta^2} - 2Qc\gamma \cdot \frac{1}{\cos\vartheta^2}\right)\cos\vartheta^3$$
$$- 3(Pc^2\,\mathrm{tg}.\vartheta^2 - 2Qc\gamma\,\mathrm{tg}.\vartheta + R\gamma^2)\cos\vartheta^2 \sin\vartheta = 0.$$

Man dividire mit $\cos\vartheta$, und nehme die geſetzten Zei-

chen,

chen, ſo erhält man $3(Pc^2 \tang\vartheta^2 - 2Qc\gamma \tang\vartheta + R\gamma^2)\cos\vartheta \sin\vartheta - 2Pc^2 \tang\vartheta + 2Qc\gamma = 0$. Die beyden letzten Glieder multiplicire man mit $\sin\vartheta^2 + \cos\vartheta^2 = 1$, und dividire alsdenn die ganze Gleichung mit $\cos\vartheta^2$, ſo wird $Pc^2 \text{tg.}\vartheta^3 - 4Qc\gamma \text{tg.}\vartheta^2 + (3R\gamma^2 - 2Pc^2) \text{tg.}\vartheta + 2Qc\gamma = 0$, oder $\tang\vartheta^3 - \frac{4Q\gamma}{Pc} \text{tg.}\vartheta^2 + \frac{3R\gamma^2 - 2Pc^2}{Pc^2} \text{tg.}\vartheta + \frac{2Q\gamma}{Pc} = 0.$ Ob nun gleich dieſe Gleichung cubiſch iſt, ſo hat man doch nicht nöthig, ihre Wurzeln zu ſuchen, wenn man nicht γ ſelbſt ganz willkührlich annimmt; ſondern ſtatt deſſen das Verhältniß $\frac{c \sin\vartheta}{a\gamma \cos\vartheta} = \frac{c \text{tg.}\vartheta}{a\gamma}$. Man weiß, daß $c \sin\vartheta$ und $a\gamma \cos\vartheta$ die Geſchwindigkeiten des Windes und des äuſſerſten Endes vom Windflügel ſind nach der ſenkrechten Richtung auf dem Flügel genommen, und daß $c \sin\vartheta$ nicht kleiner als $a\gamma \cos\vartheta$, alſo $c \tang\vartheta$ nicht kleiner als $a\gamma$, folglich $\frac{c \tang\vartheta}{a\gamma}$ nicht kleiner als 1 ſeyn müſſe. Dividirt man die gefundene cubiſche Gleichung durch $\gamma\gamma$, ſo findet man $\left(P . \frac{cc \text{tg.}\vartheta^2}{\gamma\gamma} - 4Q . \frac{c \text{tg.}\vartheta}{\gamma} + 3R\right) \text{tg.}\vartheta = 2P . \frac{c^2 \text{tg.}\vartheta}{\gamma\gamma} - 2Q . \frac{c}{\gamma}$. Nun ſey, wie im 205 §, $\frac{c \tang\vartheta}{a\gamma} = z$, ſo iſt $\frac{cc \text{tg.}\vartheta^2}{\gamma\gamma} = a^2 z^2$, $\frac{c^2 \text{tg.}\vartheta}{\gamma\gamma} = \frac{a^2 z^2}{\text{tg.}\vartheta}$, und $\frac{c}{\gamma} = \frac{az}{\text{tg.}\vartheta}$;

folg-

folglich erhält man $(Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R) \times \tang\vartheta$

$$= \frac{2Pa^2z^2}{tg.\vartheta} - \frac{2Qaz}{tg.\vartheta},$$ und es wird $tg\vartheta =$

$$\sqrt{\frac{2Pa^2z^2 - 2Qaz}{Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R}}.$$ Iſt nun z willkührlich, und zwar nicht kleiner als 1 angenommen, ſo beſtimmt dieſe Gleichung $\tang\vartheta$, und daher giebt ſich denn auch $y = \frac{c\,tang\vartheta}{az}$.

Bevor man dieſe Formul anwendet, iſt es nöthig, folgende vorläufige Betrachtungen darüber anzuſtellen. Es iſt $aP = a\int xydx = \int axydx$, und $Q = \int x^2ydx$. Weil nun in beyden Formuln a der gröſte Werth iſt, der ſtatt x geſetzt wird, ſo ſiehet man wohl, daß allemahl $ax > xx$, folglich $\int axydx > \int x^2ydx$, d. i. $Pa > Q$ ſey. Ferner iſt $Qa = \int ax^2ydx$, und $R = \int x^3ydx$; weil nun allemahl $ax^2 > x^3$ bleibt, ſo iſt auch $Qa > R$. Demnach iſt ſowohl $Pa - Q$ als auch $Paz - Q$ eine poſitive Gröſſe, wenn $z > 1$ angenommen wird, und der Zähler des Bruchs, welcher $\tang\vartheta^2$ ausdrückt, iſt allemahl poſitiv. Ob der Nenner ebenfalls poſitiv ausfalle, ſolches richtet ſich nach dem Werth, der ſtatt z geſetzt wird. Es iſt nemlich vermöge des erwieſenen $Pa^2z^2 > Qaz$, und $3R < 3Qaz$, alſo läſt ſich nicht überhaupt ſagen, ob $Pa^2z^2 + 3R$ gröſſer oder kleiner als $4Qaz$ ſeyn werde: im letzten Fall würde $\tang\vartheta$ unmöglich werden.

Weil übrigens der Ausdruck für das mechaniſche Moment des Windſtoſſes (199 §.) ſowohl von y als auch von ϑ abhängt, ſo muß man eigentlich ſuchen,

chen, wie groß γ ſowohl, als auch ϑ ſeyn müſſen, damit dies Moment am gröſten werde: alsdenn allererſt läſt ſich für jede Geſchwindigkeit des Windes eine ſolche Anordnung der Maſchine, die durch Windflügel getrieben werden ſoll, angeben, die unter allen am vortheilhafteſten iſt. Das wird nun die folgende Aufgabe umſtändlicher ergeben.

208 §.

Der Windflügel iſt, wie bisher allemahl angenommen worden, eine ebene Fläche, und der Wind ſtößt parallel mit der Umlaufsaxe dagegen: man ſucht, wie groß ſowohl die Umlaufsgeſchwindigkeit, als auch der Neigungswinkel des Flügels gegen die Axe ſeyn muß, damit das Bewegungsmoment am gröſten werde.

Aufl. Das vortheilhafteſte Verhältniß $\frac{c\,\text{tang}\,\vartheta}{a\gamma} = z$ giebt die Gleichung I) $Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R = 0$, (205 §.) und den vortheilhafteſten Winkel ϑ beſtimmt die Gleichung

$$\text{II) tang}\,\vartheta = \sqrt{\frac{2(Pa^2z^2 - Qaz)}{Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R}} \quad (207\ \S.)$$

Nun müſte man den Werth von z, welchen die erſte Gleichung giebt, in der zweyten gebrauchen, um den vortheilhafteſten Winkel ϑ zu finden: aber man überſiehet ohne alle weitere Rechnung, daß der vortheilhafteſte Werth von z den Werth tang ϑ unendlich groß, alſo $\vartheta = 90°$ giebt, weil z ſo genommen werden muß, daß der Nenner $Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R = 0$ wird.

Ob es nun gleich ſeine ungezweifelte Richtigkeit hat, daß der Werth $\vartheta = 90°$ das gröſte mechaniſche Moment geben würde, ſo kan man doch dieſer Rechnung in der Ausübung kein Genüge leiſten. Denn einmahl müſte alsdenn die Umlaufsgeſchwindigkeit $\gamma = \frac{c \tang \vartheta}{az}$ entweder unendlich groß ſeyn, oder auch, wenn γ endlich bleiben ſollte, die Länge des Flügels a, welches beydes nicht in Ausübung gebracht werden kann. Ja es iſt auch noch aus einer andern Urſache nicht allemahl thunlich, $\tang \vartheta$ ſehr groß anzunehmen, und mithin der Maſchine eine ſehr ſchnelle Umlaufsbewegung zu geben: man müſte denn eine ſolche Schnelligkeit der Umlaufsbewegung allein zur Abſicht haben, ohne daß die Maſchine einen erheblichen Widerſtand überwinden ſollte. Je gröſſer ϑ und folglich γ angenommen wird, deſto kleiner wird das ſtatiſche Moment des Windſtoſſes $S = nGA(fc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta - 2k^2 c\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta^2 + h^3\gamma^2 \cos\vartheta^3)$ (199 §.) und es verſchwindet gänzlich, wenn $\vartheta = 90°$ angenommen wird, geſetzt daß auch γ unendlich groß wäre. Setzt man nemlich $\gamma = \frac{c \tang \vartheta}{az}$, ſo wird $S = \frac{nGAc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{a^2 z^2} \times (fa^2 z^2 - 2k^2 az + h^3)$, und dieſer Ausdruck verſchwindet, wenn $\vartheta = 90°$ iſt. Das mechaniſche Moment iſt dagegen $= \frac{nGAc^3 \sin\vartheta^3}{a^3 z^3}(fa^2 z^2 - 2k^2 az + h^3)$; daſſelbe wächſt mit ϑ, und iſt augenſcheinlich am gröſten, wenn $\vartheta = 90°$ wird. Eben dieſer Ausdruck, der den bisher gebrauchten Bezeich-

zeichnungen gemäß mit dem folgenden $\frac{nGc^3 \sin\vartheta^3}{a^3 z^3}(Pa^2z^2 - 2Qaz + R)$ einerley iſt, wird bey einerley Winkel ϑ am gröſten, wenn z aus der Gleichung $Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R = 0$ beſtimmt wird, und daraus folgt $Pa^2z^2 - 2Qaz + R = 2Qaz - 2R$, da dann das mechaniſche Moment $M = \frac{2nGc^3 \sin\vartheta^3}{a^3 z^3}(Qaz - R)$ gefunden wird, und das ſtatiſche Moment $S = \frac{2nGc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{a^2 z^2}(Qaz - R)$.

Je gröſſer demnach ϑ den übrigen Umſtänden gemäß angenommen werden kan, deſto gröſſer wird das Moment M ausfallen, und die Grenze, welche man in der Ausübung eigentlich nicht erreichen kan, iſt $= \frac{2nGc^3}{a^3 z^3}(Qaz - R)$.

Noch iſt zu bemerken, daß das ſtatiſche Moment $S = \frac{nGc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{a^2 z^2} \times (Pa^2z^2 - 2Qaz + R)$, wenn der Flügel umläuft, kleiner ſey, als im Anfang der Bewegung. So lange nemlich $y = 0$ iſt, hat man $z = \infty$, alſo $S = n \,.\, G \,.\, Pc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta$; und weil $aQ > R$ (207 §.) und $z > 1$ iſt, ſo hat man auch $Qaz > R$, und es iſt $R - 2Qaz$ negativ, folglich $Pa^2z^2 - 2Qaz + R < Pa^2z^2$, oder $\frac{Pa^2z^2 - 2Qaz + R}{a^2z^2} < P$.

209 §.

Eine Maſchine, die durch vier ebene Windflügel getrieben werden ſoll, vortheilhaft anzuordnen.

Aufl.

Aufl. Es ſey K der Widerſtand, welcher im Beharrungsſtande der Maſchine in der Zeit t den Weg $= s$ zurück legen ſoll, und die Umlaufszeit der Windflügel ſey $= \Theta$, ſo iſt $\Theta = \frac{2\pi}{\gamma}$. Wenn demnach γ und t bekannt ſind, ſo hat man das Verhältniß $\frac{\Theta}{t}$, welches die Anordnung der Maſchine beſtimmt. Das mechaniſche Moment des Widerſtandes wäre nun $K.\frac{s}{t}$, wegen der Friction aber, die man beſonders berechnen muß, läſt ſich die Sache ſo betrachten, als wenn der eigentliche Widerſtand K, den die Maſchine überwinden ſoll, noch um ein gewiſſes Stück $= k$ gröſſer wäre, da dann nach dem allgemeinen Grundſatz der Maſchinenlehre

$$\frac{4nGc^3\sin\vartheta^3}{a^3z^3}(Pa^2z^2-2Qaz+R)=(K+k)\frac{s}{t}$$

ſeyn muß; und damit der Effect der möglichſt gröſte werde, beſtimmt man z aus der Gleichung $Pa^2z^2-4Qaz+3R=0$ (205 §.). Wird dieſer Werth von z gebraucht, ſo iſt

$$\frac{2.4nGc^3\sin\vartheta^3}{a^3z^3}(Qaz-R)=(K+k).\frac{s}{t}.$$

Ferner iſt $\frac{c\sin\vartheta}{az}=\gamma\cos\vartheta$, und wenn man $f\gamma = \alpha$ annimmt, ſo wird $\frac{c\sin\vartheta}{az}=\frac{\alpha\cos\vartheta}{f}$, und man erhält $\frac{8nGc^2\sin\vartheta^3\cos\vartheta.\alpha}{fa^2z^2}(Qaz-R)=$

$(K+k) \cdot \frac{s}{t}$. Deswegen läſt ſich die Sache ſo betrachten, als wenn am Schwerpunct eines Flügels nach der Richtung ſeiner Bewegung, oder am Umfang eines Rades, deſſen Halbmeſſer $= f$, eine Kraft $F = \frac{8nGc^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{fa^2z^2}(Qaz - R)$ angebracht wäre, und wenn alsdenn $\frac{s}{t} = \beta$ geſetzt wird, ſo hat man $F\alpha = (K+k)\beta$, und $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{K+k}{F}$, welches die Anordnung der Maſchine beſtimmt. Will man die Umlaufszeit Θ in Rechnung bringen, ſo hat man $\frac{F \cdot 2\pi f}{\Theta} = \frac{(K+k)s}{t}$, und es wird $\frac{\Theta}{t} = \frac{F \cdot 2\pi f}{(K+k)s}$, da dann dieſe Gleichung auch ſtatt der vorigen, die Anordnung der Maſchine zu finden dient. Uebrigens iſt ſchon bekannt, daß z nicht kleiner als 1 ſeyn, und ϑ ſo groß genommen werden müſſe, als die Umſtände es zulaſſen.

Bey dieſer Aufgabe bleiben nun, wie bey andern ähnlichen Aufgaben in der Maſchinenlehre, verſchiedene Gröſſen übrig, die man entweder willkührlich annehmen kan, oder durch andre Gründe beſtimmt werden. Demnach wird es am beſten ſeyn, folgende zwey Fälle zu unterſcheiden. Es iſt 1.) entweder die Geſtalt und Gröſſe der Flügel ſchon feſtgeſetzt, und man ſucht die übrige Anordnung, oder es iſt 2.) die zu bewegende Laſt und ihre Geſchwindigkeit gegeben, und man ſoll eine Anordnung ſuchen,

welche beyden Stücken angemeſſen iſt. Die Geſchwindigkeit des Windes muß man in allen Fällen als gegeben anſehen, und weil die ganze Anordnung davon abhängt, ſo ſiehet man wohl, daß es nicht möglich ſey, eine ſolche Einrichtung der Maſchine ausfindig zu machen, die bey Winden von verſchiedener Stärke einerley Dienſte leiſte. Die Unbeſtändigkeit des Windes gehet ſo weit, daß man zuweilen vielleicht keine Minute lang auf völlig einerley Geſchwindigkeit deſſelben Rechnung machen kan. Bey einem ſtehenden Winde iſt indeſſen die Geſchwindigkeit in der folgenden Minute wieder ſtärker, wenn ſie gleich kurz vorher etwas ſchwächer war, und dies durch einander gerechnet, weil beſtändig ſtärkere und ſchwächere Stöſſe mit einander abwechſeln, wird es eine mittlere Geſchwindigkeit des Windes geben, die oft verſchiedene Tage nach einander unverändert bleibt. Damit nun die Gleichförmigkeit des Umlaufs durch die beſtändige Abwechſelung ſtärkerer und ſchwächerer Stöſſe ſo wenig als möglich geſtört werde, muß man bey Anordnung der Maſchine ſich folgende Maxime empfohlen ſeyn laſſen. **Die Wind-Flügel müſſen ſo ſchnell umlaufen, als andre ſonſt damit verbundene Schwierigkeiten verſtatten:** auf ſolche Art bekommen ſie zugleich die Natur der Schwungflügel, und erhalten ſo ziemlich die Gleichförmigkeit des Ganges, wenn gleich die Windſtöſſe an Stärke abwechſeln. Demnach hat man dahin zu ſehen, daß Θ nicht zu groß ausfalle, und eben deswegen muß γ nicht zu klein ſeyn. Wenn aber $z = \frac{c \tang \vartheta}{a\gamma}$

 be-

beſtimmt iſt, ſo wird γ deſto gröſſer, je gröſſer man ϑ nimmt: demnach ſtimmt dieſe Maxime ſehr wohl mit der aus den Formuln geſchloſſenen Regel überein, daß ϑ dem rechten Winkel ſo nahe kommen müſſe, als die übrigen Umſtände zulaſſen. In allen Fällen iſt es alſo am rathſamſten, $\Theta = \frac{2\pi}{\gamma}$ willkührlich anzunehmen: dies beſtimmt γ und zugleich ϑ, wenn z gefunden iſt.

I.) Es ſey nun die Geſtalt und Gröſſe der Flügel gegeben, ſo wird zuerſt erfordert, daß man $z = \frac{3R}{2Qa - a\sqrt{(4Q^2 - 3R)}}$ (205 §.) ſuche, und wofern dies einen unmöglichen Werth geben ſollte, ſo müſte man $z = 1$ annehmen. Hiernächſt nehme man Θ willkührlich an: wobey denn zu bemerken iſt, daß bey kleinen Flügeln von 10 bis 20 Fuß Länge die Zeit Θ zwiſchen 1 und 2 Secunden fallen könne; bey längern Flügeln von 20 bis 40 Fuß zwiſchen 2 und 4 Secunden. Hiedurch iſt nun $\gamma = \frac{2\pi}{\Theta}$, $\tang \vartheta = \frac{a\gamma z}{c}$, folglich auch das mechaniſche Moment $Ff\gamma$, oder $F\alpha = (K+k)\beta$ beſtimmt. Gewöhnlich iſt auch t gegeben, alſo iſt $\frac{\Theta}{t}$ beſtimmt; und weil $\Theta = \frac{2\pi f}{\alpha}$, $t = \frac{s}{\beta}$, ſo iſt $\frac{\Theta}{t} = \frac{2\pi f\beta}{s\alpha}$; und $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\pi f t}{s\Theta}$ iſt ebenfalls beſtimmt, wenn s beſtimmt

beſtimmt iſt, woraus alsdenn $K+k=\frac{F\alpha}{\beta}$ gefunden wird. Dies Reſultat wird nun ausweiſen, ob K ſo groß ausfalle, daß man davon zufrieden ſeyn könne: widrigenfalls muß entweder β kleiner angenommen werden, oder wofern dies nicht verſtattet iſt, ſo muß man die Fläche der Flügel vergröſſern. Darf man s ziemlich klein, und dagegen t etwas groß annehmen, ſo kan man dadurch $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\pi ft}{s\Theta}$, folglich auch K ziemlich vergröſſern, ohne die Fläche der Flügel zu ändern. Wofern aber K, s und t, oder K und β gegeben ſind, ſo läſt ſich das übrige ſo finden.

2.) Weil man es ſchon zum voraus abſehen kan, ob man ſehr lange und groſſe Flügel oder nur mittelmäßige Flügel nöthig haben wird, ſo nehme man Θ ſo an, damit der Schwung nicht gar zu ſtark werde: alsdenn hat man $\gamma=\frac{2\pi}{\Theta}$, und in der Gleichung $\tang\vartheta=\frac{az\gamma}{c}$ ſind noch z und ϑ unbeſtimmt. Wenn ich nun Kürze halber K ſtatt K+k ſchreibe, weil es ſich von ſelbſt verſteht, daß der Widerſtand der Friction als ein Theil von K betrachtet werden muß; ſo hat man

$$\sin\vartheta^3=\frac{a^3z^3.K\beta}{4nGc^3(Pa^2z^2-2Qaz+R)}.$$

Weil ferner $\cot\vartheta=\frac{c}{az\gamma}$, alſo $\operatorname{cosec}\vartheta=\surd(1+\cot\vartheta^2)$

 =

$= \sqrt{\frac{c^2 + a^2 z^2 \gamma^2}{a^2 z^2 \gamma^2}}$, ſo wird auch $\sin\vartheta =$

$\frac{az\gamma}{\sqrt{(c^2 + a^2 z^2 \gamma^2)}}$, und $\sin\vartheta^3 = \frac{a^3 z^3 \gamma^3}{(c^2 + a^2 z^2 \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Beyde Werthe von $\sin\vartheta^3$ gleich geſetzt, geben die Gleichung $4nGc^3\gamma^3(Pa^2z^2 - 2Qaz + R) = K\beta(c^2 + a^2z^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}$; und hiezu kommt noch die Gleichung $Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R = 0$, welche mit der vorigen verbunden werden muß.

Wenn nun die Flügel, wie gewöhnlich, Rechtecke ſind, ſo kan man anfangs ihre Länge a nebſt dem Abſtand b ihrer unterſten Sproſſe von der Umlaufs-Axe willkührlich annehmen, ſo wird dadurch $z = \frac{3R}{2Qa - a\sqrt{(4Q^2 - 3P.R)}}$ beſtimmt, und dieſer Ausdruck hängt von der Breite der Flügel nicht ab. Dieſer Werth von z in der andern Gleichung gebraucht, giebt $2.4nGc^3\gamma^3(Qaz - R) = K\beta(c^2 + a^2z^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}$: und wenn die Breite der Flügel $= e$, das Integral $\int x^2 dx = q$, und $\int x^3 dx = r$ geſetzt wird; ſo hat man $Q = e.q$ und $R = e.r$; alſo findet man $e = \frac{K\beta(c^2 + a^2z^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{8nGc^3\gamma^3(qaz - r)}$. Wofern e ſo groß ausfallen ſollte, daß man die Flügel nicht wohl ſo breit machen könnte, ſo muß man a gröſſer annehmen, und die Rechnung wiederholen, bis man einen brauchbaren Werth für e findet.

210 §.

Ich habe bey Aufloͤſung dieſer Aufgabe erinnert, daß man in den Formuln $(K+k)\beta$ ſtatt $K\beta$ ſchreiben muͤſſe, wenn man auf die Friction Ruͤckſicht nehmen will, da dann K die Laſt bedeutet, welche die Maſchine eigentlich mit der Geſchwindigkeit β bewegen ſoll, $k\beta$ aber das geſamte Moment der Friction fuͤr alle Theile der Maſchine bedeutet. Im 578 und folg. §§. der Hydraul. findet man Muſter, wie man ſich bey der Rechnung verhalten muß, wenn man auf die Friction Ruͤckſicht nehmen will. Ich habe angenommen, wenn $F\alpha$ das moͤglichſt groͤſte Moment des Windſtoſſes bezeichnet, ſo muͤſſe $F\alpha = K\beta + k\beta$ ſeyn, oder $F\alpha = K\beta + \varphi\alpha$, wenn $\varphi = \frac{k\beta}{\alpha}$ angenommen wird, wie im 320 §. Hydraul. Uebrigens aber ſehe ich nicht, daß man genoͤthiget waͤre, wegen der Friction andere Aenderungen mit den bisher gefundenen Formuln fuͤr die moͤglichſt groͤſte Wuͤrkung der Windfluͤgel vorzunehmen; und es geſchicht nicht ohne vorhergegangene reifliche Ueberlegung und oft wiederholte Pruͤfung der Sache, wenn ich hier in einem Punct vom Hrn. Euler abgehe, woruͤber ich mich etwas naͤher erklaͤren muß.

Es ſey $F\alpha$ uͤberhaupt das Moment einer veraͤnderlichen Kraft, die von α abhaͤngt, ohne daß man jetzt eben das Moment des Windſtoſſes verſteht: ſo hat es ſeine voͤllige Richtigkeit, daß der eigentliche Effect der Maſchine $K\beta$, welcher gewoͤhnlich als der Effect nur betrachtet wird, nicht von dem ganzen Moment der Kraft $F\alpha$, ſondern von dem Theil $F\alpha - \varphi\alpha$, oder $F\alpha - k\beta$ hervorgebracht werde. Dar-

aus zieht Hr. Euler die Folge: wenn demnach der gröſte Effect zuwege gebracht werden ſoll, ſo muß nicht $F\alpha$, ſondern $(F-\varphi)\alpha$ am gröſten ſeyn; (M. ſ. die Abhandlung De conſtructione aptiſſima molar. alat. §. 44. ſqq. Comm. Nov. Petrop. T. IV. p. 81. ſqq. und die Abhandlung Recherches plus exactes ſur l'effet des moulins a vent §. LVI. Hiſtoire de l'Acad. de Berlin A. 1756. p. 201 ſqq.) allein ich finde nicht, daß jener Satz auf dieſe Folge leite. Iſt $K\beta$ dasjenige, was man eigentlich als den Effect der Maſchine anſiehet, ſo iſt $k\beta$ ein zweyter Effect, den ein Theil des Moments der Kraft $=\varphi\alpha$ hervorbringt, ſo wie der übrige Theil $F\alpha-\varphi\alpha$ den Effect $K\beta$ hervorbringt. Der ganze Effect $K\beta+k\beta$ iſt und bleibt $=F\alpha$, und damit dieſer ganze Effect am gröſten werde, muß $F\alpha$ am gröſten ſeyn. Nun iſt es was anders, wenn man frägt: wie muß man es machen, daß derjenige Theil $K\beta$, welcher gewöhnlich nur als der Effect betrachtet wird, ſo groß als möglich werde? Die Antwort iſt: gröſſer als $F\alpha$ kan er nicht werden, (vorausgeſetzt, daß $F\alpha$ am gröſten ſey,) er wird aber deſto gröſſer, je kleiner der andre Theil des Effects $k\beta$ iſt; vermindere demnach ſo viel möglich die Friction.

Es ſcheinet, daß Hr. Euler durch eine kleine Zweydeutigkeit der Frage: wie muß man eine Maſchine anordnen, damit ihr Effect am gröſten werde? veranlaſſet ſey, auf die vorhin erwehnte Folge zu verfallen. Ihr Effect, die Friction mit inbegriffen, iſt dem Moment der Kraft gleich, welche die Maſchine treibt, und dies Moment der Kraft hängt von der Geſchwindigkeit der-

jenigen Stellen der Maſchine ab, welche die Kraft unmittelbar angreift. Demnach verwandelt ſich die Frage in folgende: mit welcher Geſchwindigkeit müſſen ſich die angegriffenen Stellen der Maſchine bewegen, damit das mechaniſche Moment der Kraft am gröſten werde. Dies Moment hängt weiter nicht von der Friction ab, als es von der eigentlich ſogenannten Laſt ſelbſt abhängt. Sind Laſt und Friction zuſammen zu groß oder zu klein, ſo wird die Geſchwindigkeit der angegriffenen Stellen der Maſchine im erſten Fall zu klein, im andern Fall zu groß, als daß $F\alpha$ am gröſten ſeyn könnte, und eben deswegen iſt nun der geſammte Effect $K\beta + k\beta$ auch nicht ſo groß, als er ſeyn würde, wenn Laſt und Friction zuſammen die rechte Gröſſe hätten. Ich glaube, daß mich dieſe Gründe hinlänglich rechtfertigen, wenn ich bey Berechnung des Effects der Windflügel, und beſonders auch bey Berechnung ihres möglichſt gröſten Effects weiter nicht auf die Friction ſehe, als in wie fern ſie die Laſt oder den Widerſtand vergröſſert, den die Maſchine überwinden ſoll: man müſte ſonſt, wie man leicht ſiehet, bey Waſſerrädern auch ſo verfahren, wie Hr. Euler bey den Windflügeln verfährt, und weil bey denſelben die Formuln kurz und leicht zu überſehen ſind, ſo fällt es dabey am erſten in die Augen, daß man des rechten Weges auf dieſe Art verfehlen würde. Man nehme im 113 §. Hydraul. die Winkel ϑ und $\eta = 90°$ an, und differentiire die Formul $\frac{k\gamma yy}{4g}(C-c)^2 c - \varphi c$, wo ich P ſtatt $\frac{k\gamma yy}{4g}$ ſchreiben will, ſo findet man $(C-c)^2$ —

$-2c(C-c)-\varphi:P=0$, und das giebt $c =$ $\frac{2}{3}C \pm \surd\left(\frac{\varphi}{3P}+\frac{1}{9}C^2\right)$, wo das Zeichen + gebraucht ein minimum giebt, das Zeichen − aber ein maximum. Es müſte demnach im Fall der gröſten Würkung unterſchlächtiger Räder $c < \frac{1}{3}C$ ſeyn, und wenn man $c = \frac{1}{\nu}$ dafür annimmt, ſo iſt $\nu > 3$. Der Effect wird nun $\frac{(\nu-1)^2}{\nu^3}P.C^3 - \frac{1}{\nu}\varphi C$, und wenn man ihn $= K\beta$ ſetzt, ſo iſt $\frac{(\nu-1)^2}{\nu^3}P.C^3 = K\beta + \frac{1}{\nu}\varphi.C$. Dies iſt der geſamte Effect der Maſchine, die Friction mit inbegriffen, und er iſt offenbar kleiner, als in dem Fall $\nu=3$, wo er $=\frac{4}{27}P.C^3$ ſeyn würde. Man darf auch nicht denken, daß in dem Fall $\nu=3$ das Moment der Friction mehr zu ſagen haben dürfte, als in dem Fall $\nu > 3$. Denn man kan ſtatt $\frac{1}{\nu}\varphi C$ allemahl $k.\beta$ ſetzen, das heiſt, man kan die Sache ſo betrachten, als wenn auſſer der eigentlichen Laſt K noch eine andre k mit derſelben Geſchwindigkeit β bewegt werden ſollte, und alsdenn hat man $K = \frac{(\nu-1)^2 P.C^3}{\nu^3\beta} - k$, für $\nu=3$ aber $K = \frac{4P.C^3}{27.\beta} - k$. Im letzten Fall iſt K gewiß gröſſer, als im erſten Fall, wenn β und k einerley bleiben;

ben; alſo iſt auch das, was man eigentlich Effect der Maſchine zu nennen gewohnt iſt, in dem Fall $v = 3$ gröſſer, als in dem Fall $v > 3$. Zwar wird k ein wenig mit K wachſen, weil die abſolute Gröſſe der Friction mit der Laſt wächſt; allein einmahl hat dieſe Aenderung wenig oder nichts zu bedeuten, wenn nicht K ſehr ſtark wächſt, welches hier der Fall nicht iſt; und fürs zweyte iſt das auch ein Umſtand, worauf H. Euler nicht Rückſicht nimmt, ſonſt müſte er auch φ beym differentiiren als veränderlich betrachten, in wie fern φ von der Structur der Maſchine abhängt.

211 §.

Im 206 §. iſt zum Beyſpiel der Effect eines Windrades mit vier rechteckigten Flügeln berechnet, aber der Winkel ϑ willkührlich zu $54\frac{3}{4}$ Graden angenommen worden: nunmehro kan man nach Vorſchrift des 209 §. verſuchen, ob ſich der Effect vergröſſern läſt. Es war daſelbſt

$$\gamma = \frac{8.139 - 492}{9.1417} . ctg.\vartheta = \frac{620}{9.1417} . ctang\vartheta,$$

und $a = 10$ Fuß, alſo $z = \frac{c\,tang\vartheta}{a\gamma} = \frac{9.1417}{6200} = 2{,}057$. Ferner war $b = 3$ Fuß, $e = 4$ Fuß, alſo $P = 45{,}5 . c$, $Q = 324{,}3 . c$, $R = 2479{,}7 . c$. Der Winkel $\vartheta = 54\frac{3}{4}°$ gab $\Theta = 4{,}57$ Secunden: ſtatt deſſen nehme man nun $\Theta = 2$ Secunden an, ſo wird $\gamma = \frac{2\pi}{\Theta} = 3{,}1416$, und wenn $c = 20$ Fuß bleibt, wie im 206 §, ſo hat man

tangϑ

$$\tan g\,\vartheta = \frac{za\gamma}{c} = \frac{20{,}57\cdot 3{,}1416}{20} = 3{,}2311356,$$

und $\vartheta = 71\tfrac{4}{5}^\circ$ beynahe 73°. Dies giebt $\sin\vartheta = 0{,}9552955$, und $\sin\vartheta^3 = 0{,}871792$ beynahe $= 0{,}87$; ferner wird

$$\frac{8\pi G(Qaz - R)}{a^3 z^3} = \frac{7}{4\cdot 151}\cdot\frac{4191{,}151\cdot 4}{8703{,}68}$$

$= 0{,}0223142$, und dies mit $c^3 \sin\vartheta^3 = 6960$ multiplicirt, giebt das mechaniſche Moment des Windſtoſſes $F\alpha = 155{,}3$, als den Effect der Maſchine für eine Secunde in Pfunden ausgedrückt, mit Inbegrif der Friction. Im 206 §. war der Effect $= 97{,}3$, und daſelbſt war $\vartheta = 54\tfrac{3}{4}^\circ$, $\sin\vartheta = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}816497$, alſo $\sin\vartheta^3 = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}544331$. Die Cubiczahlen 0,871792 und 0,544331 dieſer Sinus verhalten ſich wie die Effecte 155,3 und 97,3, wie der allgemeinen Formul gemäß iſt, weil z einerley Werth behalten hat, und dies beſtätiget zugleich die Richtigkeit beyder Rechnungen.

Ich habe mit Fleiß dies Beyſpiel zur Erläuterung beyder Rechnungen des 206 und 209 §. aus des H. Belidors Waſſerbaukunſt genommen, woſelbſt es im II. Cap. des III. Buchs im 857 §. vorkommt. Eben daſſelbe Beyſpiel braucht H. Schober in ſeiner oben aus dem IX. Bande des Hamb. Magazins angeführten Abhandlung im 44 und 46 §, um das fehlſame der Belidorſchen Rechnung, ſowohl nach einer von ihm vorgetragenen beſſern Theorie, als auch vermöge einiger Erfahrungen zu zeigen, die mit einer Windmühle von ohngefehr ſolchen Abmeſſungen der Flügel, wie Belidor annimmt, ſind angeſtellet

geſtellet worden. Es iſt wahr, dem Hrn. Belidor iſt ſein Vortrag der Theorie von den Windmühlen unter allen übrigen abgehandelten Sachen am wenigſten gerathen: er verfällt in Abſicht beyder Hauptpuncte, worauf es hier ankömmt, in Fehler, die man verbeſſern muß, und auch nach dem jetzigen Zuſtande der mechaniſchen Wiſſenſchaften leicht verbeſſern kan: aber dem Hrn. Belidor dieſe Fehler hoch anrechnen, wäre Undankbarkeit gegen ſeine übrigen groſſen Verdienſte. Ich werde ſie kurz anzeigen, und zugleich einiges gegen den Hrn. Schober erinnern.

212 §.

Der eine Fehler des Belidorſchen Vortrags beſtehet darin, daß er den Winkel von $54\frac{3}{4}°$ ſchlechthin als den vortheilhafteſten anpreiſet, und die deshalb nöthigen Erinnerungen ſind im 198 §. ſchon vorgekommen. Der andre Fehler beſtehet in einer ganz unrichtigen Anwendung der Parentſchen Theorie von der möglichſt gröſten Würkung des Waſſerſtoſſes gegen die Schaufeln eines unterſchlächtigen Waſſerrades (113 §. Hydraul.). Vermöge derſelben muß die Geſchwindigkeit der Schaufeln $\frac{1}{3}$ von der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers betragen: und weil die eigene Schwere der flüßigen Maſſe mit dieſer Beſtimmung nichts zu thun hat; ſo würde allerdings die Regel auch für die Schaufeln eines Windrades gelten, (wofern anders der Windſtoß wie der Waſſerſtoß dem Quadrat der Geſchwindigkeit proportional iſt,) wenn der Wind ebenfalls ſenkrecht an die Schaufeln anſtieſſe, und die

Schau-

Schaufeln mit paralleler Bewegung dem Winde ſo wie die Schaufeln des Waſſerrades dem Waſſer auswichen. Ob nun gleich H. Belidor, ſo lange vom Stoß des Windes gegen den ruhenden Flügel die Rede iſt, ganz richtig nur den ſeitwärts gehenden Druck des Windes berechnet; ſo wendet er doch im 851 §. a. a. O. die erwehnte Parentſche Regel ohne alle Einſchränkung auf die Windflügel an, und ſetzt zur Richtſchnur feſt: der Schwerpunct eines jeden Windflügels müſſe in ſeinem Kreiſe mit einer Geſchwindigkeit umlaufen, welche ein Drittel der Geſchwindigkeit des Windes betrage, wofern anders die Maſchine den möglichſt gröſten Effect leiſten ſolle. Allein es hat mit den Windflügeln eine ganz andre Bewandniß, als mit den Schaufeln eines unterſchlächtigen Waſſer-Rades. Jedes Element des Windflügels läuft mit einer eigenen Geſchwindigkeit um, und die Verſchiedenheit dieſer Geſchwindigkeiten iſt gar ſehr beträchtlich: weil hingegen die Schaufeln eines Waſſerrades in Vergleichung mit der Höhe des ganzen Rades nur eine geringe Höhe haben, ſo iſt es beynahe ſo viel, als wenn alle Elemente der Schaufeln einerley Geſchwindigkeit hätten. Ueberdem weichen die Elemente des Wind-Flügels dem Winde ſeitwärts aus, da ſtatt deſſen die Schaufeln des Waſſerrades zwar nicht ganz völlig, aber doch beynahe, ſo lange ſie vom Waſſer getroffen werden, mit demſelben nach einerley Richtung laufen. Demnach hat es mit den Erinnerungen, welche H. Schober a. a. O. 30 u. f. §. der Belidorſchen Regel entgegen ſetzt, zwar ſeine gute Richtigkeit: wenn derſelbe aber die Parentſche Theorie überhaupt für eine ſolche erklärt, die im Maſchinenweſen von der Wich-

tigkeit

tigkeit nicht ſey, wie man ſie insgemein zu ſeyn glaubt; und wenn er im 31 §. verſpricht, er wolle zu einer andern Zeit weiſen, daß es mit der Anwendung dieſer Theorie auf Waſſerräder nichts heiſſe, und daß es ſchlecht um das Maſchinenweſen beſchaffen wäre, wenn man nicht mehr heraus zu bringen vermögte; ſo befremdet mich dies nicht wenig. Ob H. Schober ſein Verſprechen erfüllt habe, weiß ich nicht; ſo viel weiß ich aber wohl, daß ich die Richtigkeit dieſer Theorie bey Waſſer-Rädern vom Parent, Belidor, Maclaurin, Bernoulli und Euler nicht, ohne ſelber darüber zu denken, für gut hingenommen habe. Hr. Schober, deſſen eigene Theorie von den Windflügeln, wie ich unten zeigen werde, im Grunde nichts anders iſt, als die Parentſche auf Windflügel gehörig angewandt, hat ſicherlich die Sache nicht von der rechten Seite angeſehen, er iſt durch den unbeſtimmten Gebrauch der Wörter, Kraft und Würkung, welcher bey manchem Schriftſteller noch herrſcht, und vermuthlich am meiſten durch gewiſſe Folgen verleitet worden, die H. Parent aus ſeiner Theorie ſchließt, und die freylich ſonderbar genug ausſehen, wenn man ſich nicht mehr an Hrn. Parents Gründe, als an ſeine Ausdrücke hält. **Die möglichſt gröſte Würkung, welche eine Maſchine, die vom Waſſerſtoß (oder überhaupt vom Stoß einer jeden andern flüßigen Maſſe) bewegt wird, hervor zu bringen vermag, iſt nur $\frac{4}{27}$ derjenigen Würkung, welche die Kraft des Waſſers für ſich hervor bringen könnte.** Dies iſt eine Folge, die H. Parent aus ſeiner Theorie ziehet, (Hiſtoire de l'Academie Royale des Scienc. de Paris A. 1704. p. 333.)

ja noch mehr: die **Kräfte oder Urſachen** ſind ihren **Würkungen nicht proportional,** (a. a. O. pag. 335.) ſie verhalten ſich, wie die Würfeln von den Quadratwurzeln aus den Kräften.

213 §.

Man iſt nicht genöthiget, dieſe Sätze, ſo wie ſie mit Hr. Parents Worten ausgedrückt lauten, für wahr anzunehmen, wenn man ſeine Theorie ſonſt an ſich ſelbſt für richtig hält: nur des H. Parents Ausdruck iſt nicht der richtigſte. Er nennt die Kraft des Waſſerſtoſſes gegen die ruhende Schaufel die **abſolute Kraft** des Waſſers, und das **Product** dieſer Kraft in die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers, den **natürlichen Effect** des Waſſers. Den erſten Ausdruck kan man gelten laſſen, aber der letztere ſollte von Rechtswegen nicht gebraucht werden. Das Waſſer **drückt** blos gegen die ruhende Schaufel, und bringt eigentlich keinen **mechaniſchen**, ſondern nur einen **ſtatiſchen Effect** hervor. Jene abſolute Kraft wird bekanntermaſſen dem Quadrat der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers proportional angenommen (98 §. Hydraul.), und wenn ſie P heiſt, die Geſchwindigkeit des Waſſers aber V, ſo verhält ſich P wie V^2: der natürliche Effect iſt P.V. Aber der möglichſt gröſte Effect einer Maſchine mit dem unterſchlächtigen Rade iſt $= \frac{4}{27}$P.V (113 §. Hydraul.); der wäre alſo nach dem Parentſchen Sprachgebrauch $\frac{4}{27}$ des natürlichen Effects. Man nehme $P = \lambda V^2$ an, ſo iſt der möglichſt gröſte Effect $= \frac{4}{27}\lambda V^3$, und bey einer andern Geſchwindigkeit v iſt er $= \frac{4}{27}\lambda v^3$; daß alſo der erſte Effect ſich zum zweyten verhält, wie $V^3 : v^3$,

D. i.

d. i. wie $(\sqrt{P})^3 : (\sqrt{p})^3$, wenn man $\lambda v^2 = p$ ſetzt. Allein P und p ſind die Kräfte nicht, welche die erwehnten Effecte erzeugen, ſondern es ſind die Kräfte $\lambda(\frac{2}{3}V)^2$, und $\lambda(\frac{2}{3}v)^2$, und nicht dieſe Kräfte, ſondern ihre Momente müſſen eigentlich jenen Effecten proportional ſeyn, oder vielmehr ihre Momente $\lambda . (\frac{2}{3}V)^2 . \frac{1}{3}V$ und $\lambda . (\frac{2}{3}v)^2 . \frac{1}{3}v$ ſind mit jenen Effecten einerley. Die Verwirrung entſtehet daher, weil man das Geſchwindigkeit der Kraft nennt, was doch Geſchwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maſchine heiſſen ſollte, wovon man den XXIII. Abſchnitt der Mech. 379 u. f. §§. nachſehen kan. Der Druck gegen die umlaufende Schaufel iſt natürlicher Weiſe nicht ſo groß, als er gegen die ruhende war, und daß von dem letztern Druck nichts ohne Effect verlohren gegangen ſey, wird man ſchon begreifen, wenn man erwegen will, daß ein Theil deſſelben darauf verwandt ſey, die Schaufeln in Umlauf zu bringen, und ihnen die Geſchwindigkeit mitzutheilen, womit ſie im Beharrungsſtande umlaufen. Man kan hievon des Herrn Beguelins Abhandlung: Recherches Metaphyſiques ſur les forçes des fluides qui ſe perdent en Mécanique, & ſur le plus grand effet, qu'elles peuvent produire, in der Hiſtoire de l'Academie de Pruſſe Tom. XII. A. 1756. p. 425. ſqq. mit mehreren nachleſen.

214 §.

Die Parentſche Theorie bleibt demnach, wenn ſie richtig verſtanden wird, immer eine der ſchönſten und nützlichſten Erweiterungen der Maſchinenlehre: man muß aber, um der Sache alles nöthige Licht zu geben, die Theorie ſelbſt von derjenigen phyſiſchen

Hypotheſe unterſcheiden, worauf man ſie bisher in Ermangelung einer beſſern allemahl nur angewandt hat. Verhielte ſich P nicht wie V^2, ſondern wie $V^{\frac{3}{2}}$, oder eine andre Function von V, ſo würde die Rechnung auch ein andres Reſultat für den möglichſt gröſten Effect geben. Dem ungeachtet bliebe die Theorie an ſich ſelbſt ſo richtig und ſo nützlich, daß ſie gewiß das geringſchätzige Urtheil nicht verdient, was Hr. Schober von ihr fället. Es kan wohl ſeyn, daß die Erfahrung jener erwehnten phyſicaliſchen Hypotheſe nicht allemahl günſtig iſt, und eben deswegen baue ich auch noch nicht ſo ganz ſicher darauf. (M. ſ. den vorigen X. Abſchnitt.) Indeſſen glaubt H. Schober doch ſelbſt (a. a. O. 31 §. 244 S.), daß die Hypotheſe der Erfahrung ziemlich nahe komme, und daß man, ohne groſſen Irrthum zu begehen, darnach rechnen könne. Ich werde alſo wohl hinlänglich gerechtfertiget ſeyn, wenn ich den Vortrag der Lehre von den Windflügeln auf eben die Hypotheſe gebauet habe, welches H. Schober im Grunde auch ſelbſt thut. Und in der That ſtimmen die Reſultate der Rechnung ſo ſchön mit einem Verſuch überein, den Hr. Schober angeſtellet hat, daß man ſehr wohl damit zufrieden ſeyn kan. Nach des Hn. Belidors Rechnung ſollte die Umlaufszeit einer Maſchine mit Windflügeln von der Geſtalt und Gröſſe, wie ſie im 206 und 211 §. angenommen ſind, 7 Zeit-Secunden betragen, und binnen dieſer Zeit ſollte die Maſchine $36\frac{3}{4}$ Pf., alſo binnen einer Stunde 21572 Pf. auf die Höhe von 5 Fuß bringen, alſo der Effect für eine Stunde = 107860 ſeyn. (So giebt Hr. Schober dieſe Zahlen aus dem Belidor zwar richtig an, bemerkt aber nicht, daß die Axe

der

der Belidorſchen Mühle mit der Richtung des Windes einen Winkel von 30° macht, und daß Belidor deswegen von demjenigen Effect nur $\frac{6}{7}$ rechnet, den die Mühle nach ſeiner Meynung bey paralleler Lage der Axe leiſten würde. Dieſer Effect wäre für eine Stunde = 125833). Die Rechnung des 206 §. giebt bey einer Wendung der Flügel von $54\frac{3}{4}°$ den Effect für eine Secunde = 97,3, alſo für eine Stunde $97,3 \times 3600 = 350280$, und die Umlaufszeit $4\frac{1}{2}$ Secunden: vermöge der Rechnung im 211 §. aber iſt bey einer Wendung der Flügel von 72° der Effect für eine Secunde = 155,3, alſo für eine Stunde = 559080 bey der Umlaufszeit von 2 Secunden. Nach Hrn. Schobers Erfahrung hat eine ohngefehr ſo eingerichtete Maſchine in einer Secunde 19208 Pf. Waſſer 27 Fuß hoch gebracht, alſo war der Effect = 518616 bey einer Umlaufszeit von $1\frac{1}{2}$ Secunden, und bey der Geſchwindigkeit des Windes von 20 Fuß. Der Effect war alſo nicht völlig ſo groß, als er nach der Rechnung des 211 §. ſeyn ſollte, und eben dies wäre eine ungemeine Beſtätigung der gemeinen Theorie vom Windſtoß, wenn es damit in allen Stücken ſeine völlige Richtigkeit hätte. Indeſſen waren die Schoberſchen Windflügel nicht eben, ſondern ſolche, wovon die Sproſſen mit der Richtung des Windes nicht einerley Winkel machen; deswegen bleibt noch der Zweifel, ob dieſer Umſtand das Reſultat der Rechnung nicht vielleicht ſehr ändern dürfte: man wird dieſe Art Flügel aus dem nun folgenden näher kennen lernen.

Der XI. Abſchnitt.

Von krumm gebogenen Windflügeln und dem Anemometer.

215 §.

Der Flügel ſey noch eine ebene Fläche, aber ſeine ganze Länge ſey ſowohl gegen die ganze Länge der Windruthe, als auch gegen ſeine eigene Breite ſehr klein: man ſucht, wie groß ſowohl die Umlaufsgeſchwindigkeit des Flügels, als auch ſeine Neigung gegen die Richtung des Windes ſeyn müſſe, damit das mechaniſche Moment des Windſtoſſes am gröſten werde.

Aufl. Wenn x die ganze Länge der Windruthe bedeutet, und die Flügel am äuſſern Ende der Ruthe unter dem Winkel ϑ gegen die Richtung des Windes (die, wie bisher, allemahl mit der Umlaufsaxe parallel angenommen wird,) befeſtiget iſt; ſo kan man annehmen, daß alle Puncte deſſelben dem Winde mit einerley Geſchwindigkeit ausweichen. Wenn demnach der Inhalt ſeiner ganzen Fläche $= h^2$ angenommen wird; ſo findet der Ausdruck für das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen ein Element des im 199 §. betrachteten ebenen Flügels hier ſeine Anwendung, wenn man h^2 ſtatt ydx ſetzt. Es ſey μ dies Moment, ſo hat man $\mu = nGh^2\gamma x(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)^2 \cos\vartheta^3$, und wenn zuerſt allein γ als veränderlich betrachtet wird, ſo weiß man, daß $d.\gamma(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)^2 = 0$ ſeyn müſſe,

wenn μ am gröſten werden ſoll. Die Rechnung giebt $(c\,\mathrm{tang}\,\vartheta - \gamma x)^2 - 2\gamma x\,(c\,\mathrm{tang}\,\vartheta - \gamma x) = 0$, und daraus folgt $c\,\mathrm{tang}\,\vartheta = 3\gamma x$, oder $\gamma x = \frac{1}{3} c\,\mathrm{tang}\,\vartheta$, oder auch $\gamma x \cos\vartheta = \frac{1}{3} c \sin\vartheta$.

Ich habe die Differentialgleichung durch $c\,\mathrm{tang}\,\vartheta - \gamma x$ dividirt, weil dieſer Factor nicht $= 0$ ſeyn kan: denn alsdenn müſten die Geſchwindigkeiten $c\sin\vartheta$ des Windes, und $\gamma x \cos\vartheta$ des Flügels nach der ſenkrechten Richtung genommen, gleich groß ſeyn, wobey die Würkung des Windſtoſſes völlig aufhören und $\mu = 0$ ſeyn würde. Die Gleichung $c\,\mathrm{tang}\,\vartheta - \gamma x = 0$ giebt denjenigen Werth von γ, wobey μ am kleinſten wird, und man weiß aus dem 343 §. Mech., daß nach der dortigen Regel ſowohl die gröſten, als auch die kleinſten Werthe einer Function gefunden werden.

Setzt man $\frac{c\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{\gamma x} = z$, ſo hat man auch $\mu = nGh^2\gamma^3 x^3 (z-1)^2 \cos\vartheta^3$, und $\gamma z = \frac{c\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{z}$ in dieſen Ausdruck geſetzt, giebt $\mu = \frac{nGh^2 (z-1)^2}{z^3} c^3 \sin\vartheta^3$, da ſich denn allein z mit γ ändert, wenn ϑ einerley bleibt. Man findet aber

$$d.\frac{(z-1)^2}{z^3} = \frac{2z^3(z-1) - 3z^2(z-1)^2}{z^6}\,dz,$$

und dies Differential $= 0$ geſetzt, giebt $2z^3 - 3z^2(z-1) = 0$, weil $z - 1$ nicht $= 0$ ſeyn kan. Daraus wird ferner $z = 3$ gefunden, welches mit der vorigen Rechnung überein kommt.

Man laſſe nun γ unverändert bleiben, und nehme ϑ veränderlich an, ſo giebt die Gleichung $d\mu = 0$ den geſuchten Werth von ϑ. Die Differentialrechnung giebt $2(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)c\,.\,\mathrm{cos}\vartheta - 3(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)^2\,\mathrm{cos}\vartheta^2\,\mathrm{sin}\vartheta = 0$, oder $3(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)\,\mathrm{cos}\vartheta\,\mathrm{sin}\vartheta = 2c$, weil der Factor $(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)\,\mathrm{cos}\vartheta$ wegen der ſchon angeführten Urſache nicht $= 0$ ſeyn kan; und wenn man mit $\mathrm{cos}\vartheta^2$ dividirt, ſo wird $3(c\,\mathrm{tang}\vartheta - \gamma x)\,\mathrm{tang}\vartheta = 2c\,.\,\mathrm{sec}\vartheta^2 = 2c\,.\,\mathrm{tang}\vartheta^2 + 2c$, woraus man $c\,.\,\mathrm{tang}\vartheta^2 - 3\gamma x\,\mathrm{tang}\vartheta = 2c$, oder $\mathrm{tang}\vartheta^2 - \frac{3\gamma x}{c}\mathrm{tang}\vartheta = 2$ erhält, und $\mathrm{tang}\vartheta = \frac{3\gamma x}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{9\gamma^2 x^2}{4c^2} + 2\right)}$. Weil eine dieſer Wurzeln allemahl negativ iſt, ſo kan allein das Zeichen (+) vor dem Wurzelzeichen gebraucht werden.

Nunmehro muß man beyde gefundene Gleichungen mit einander verbinden, weil beyde zuſammen genommen die geſuchten Gröſſen γ und ϑ beſtimmen. In ſolcher Abſicht ſetze man ſtatt $\frac{3\gamma x}{c}$ den Werth $\mathrm{tang}\vartheta$ aus der erſten Gleichung. ſo findet man $\mathrm{tg.}\vartheta = \frac{1}{2}\mathrm{tang}\vartheta + \sqrt{(\frac{1}{4}\mathrm{tang}\vartheta^2 + 2)}$, und daraus folgt $\frac{1}{4}\mathrm{tang}\vartheta^2 = \frac{1}{4}\mathrm{tang}\vartheta^2 + 2$, oder $\frac{2}{\mathrm{tang}\vartheta^2} = 0$, und $\mathrm{tang}\vartheta^2 = \frac{2}{0}$. Demnach muß $\mathrm{tang}\vartheta$ unendlich groß, und $\vartheta = 90°$ ſeyn. Die Richtigkeit dieſer Folge beſtätiget ſich auch ſo. Es war $3(c\,\mathrm{tg.}\vartheta - \gamma x)\,\mathrm{cos}\vartheta\,\mathrm{sin}\vartheta = 2c$, oder $3(z-1)\,.\,\frac{c\,\mathrm{tang}\vartheta}{z}\,.\,\mathrm{cos}\vartheta\,\mathrm{sin}\vartheta = 2c$,

folg-

folglich $\frac{3(z-1)}{z} \cdot \sin\vartheta^2 = 2$, und $\sin\vartheta = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{z}{z-1}$. Wird nun der erſten Beſtimmung gemäß $z=3$ angenommen, ſo hat man $\sin\vartheta = 1$, alſo $\vartheta = 90°$.

Die Vorausſetzung $z=3$ giebt $\mu = \frac{4}{27} nGh^2 c^3 \sin\vartheta^3$: dies Moment iſt würklich deſto gröſſer, je gröſſer der Winkel ϑ iſt, und der Werth $\frac{4}{27} nGh^2 c^3$ iſt die Grenze, welche daſſelbe nicht übertreffen kan. Denn der Winkel $\vartheta = 90°$ würde γ unendlich groß geben, und es iſt für ſich klar, daß die Umlaufs-Geſchwindigkeit ihre Grenzen habe, die ſie nicht übertreffen kan. Durch Vergröſſerung der Umlaufs-Geſchwindigkeit kan man indeſſen dem Werth $\vartheta = 90°$ ſehr nahe kommen, und es dahin bringen, daß das mechaniſche Moment die Grenze $\frac{4}{27} nGh^2 c^3$ ziemlich nahe erreiche. Bey dem allen aber wird der ſtatiſche Effect oder das ſtatiſche Moment des Windſtoſſes deſto geringer, je gröſſer γ und ϑ angenommen werden: denn das ſtatiſche Moment iſt $= \frac{4}{27 \cdot \gamma} \cdot nGh^2 c^3 \sin\vartheta^3 = \frac{4}{9} x \cdot nGh^2 c^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta$, welches, wie es auch nicht anders ſeyn kan, verſchwindet, wenn $\vartheta = 90°$ wird.

216 §.

Ob nun gleich dergleichen ſehr kurze Windflügel in der Ausübung im Groſſen nicht gebraucht werden, und zu nichts dienen würden; ſo wird doch dieſe Unterſuchung als eine Vorbereitung dienen, dasjenige deſto beſſer zu überſehen, worauf es bey der

Theorie der gekrümmten Windflügel ankommt. Man ſahe ein, daß nicht alle Elemente eines ebenen Windflügels dem Winde auf einerley Art ausweichen können, und deswegen verſuchte man es, die Fläche des Flügels auf eine ſolche Art zu krümmen, wobey das Verhältniß der Geſchwindigkeit eines jeden Elements nach der auf daſſelbe ſenkrechten Richtung, zur Geſchwindigkeit des Windes nach eben dieſer Richtung, für alle Elemente einerley bliebe; oder mit kurzen: es ſollte die Zahl $z = \frac{c \tang \vartheta}{\gamma x}$ für alle *Elemente* einerley bleiben. Daraus ergab ſich denn ſogleich die Regel: **die Tangenten der Neigungswinkel der Sproſſen gegen die Richtung des Windes müſſen ſich wie die Entfernungen dieſer Sproſſen von der Umdrehungsaxe verhalten.** Man zertheile nemlich in Gedanken zuerſt den ebenen Windflügel in ſehr ſchmale Streifen vermittelſt ſenkrechter Linien auf der Mittellinie der Windruthe, und nehme alsdenn ferner an, daß jeder dieſer ſchmalen Streifen unter einem Winkel gegen die Richtung des Windes geneigt ſey, deſſen Tangente = $\frac{z\gamma x}{c}$ iſt, ſo ſiehet man wohl, daß ſich dieſe Tangenten wie die Entfernungen x verhalten müſſen, und man hat nun eine Windruthe, welche mit einer Menge ſolcher Flügel verſehen iſt, dergleichen im vor. §. ſind betrachtet worden. Stellt man ſich die Höhe dieſer Windflügel unendlich klein, und ihre Menge unendlich groß vor, ſo erhält man eine Idee von der Geſtalt eines windſchiefen Windflügels, ſo wie er bey Mühlen und andern Maſchinen mit Nu-

tzen gebraucht werden kan. Die krumme Fläche des Wind-Flügels hat alsdenn dieſe Haupteigenſchaft: Wenn in einer beliebigen Entfernung x von der Umlaufsaxe eine grade Linie ſenkrecht auf die Windruthe ſo geſetzt wird, daß die Tangente ihres Neigungswinkels gegen die Richtung des Windes $= \frac{z\gamma x}{c}$ iſt, ſo fällt ſie in die Fläche des Flügels. Iſt nun hieſelbſt die Breite des Flügels $= y$, ſo gehört zur Abſciſſe x ein Element des Flügels $= ydx$, das man als eine ebene Fläche betrachten kan, und das Moment des Windſtoſſes gegen dies Element iſt alsdenn $= nG . \gamma x . ydx (c\text{tang}\vartheta - \gamma x)^2 \text{coſ}\vartheta^3$ (229 §.). Wenn man z ſtatt $\frac{c\text{tang}\vartheta}{\gamma x}$ ſchreibt, ſo iſt dies Moment $= nGydx . \frac{c^3 \text{tang}\vartheta^3}{z^3}$. $(z - 1)^2 \text{coſ}\vartheta^3$; und weil $dx = \frac{cd\vartheta}{z\gamma \text{coſ}\vartheta^2}$ (457 §. Hydraul.) wird, ſo verwandelt ſich eben der Ausdruck auch in folgenden

$$\frac{nGyc^4 (z-1)^2}{z^4 \gamma} d\vartheta \text{tang}\vartheta^2 \text{ſin}\vartheta.$$

Das ſtatiſche Moment iſt

$$= \frac{nGyc^4 (z-1)^2}{z^4 \gamma^2} d\vartheta \text{tang}\vartheta^2 \text{ſin}\vartheta,$$

und wenn man es für den erſten Anfang der Bewegung haben will, ſo muß man $\gamma = 0$ und $z = \infty$ ſetzen, da dann der Ausdruck ſich in folgenden $\frac{nGyc^4}{z^2 \gamma^2} d\vartheta \text{tg}\, \vartheta^2 \text{ſin}\vartheta$

verwandelt, wobey zu bemerken iſt, daß $zy = \frac{c\tang\vartheta}{x}$ eine beſtändige Gröſſe ſey. Wird nemlich $\frac{\tang\vartheta}{x} = \nu$ geſetzt, ſo iſt das ſtatiſche Moment $= \frac{nGyc^2(z-1)^2}{\nu\nu z^2} d\vartheta \tang\vartheta^2 \sin\vartheta$, und für den Anfang der Bewegung wird es $= \frac{nGy^2c^2}{\nu\nu} d\vartheta \tang\vartheta^2 \sin\vartheta$.

217 §.

Das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen den umlaufenden Flügel ſowohl, als auch das ſtatiſche Moment für den erſten Anfang der Bewegung zu finden, wenn die Fläche deſſelben nach dem angenommenen Geſetz windſchief gebogen iſt, und alle Sproſſen gleich lang ſind.

Aufl. Wenn dM das Moment gegen ein Element des Flügels bezeichnet, ſo hat man $dM = \frac{nGyc^4(z-1)^2}{z^4 y} d\vartheta \tang\vartheta^2 \sin\vartheta$, und weil der Vorausſetzung gemäß y eine beſtändige Gröſſe iſt, ſo wird das geſuchte Moment

$$M = \frac{nGyc^4(z-1)^2}{z^4 y} \int d\vartheta \tang\vartheta^2 \sin\vartheta + C.$$

Es iſt aber $\tang\vartheta^2 \sin\vartheta = \sec\vartheta^2 \sin\vartheta - \sin\vartheta = \tang\vartheta \sec\vartheta - \sin\vartheta$, alſo wird $\int d\vartheta \tang\vartheta^2 \sin\vartheta = \int d\vartheta \tang\vartheta \sec\vartheta - \int d\vartheta \sin\vartheta = \sec\vartheta + \cos\vartheta$ (457 §.

Hy-

Hydraul.): und wenn ich um abzukürzen Y ſtatt
$\frac{nGyc^4(z-1)^2}{z^4\gamma}$ ſchreibe, ſo wird M =
$Y(\sec\vartheta+\cos\vartheta)+C$. Man nehme an, daß $\vartheta=\eta$ werde, wenn $x=b$ iſt, da dann der Abſtand der unterſten Sproſſe von der Umdrehungsaxe verſtanden werden muß; ſo muß $M=0$ ſeyn, wenn man $\vartheta=\eta$ nimmt, und man erhält $M=Y(\sec\vartheta+\cos\vartheta-\sec\eta-\cos\eta)$. Um dies Moment für den ganzen Flügel zu haben, muß man ſtatt ϑ den Winkel ſetzen, welchen die höchſte Sproſſe mit der Richtung des Windes einſchließt: dieſen Winkel verſtehe man demnach von nun an durch ϑ, ſo hat man für den ganzen Flügel $M=Y(\sec\vartheta-\sec\eta-(\cos\eta-\cos\vartheta))$.

Es iſt aber $\sec\vartheta-\sec\eta=\frac{1}{\cos\vartheta}-\frac{1}{\cos\eta}=$
$\frac{\cos\eta-\cos\vartheta}{\cos\eta\cos\vartheta}=(\cos\eta-\cos\vartheta)\sec\eta\sec\vartheta$; alſo wird
$M=Y(\cos\eta-\cos\vartheta)(\sec\eta\sec\vartheta-1)$. Nun war $Y=$
$\frac{nGyc^3(z-1)^2}{z^3}\cdot\frac{c}{z\gamma}$, und überdem iſt nun
$\frac{c}{z\gamma}=\frac{a}{\operatorname{tang}\vartheta}$, weil der Winkel ϑ der Abſciſſe $x=a$ zugehört, demnach erhält man $M=$
$\frac{nGyc^3(z-1)^2a}{z^3}(\cos\eta-\cos\vartheta)(\sec\eta\operatorname{cosec}\vartheta-\cot\vartheta)$,

oder $M=$
$\frac{nGyc^3(z-1)^2}{z^3}\,a(\cos\eta-\cos\vartheta)(\sec\eta-\cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta$.

Eben

Eben dieſer Ausdruck giebt das ſtatiſche Moment des Windſtoſſes gegen den umlaufenden Flügel im Beharrungsſtande, wenn man mit γ dividirt. Um abzukürzen ſetze man

$(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta = \lambda$, ſo hat man

$S = \frac{nGy(z-1)^2ac^3}{z^3\gamma}.\lambda$, und weil $z\gamma = yc$ war, (216 §.) ſo iſt auch $S = \frac{nGy(z-1)^2ac^2}{yz^2}.\lambda$. Für den erſten Anfang der Bewegung aber iſt $z = \infty$, alſo $S = \frac{nGyac^2}{y}.\lambda$. Weil z nicht kleiner als 1 ſeyn kan, ſo iſt dies letztere Moment gröſſer, als es beym Umlauf des Flügels iſt, wie erfordert wird, damit die Maſchine zum Umlauf gebracht werden könne.

218 §.

Eine Maſchine, die durch vier gehörig gebogene Windflügel getrieben werden ſoll, vortheilhaft anzuordnen.

Aufl. Wenn die Buchſtaben K, s, t, Θ, die Bedeutung des 223 §. behalten, ſo weis man, daß die Anordnung der Maſchine auf das Verhältniß $\frac{\Theta}{t}$ ankomme, und daß $\Theta = \frac{2\pi}{\gamma}$ ſey. Nach dem allgemeinen Grundſatz der Maſchinenlehre hat man alsdenn für vier gebogene Windflügel die Gleichung

$$\frac{4nGyc^3(z-1)^2a}{z^3}(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta$$

=

$= \frac{Ks}{t}$. Weil nun $a\gamma$ die Geſchwindigkeit iſt, womit die Endpuncte der Windruthen umlaufen, ſo kan man ſich hier die Sache ſo vorſtellen, als wenn am äuſſerſten Endpunct einer der vier Windruthen nach der Richtung der Bewegung, oder am Umfang eines Rades, deſſen Halbmeſſer $= a$, eine Kraft

$$F = \frac{4nGyc^3(z-1)^2}{z^3\gamma}(\cos\eta - \cos\vartheta)$$

$$\therefore (\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta = \frac{4nGyc^2(z-1)^2}{\nu z^2}\lambda \text{ (217 §.)}$$

angebracht wäre, und man erhält $Fa\gamma = K \cdot \frac{s}{t}$, oder $\frac{F \cdot 2\pi a}{\Theta} = \frac{Ks}{t}$, alſo $\frac{\Theta}{t} = \frac{F \cdot 2\pi a}{K \cdot s}$.

Vermöge des 115 §. iſt es am vortheilhafteſten $z = 3$ anzunehmen, und die Anmerkungen, welche im 210 §. beygebracht wurden, ergeben, daß es vortheilhaft ſey, Θ willkührlich und zwar ziemlich klein anzunehmen, um einen ſchnellen Umlauf zu erhalten. Wenn dies geſchicht, ſo beſtimmt man zugleich $\gamma = \frac{2\pi}{\Theta}$; und weil überdem b willkührlich genommen werden kan, ſo beſtimmt dies $\tang\eta = \frac{b\gamma z}{c}$. Nunmehro kommt es darauf an, ob die Abmeſſungen der Flügel auch willkührlich angenommen werden können, oder vielleicht ſonſt ſchon beſtimmt ſind. Hiedurch wird $\tang\vartheta = \frac{3\gamma a}{c}$, und

F

F beſtimmt, ſo wie auch $\alpha = \frac{2\pi a}{\Theta}$. Setzt man nun $\frac{s}{t} = \beta$, ſo iſt $K\beta = F\alpha$ beſtimmt, und wenn von K und β das eine willkührlich angenommen wird, ſo iſt das andre ebenfals beſtimmt. Gewöhnlich iſt β gegeben, oder s und t, und man ſiehet wohl, daß K deſto gröſſer ausfalle, je gröſſer t bey einerley s genommen werden kann.

Wenn umgekehrt K und β gegeben wären, ſo müſte man die Abmeſſungen der Flügel ſuchen. In ſolcher Abſicht kan man anfangs a willkührlich annehmen mit dem Vorbehalt, allenfals a zu vergröſſern, wenn die Breite der Flügel zu groß ausfallen ſollte. Man hat alsdenn $\alpha = \frac{2\pi a}{\Theta}$, und $F = \frac{K\beta}{\alpha}$, ſo wie auch $\tang\vartheta = \frac{z\gamma a}{c}$; und wenn man $\frac{4nGc^2(z-1)^2}{\gamma z^2}\lambda = Z$ annimt, ſo iſt $Zy = F$, und man findet die Breite des Flügels $y = \frac{F}{Z}$.

219 §.

Wenn man die Aufgabe des 215 §. und die daſelbſt gegebene Auflöſung mit des Hrn. **Maclaurin** Regel für die vortheilhafteſte Wendung der Windflügel vergleichen will; (Treatiſe on Fluxions, Art. 911-914), ſo wird man finden, daß die Glei-

chung $\tang\vartheta = \frac{3\gamma x}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{9\gamma^2 x^2}{4c^2} + 2\right)}$ völlig mit derjenigen überein komme, welche Herr Maclaurin für die Tangente des vortheilhafteſten Winkels findet. Indeſſen hat Hr. Maclaurin die Aufgabe, deren Auflöſung hier eigentlich geſucht wird, nicht erſchöpft, weil er ſich nicht darüber erklärt, wie groß das Verhältniß $\gamma x : c$ angenommen werden müſſe: er nimmt für jeden Fall γ als gegeben an, und ſchreibt alsdenn für jede Sproſſe, deren Entfernung von der Umlaufsaxe $= x$ iſt, den Winkel vor, deſſen Tangente $= \frac{3\gamma x}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{9\gamma^2 x^2}{4c^2} + 2\right)}$. Daß Hr. Daniel Bernoulli über die Frage von der vortheilhafteſten Wendung der Windflügel ſchon aus richtigen Gründen Unterſuchungen angeſtellet, und die Bewegung des Flügels dabey in Betrachtung gezogen habe, iſt oben am Ende des 198 §. bereits angeführt worden: allein ſeine Schlußſätze kommen mit den hieſigen nicht überein, und Maclaurin hat dagegen ſchon gegründete Erinnerungen gemacht. Durch ein Verfahren, welches dem am Ende des 196 §. erklärten ähnlich iſt, kommt Bernoulli auf einen ganz richtigen Ausdruck, der dem Druck des Windes gegen den Flügel proportional iſt. Bey ihm iſt x was hier im 115 §. $\sin\vartheta$ war, und die Fläche der Ebene, die den Stoß auffängt, $= 1$, v und V ſind die Geſchwindigkeiten des Windes und der Ebene, die dem Winde nach einem rechten Winkel ausweicht: alſo iſt $\sqrt{(vv + VV)}$ die relative Geſchwindigkeit des Windes. Wenn ſein Ausdruck damit multi-

multiplicirt wird, ſo verwandelt er ſich in folgenden: $(xv - V\sqrt{(1-xx)})^2\sqrt{(1-xx)}$, der alſo nach der hieſiegen Bezeichnung $= (v\sin\vartheta - V\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$ wird, welches mit den Formuln des 199 und 215 §. überein kommt, woſelbſt c und γx die Geſchwindigkeiten ſind, welche beym Bernoulli v und V heiſſen. Setzt man nun nach der bekannten Regel des 343 §. Mech. das Differential der Bernoulliſchen Formul x als veränderlich betrachtet, $=0$, ſo kommt man auf folgende Gleichung der ſechſten Ordnung.
$(9v^4 + 18v^2V^2 + 9V^4)x^6 - (12v^4 + 30v^2V^2 + 18V^4)x^4 + (4v^4 + 16v^2V^2 + 9V^4)x^2 - 4v^2V^2 = 0$, und wenn dieſe Gleichung durch die quadratiſche $(v^2 + V^2)x^2 - V^2 = 0$ dividirt wird, ſo giebt ſich der Quotient $9(v^2 + V^2)x^4 - (12v^2 + 9V^2)x^2 + 4v^2 = 0$. Den Regeln der Algebra, die in den folgenden Theilen dieſes Lehrbuchs umſtändlicher erklärt werden ſollen, gemäß, giebt der quadratiſche Factor zwey Wurzeln der auf die ſechſte Ordnung ſteigenden Gleichung, dieſe ſind $x = \pm\sqrt{\frac{V^2}{v^2 + V^2}}$, und die poſitivve Wurzel ſcheint Hr. Bernoulli für diejenige zu halten, welche die Aufloſung der Aufgabe von der vortheilhafteſten Wendung der Flügel giebt: denn er ſagt, wenn $v = V$ iſt, ſo müſſe $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ alſo $\vartheta = 45°$ ſeyn. Indeſſen ſehe ich nicht, wie damit die fernere Folge überein kommt, daß die Flügel gegen die äuſſerſte Sproſſe zu weniger gewandt ſeyn müſſen, als gegen die Umlaufsaxe zu; denn x wächſt mit V, und nimmt mit V ab. Es mag aber damit beſchaffen ſeyn, wie es wolle, ſo ſiehet man es doch der Formul $x = \sqrt{\frac{V^2}{v^2 + V^2}}$ leicht an, daß ſie un-

möglich die richtige Auflöſung geben könne: denn der Natur der Sache nach müſte $x = \surd\frac{2}{3}$ gefunden werden, wenn $V = 0$ angenommen wird (197 §.), aber die Formul giebt alsdenn $x = 0$. Man muß ſich hiebey aus dem 343 §. Mech. erinnern, daß unter den Wurzeln der Gleichung, welche nach dieſer Methode gefunden wird, ſolche ſeyn können, die keinen gröſten, ſondern einen kleinſten Werth, ja zuweilen keines von beyden geben. Daß ein Fall von der Art hier eintrete, ſiehet man ſogleich, wenn man nur bey dem Bernoulliſchen Exempel $v = V$ bleibt, wobey $x = \sin\vartheta = \surd\frac{1}{2}$ ſeyn ſoll. Dies giebt $\tan g\vartheta = 1$, alſo $V = v\tan g\vartheta$, und man weis, daß dies ſoviel ſagen will, die Geſchwindigkeiten des Windes und der Ebene nach der ſenkrechten Richtung genommen, ſind gleich groß (215 §.). Hiebey muß nun offenbar der Druck des Windes gegen die Fläche $= 0$ ſeyn, und der Werth der Formul $(xv - V\surd(1-xx))\surd(1-xx) = 0$ iſt kein gröſter, ſondern ein kleinſter Werth. Dieſerwegen muß man die Wurzeln der Gleichung $9(v^2+V^2)x^4 - (12v^2+9V^2)x^2 + 4v^2 = 0$ ſuchen, die ſich auch ſo ausdrücken läſt $9v^2x^4 - 12v^2x^2 + 4v^2 = 9V^2x^2(1-xx)$. Die Quadratwurzel hievon genommen giebt $3vx^2 - 2v = 3Vx\surd(1-xx)$, folglich $3(vx - V\surd(1-xx))x = 2v$, und das iſt ſo viel als $3(v\sin\vartheta - V\cos\vartheta)\sin\vartheta = 2v$, oder $3(v\tan g\vartheta - V)\cos\vartheta\sin\vartheta = 2v$. Dieſe Gleichung kommt nun mit derjenigen völlig überein, die im 215 §. gefunden ward; wie denn auch eben daſelbſt bemerkt wurde, daß der Factor $(c\tan g\vartheta - \gamma x)\cos\vartheta = c\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta = 0$ geſetzt ein minimum und kein maximum gäbe.

Es würde daraus $\tang\vartheta = \frac{\gamma x}{c}$, oder nach der Bernoulliſchen Bezeichnung $\tang\vartheta = \frac{V}{v}$, alſo $\sin\vartheta = \sqrt{\frac{V^2}{v^2 + V^2}}$ folgen, welches mit der Bernoulliſchen Rechnung übereinkommt, und man ſiehet nun ganz deutlich, daß Hr. Bernoulli auf dem richtigen Wege eben das Reſultat würde herausgebracht haben, welches oben im 215 §. gefunden iſt.

220 §.

Die theoretiſchen Unterſuchungen, welche Herr Schober in ſeiner oft angeführten Abhandlung über den Effect der Windmühlen angeſtellet hat, laſſen ſich mit dem bisherigen Vortrage ebenfals in einen Zuſammenhang bringen, ob es gleich das Anſehen haben mögte, als wenn Hr. Schober aus ganz andern Gründen ſchlieſſe. Der an ſich ſonſt richtige Satz: daß die den Wendungswinkeln der Sproſſen zugehörigen Tangenten den Entfernungen von der Umlaufsaxe proportional ſeyn ſollen, bringt Herrn Schober auf die Idee der Schraube und des Schraubenganges, (ohne Zweifel rührt dies von der Vorſtellung her, die viele Schriftſteller ſonſt angenommen haben, ein Schraubengang entſtehe, wenn eine ſchiefe Ebene um einen Cylinder gewunden wird 172 §. Stat.) er findet bey Vergleichung ſeiner Verſuche, die er mit kleinen Windflügeln angeſtellet hat, etwas, das mit dieſer Idee in Verwandſchaft zu ſtehen ſcheint, und nun ſoll ſich alles aus der ſtatiſchen

ſchen Theorie vom Keil und der Schraube herleiten laſſen; der Wind ſoll gleichſam die Schraubenmutter ſeyn, die ſich parallel mit der Axe der Spindel fortbeweget, und vermöge ſolcher Bewegung die Flügel umzudrehen ſtrebet, u. ſ. f. M. ſ. a. a. O. den 24. 27. u. f. §. §. Mir iſt dies alles nicht verſtändlich genug: ich will indeſſen dem Hrn. Schober in ſeinen Schlüſſen weiter folgen.

Im 27 und 28 §. beſonders auf der 238 S. ſucht er das **würkliche Vermögen, welches die Flügel von dem gegebenen Winde erhalten, ſich um die Axe zu drehen:** ſo drückt ſich Herr Schober aus, und es iſt eigentlich das gemeynt, was Hr. Parent den abſoluten Effect des Stoſſes einer flüßigen Maſſe, und Hr. A. Euler in der Göttingiſchen Preisſchrift: Quomodo vis aquæ etc. das momentum impulſionis nennt. (M. ſ. den 213 §.) Nach Hr. Schober iſt dies nun das Product der Kraft in den Raum der Kraft, und er ſucht zuerſt ein jedes für ſich, um hernach beydes in einander zu multipliciren. Die Kraft iſt bey ihm das, was eigentlich der von dem Windſtoß gegen den ruhenden Flügel herrührende Druck heiſſen ſollte, und er beſtimmt ihn für jede Neigung des Flügels ſeinen im 182 §. angeführten Verſuchen gemäß. Die Kraft geht nach ſeiner Vorſtellung um die Höhe eines Schraubenganges fort, wenn die Laſt dem Umfang der Spindel durchläuft: iſt alſo s der Raum der Kraft, p die Peripherie der Spindel, η die Ergänzung des Winkels, unter welchem der Schraubengang die Peripherie der Spindel ſchneidet, zu 90°; ſo iſt $\tan g\eta : 1 = p : s$. Hier war alſo die Frage, was p für einen Halbmeſſer haben ſoll? Der Flügel

iſt die Laſt, und alſo muß p der Weg ſeyn, den der Flügel, indem er einmahl umläuft, zurück legt. Weil aber nicht alle Theile eines ſehr langen Flügels einerley Weg zurück legen, ſo muß man ihn in ſchmale Streifen vertheilen, (wie im 216 §.) und für jeden Streifen p beſonders ſuchen: da würde nun s für jeden Streifen anders ausfallen, wenn η für alle einerley wäre. Iſt nemlich x die Entfernung des Streifens von der Umlaufsaxe, ſo wird $p = 2\pi x$, und $s = \frac{2\pi x}{\text{tang}\eta}$. Verhält ſich aber tang$\eta$ wie x, wie bey gekrümmten Flügeln ſeyn ſoll, ſo iſt s für alle Streifen einerley; und wenn b die Entfernung der unterſten Sproſſe von der Umlaufsaxe, η aber ihr Wendungswinkel iſt, ſo hat man $s = \frac{2\pi b}{\text{tang}\eta}$. Wenn demnach P die Kraft des Windes gegen den ruhenden Flügel iſt, ſo iſt $\frac{2P\pi b}{\text{tang}\eta}$ nach H. Schober das geſuchte Vermögen des Windes gegen den ruhenden Flügel.

220 §.

So richtig nun die Sache an ſich ſelbſt iſt, die Hr. Schober hier vortragen will, ſo unbeſtimmt iſt doch alles abgefaſt: der Undeutlichkeit nicht zu gedenken, welche die Vorſtellung des Schraubenganges hier verurſacht, die mit dieſer Unterſuchung nichts mehr zu thun hat, als mit einer jeden andern, wo ein paar Gröſſen ſich ſo verhalten, wie die Perpendicularſeiten eines rechtwinklichten Dreyecks. Hr. Schober ſucht eigentlich den abſoluten Effect des

Wind-

Windſtoſſes für die Umlaufszeit der Flügel: und was bey ihm Raum der Kraft, oder Weite des Schraubenganges heiſt, iſt der Weg, den der Wind binnen der Umlaufszeit der Flügel zurück legen würde, wenn dieſe dem Winde völlig ausweichen, oder mit Hr. Schober zu reden; wenn ſie vollkommen frey wären. Er ſey s und t die Umlaufszeit der Flügel, ſo iſt $\frac{s}{t}$ tang$\eta =$

$\frac{2\pi b}{\text{tang}\eta}$, alſo $s = \frac{2\pi bt}{\text{tang}\eta}$. Um dies deſto deutlicher zu überſehen, ſtelle man ſich die Ebene AB vor, wogegen der Wind nach der Richtung CD un- 66
ter dem Winkel BDC$=\eta$ anſtößt, und DF ſey auf Fig.
CD ſenkrecht, DG aber auf AB ſenkrecht. Nun iſt der Druck des Windes gegen die Ebene AB nach der Richtung DG$=n$G.AB.c^2ſinη, wenn c die Geſchwindigkeit des Windes bedeutet: und wenn GH auf DF, GK aber auf CD ſenkrecht geſetzt iſt, ſo zerlegt ſich der Druck DG nach den Richtungen DI und DF in den Druck DK$=$DGſin$\eta = n$G.AB.c^2ſinη^3, und den Druck DH$=$DGcoſ$\eta = n$G.AB.c^2ſinη^2coſη. Demnach iſt erſtlich der Effect, (wenn man ihn, wie es am kürzeſten und leichteſten zu überſehen iſt, für eine Secunde ſucht,) nach DI, der Richtung des Windes ſelbſt genommen, $=n$G.AB.c^3ſinη^3: um aber den Effect nach DF zu haben, muß man erwegen, daß auch der Druck DH$=n$G.AB.c^2tangη^2coſη geſetzt werden könne, und dieſer Druck würde eben ſo groß ſeyn, wenn der Wind mit der Geſchwindigkeit $c$tangη nach der Richtung EF unter dem Winkel ADE$=90°-\eta$ anſtieſſe. Demnach iſt der Effect

nach dieſer Richtung genommen $= DH . c \tan\eta =$ $nG.AB.c^3 \sin\eta^3$, alſo eben ſo groß, als der abſolute Effect nach DK. Wenn nun Hr. Schober den abſoluten Effect $= \frac{2P\pi b}{\tan\eta}$ annimmt, ſo verſteht er durch P den Druck DK nach der Richtung des Windes ſelbſt, alſo hätte er ohne Umſtände mit der Geſchwindigkeit des Windes ſelbſt multipliciren können, um den abſoluten Effect zu haben, der hier mit dem Effect nach DF genommen, welches eigentlich der Fall bey Windflügeln iſt, überein kommt. Dies wäre denn der Effect für eine Secunde geweſen, und für jede andre Zeit wäre er $= P.c.t$, oder Ps, wenn $s = c.t$ iſt. Man ſiehet aber wohl, daß die Ebene AB nach DF mit der Geſchwindigkeit $c \tan\eta$ ausweichen müſſe, wenn der Wind völlig frey fortgehen ſoll; wenn alſo in der Zeit t ihr Weg $= S$ iſt, ſo muß $\frac{S}{t} = \frac{s}{t}\tan\eta$ ſeyn, oder $s = \frac{S}{\tan\eta}$. Nun ſey AB das unterſte Stück des Windmühlenflügels, und η deſſen Neigungswinkel gegen die Richtung des Windes, t die Umlaufszeit, ſo iſt $S = 2\pi b$, und man hat die Schoberſche Regel $s = \frac{2\pi b}{\tan\eta}$, ohne überall an einen Schraubengang zu denken, der hier ganz überflüßig iſt. Der bey vielen mechaniſchen Schriftſtellern gewöhnliche ſehr unbeſtimmte Gebrauch der Wörter: **Kraft** und **Weg der Kraft**, wofür ich im 379 §. Mech. gewarnet habe, hat die Undeutlichkeit des Schoberſchen Vortrags hauptſächlich veranlaſſet.

221 §.

Die übrigen Vorſchriften, welche Herr Schober giebt, um den relativen Effect des Windes in Rechnung zu bringen, ſind im Grunde völlig einerley mit denjenigen, die ich vorhin aus der Parentſchen Theorie hergeleitet habe: ich weiß alſo nicht, wie H. Schober auf der 245 S. ſagen kan, daß es bey Anwendung derſelben auf Waſſer-Räder damit nichts heiſſe. Vorläufig bemerke ich, daß alles auf dergleichen ganz kurze Flügel, ſo wie ſie im 215 §. betrachtet ſind, eingeſchränkt bleibe. Der relative Effect war daſelbſt $= nGh^2\gamma x(c\text{tg}.\eta - \gamma . x)^2 \text{coſ}\eta^3$; oder wenn man $\frac{c\,\text{tang}\eta}{\gamma x} = z$, alſo $\gamma x = \frac{c\,\text{tang}\eta}{z}$ ſetzt, ſo wird derſelbe $= nGh^2 (z - 1)^2 . \frac{c^3\text{tang}\eta^3}{z^3} \text{coſ}\eta^3$, und es iſt $nGh^2c^2\text{tg}.\eta^2\text{coſ}\eta^3$ (220 §.) der Druck des Windſtoſſes gegen den ruhenden Flügel. Wird derſelbe nun $= P$ geſetzt, ſo iſt der relative Effect $= \frac{(z-1)^2}{z^2} . P . \frac{c\,\text{tang}\eta}{z}$, nemlich für eine Secunde, $\frac{c\,\text{tang}\eta}{z}$ iſt der Weg des Flügels in einer Secunde, und $\frac{(z-1)^2}{z^2} P$ der Druck des Windſtoſſes gegen den umlaufenden Flügel. Könnte nun der Druck P eine Laſt Q in gegebener Entfernung r von der Umlaufs-Axe im Gleichgewicht erhalten, ſo wird der Druck $\frac{(z-1)^2}{z^2} P$

mit einer Laſt $= \frac{(z-1)^2}{z^2} Q$ in eben der Entfernung von der Axe im Gleichgewicht ſeyn; und wenn eine Laſt $q = \frac{(z-1)^2}{z^2} Q$ in dieſer Entfernung angebracht iſt, ſo wird der Umlauf gleichförmig werden, wenn der Flügel die Geſchwindigkeit $\frac{c \tang \eta}{z}$ erreicht hat. Die Umlaufszeit der Flügel ſey $= t$, und der Weg des Windes in dieſer Zeit $= w$, ſo iſt $\frac{2\pi b}{t} = \frac{c \tang \eta}{z} = \frac{w \tang \eta}{t.z}$; (weil $c = \frac{w}{t}$,) alſo wird $w = \frac{2\pi b}{\tang \eta} . z$, oder $w = z.s$, wenn s wie im vor. §. den Weg bedeutet, welchen der Wind binnen einer Umlaufszeit der Flügel durchlaufen würde, wenn ſie dem Winde völlig auswichen. Zugleich wird alsdenn die Umlaufszeit $t = \frac{w}{c}$ gefunden, wenn z gefunden iſt. Nimmt man aber q als gegeben an, ſo verwandelt ſich obige Gleichung in folgende $Qz^2 - 2Qz + Q = qz^2$, oder $(Q-q)z^2 - 2Qz = -Q$, woraus ferner $z^2 - \frac{2Q}{Q-q} z = - \frac{Q}{Q-q}$, und $z = \frac{Q}{Q-q} \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2}{(Q-q)^2} - \frac{Q}{Q-q}\right)}$ gefunden wird. Schreibt man $\frac{w}{s}$ ſtatt z, ſo hat man

$$w = \frac{Qs}{Q-q} \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2 s^2}{(Q-q)^2} - \frac{Qs^2}{Q-q}\right)},$$

wie H. Schober a. a. O. 36 §. 252 S.

Wenn der Windflügel nach Vorſchrift des 216 §. gebogen iſt, und man ſich die Vorſtellung macht, daß derſelbe aus ſehr vielen ſchmalen Streifen unter gehörigen Neigungen gegen die Richtung des Windes zuſammen geſetzt ſey, ſo gilt eigentlich die vorgetragene Rechnung für jeden Streifen beſonders, und man findet für alle einerley, wenn b ſich wie tangη verhält, wie erfordert wird. Um aber $P = nGh^2c^2 \tang\eta^2 \cos\eta^3$, und daraus Q zu finden, könnte man für jeden Streifen die Rechnung beſonders vornehmen, und am Ende für den ganzen Flügel alles in eine Summe bringen. Herr Schober rechnet würklich ſo, (a. a. O. 28 §. 237 S.) und man kommt auf die Art dem geſuchten Werth nahe genug, wenn man nur die Streifen nicht gar zu breit annimmt. Vermittelſt der im 217 §. mitgetheilten Integralformul kan man alles richtiger und bequemer finden. Soll die Laſt Q in der Entfernung r von der Axe angebracht werden, ſo muß (217 §.) $\frac{1}{\nu} nGyac^2\lambda = Qr$ ſeyn, alſo $Q = \frac{nGyac^2\lambda}{\nu . r}$.

Was hier P hieß, kan man $= \frac{1}{\nu} nGyc^2\lambda$ annehmen, in der Vorausſetzung, als wenn dieſe Kraft am äuſſerſten Ende des Flügels angebracht wäre, und es iſt $\lambda = (\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta$. Ich werde nun dieſe Vorſchriften auf die im 214 §. ſchon erwehnte Schoberſche Mühle anwenden, und

die Abmeſſungen ſo annehmen, wie ſie im 26 §. ſeiner oft erwehnten Abhandlung angegeben werden.

222 §.

Es war bey dieſer Mühle $a = 10{,}7$ Fuß, $b = 2\frac{1}{2}$ Fuß, $y = 3{,}4$ Fuß, $\eta = 50°$, alſo $\tang \eta = 1{,}1917536$, und die Sproſſen waren nach dem Geſetz des 216 §. gewandt. Demnach war $b : a = \tang \eta : \tang \vartheta$, welches $\tang \vartheta = 4{,}3 \cdot \tang \eta = 5{,}1245405$, und $\vartheta = 78° 58'$ giebt, oder wie es Hr. Schober nur überhaupt angiebt, beynahe 80°. Beym Verſuch liefen die Flügel binnen $1\frac{1}{2}$ Secunden um, ſo daß man $\Theta = 1\frac{1}{2}$ und $\gamma = \frac{2\pi}{\Theta} = 4{,}1888$, alſo $\alpha = a\gamma = 44{,}82016$ Fuß erhält. Das giebt nun $z = \frac{c \tang \vartheta}{\alpha} = \frac{20 \cdot 5{,}1245405}{44{,}82016} = 2{,}286712$, und man ſiehet daraus, daß bey der angenommenen Wendung der Sproſſen der Umlauf ſchon etwas zu ſchnell geweſen ſey. Ferner findet man

$\cos \eta = 0{,}6427876$	$\sec \eta = 1{,}5557238$
$\cos \vartheta = 0{,}1913800$	$\cos \vartheta = 0{,}1913800$
$\cos \eta - \cos \vartheta = 0{,}4514076$	$\sec \eta - \cos \vartheta = 1{,}3643438$

Das Product iſt 0,6158750, und die fernere Multiplication mit $\operatorname{cosec} \vartheta = 1{,}0188321$ giebt $\lambda = 0{,}6274686$. Noch findet man $\frac{(z-1)^2}{z^2} = 0{,}316621$, und $v = \frac{\tang \vartheta}{a} = 0{,}478912$, alſo $\frac{(z-1)^2}{vz^2} = 0{,}661138$, und $\frac{c^2 (z-1)^2}{vz^2} =$

264,4552

264,4552. Weil ferner $4nGy = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3,4}{4 \cdot 151 \cdot 8}$ $= \frac{7 \cdot 1,7}{151 \cdot 4}$, ſo wird $F = \frac{4nGyc^2(z-1)^2}{vz^2}\lambda$ (218 §.) $= \frac{7 \cdot 1,7}{151} . 66,1138 . 0,6274686 =$ 3,2693 Pf., und $F\alpha = 146,5$ als der Effect für eine Secunde. Die Multiplication mit 3600 giebt ihn für eine Stunde $= 527400$, und der Verſuch gab ihn für eben die Zeit $= 518616$. Nach des Hn. Schobers Rechnung kommt die Zahl 626146 heraus, und die Urſache der Verſchiedenheit von der meinigen liegt darin, weil Hr. Schober die abſolute Gröſſe des Windſtoſſes etwas gröſſer in Rechnung bringt, ſo wie es ſeinen im 182 §. erzehlten Verſuchen gemäß iſt. Indeſſen habe ich bey der Rechnung den Pariſer Cubicfuß Waſſer zu 70 Pfund ſchwer angenommen, H. Schober aber rechnet nach Cöllniſchen Gewicht, und in demſelben wiegt ein Pariſer Cubicfuß Waſſer auf 73 Pfund. Deswegen muß der berechnete Effect eigentlich $= \frac{73}{70} . 527400$ $= 550000$ angenommen werden, um die Vergleichung mit dem Schoberſchen Verſuch deſto richtiger anzuſtellen, der alſo auch vermöge dieſer Rechnung ſehr ſchön mit der gemeinen Theorie übereinſtimmt. Bevor ich aber daraus fernere Schlüſſe ziehe, werde ich noch weiter unterſuchen, ob die data, welche ich mit Hr. Schober angenommen habe, völlig richtig ſind, wobey es denn beſonders auf den Umſtand ankommen wird: ob die Vorausſetzung, daß die Geſchwindigkeit des Windes 20 Fuß betragen habe, ſo ganz ſicher ſey.

223 §.

Es hatte ſchon in der Hydraulik ſeine Schwierigkeit, die Geſchwindigkeit des Waſſers in einem Strom vermittelſt dazu dienlicher Werkzeuge recht genau zu meſſen, und man ſiehet wohl, daß es nicht leichter ſeyn werde, die Geſchwindigkeit des Windes zu meſſen, wofern man ſich nicht mit einer ohngefehren Schätzung begnügen will. Werkzeuge, die dazu beſtimmt ſind, theils die Geſchwindigkeit des Windes, theils die Stärke des Windſtoſſes zu meſſen, heiſſen **Anemometer** oder **Windmeſſer**, und man muß ein ſolches Werkzeug vom **Windzeiger** unterſcheiden, welches die Gegend des Horizonts, woher der Wind kommt, anzeigt, alſo die Richtung des Windes zu finden dient. Gemeiniglich iſt beydes mit einander verbunden, wenn das Werkzeug bey meteorologiſchen Beobachtungen gebraucht wird, und die Richtung des Windes zeigen ſchon die gewöhnlichen Wetterfahnen, wiewohl nicht ſo vollkommen, als wenn man noch folgende Vorrichtung damit verbindet. Man befeſtiget die Windfahne auf ihrer Stange, (die in ſolcher Abſicht durch eine andre feſtſtehende Stange mit ein paar Ringen gehalten werden muß,) ſo daß ſich beydes zugleich mit dem Winde drehet: die bewegliche Stange läſt man in ein Zimmer hinab gehen, woſelbſt ſie einen Zeiger treibt, der auf einer Tafel oder Scheibe die Gegend des Horizonts anzeiget, woher der Wind bläſet. Wenn das Anemometer dienen ſoll, die Stärke des Windſtoſſes anzuzeigen, ſo erhält man es auf die einfachſte Art, wenn an einer Welle vier kleine gewöhnliche Windflügel angebracht werden, und zugleich eben die Welle mit einer coniſchen Spin-

del

del verſehen wird, worauf eine Schnur mit einem daran hängenden Gewicht aufgewickelt iſt. Man richtet die Spindel ſo ein, daß die Halbmeſſer der Gänge, worauf ſich die Schnur beym Umlauf der Flügel aufwickelt, nach und nach gröſſer werden, und dies verurſacht, daß der Wind die Flügel nur ſo lange umtreiben kan, bis das Moment des an der Schnur hängenden Gewichts, welches bey jedem Umlauf gröſſer wird, dem Moment des Windſtoſſes gegen die Flügel gleich iſt. Das vom H. von **Wolf** vorgeſchlagene Anemometer iſt ebenfalls eine Welle mit vier kleinen Windflügeln, dieſe Welle aber iſt mit einer Schraube ohne Ende verſehen, mit der Axe des dazu gehörigen Sternrades iſt rechtwinklicht ein Hebelsarm verbunden, und am äuſſerſten Ende deſſelben iſt ein Gewicht befeſtiget. Beym Umlauf der Flügel wird dies Gewicht gehoben, weil aber das Moment deſſelben ebenfalls wächſt, ſo hebt es jeder Wind nur auf eine gewiſſe Höhe. Dieſe Wolfiſche Einrichtung hat den Vortheil, daß der Hebelsarm, wenn die Stärke des Windes nachläſt, nicht zurückfällt, weil das Sternrad die Schraube nicht umdrehen kan: um eben daſſelbe bey der coniſchen Spindel zuwege zu bringen, muß man ein Sperr-Rad mit einem Sperrkegel anbringen. M. ſ. hievon Wolfii Elementa Math. Univerſæ T. II. Aerom. §. 182. pag. 405. ingleichen **Leupolds** Theatrum Machinarum Gener. 347. u. f. §§. 110 u. f. S. woſelbſt nebſt dem Wolfiſchen Anemometer verſchiedne andre Einrichtungen beſchrieben werden. Aus dem vermittelſt eines ſolchen Anemometers beobachteten Moment des Windſtoſſes lieſſe ſich zugleich die dermalige Geſchwindigkeit des Windes

finden,

finden, wenn die oben vorgetragene, und auf Windflügel angewandte Theorie vom Windſtoß völlig zuverläßig wäre. Weil ſie das nicht iſt, ſo würde ein ſolches Anemometer in vieler Abſicht nützlich ſeyn, welches die Geſchwindigkeit des Windes unmittelbar anzeigte. Weil überdem dieſe Geſchwindigkeit ſehr veränderlich iſt, und beſtändig ſtärkere und ſchwächere Stöſſe mit einander abwechſeln; ſo dienen eigentlich die eben beſchriebenen Anemometer nur dazu, von der Stärke der heftigſten Stöſſe zu urtheilen, da es doch ſehr nützlich wäre, wenn man die mittlere Geſchwindigkeit des Windes auf eine oder etliche Stunden wiſſen könnte. Eine jede mit einem Windrade verſehene kleine Maſchine, die ſo eingerichtet iſt, daß ein ganz mäßiger Wind das Rad ſchon zum Umlauf bringt, dient wenigſtens die Veränderungen in der Geſchwindigkeit des Windes anzuzeigen, weil das Rad beym ſtärkern Winde ſchneller, als beym ſchwächern umläuft: man darf alsdenn nur die Einrichtung ſo machen, daß ſich die Umläufe des Rades bequem zählen laſſen, oder auch die Maſchine vermittelſt eines Zeigers die Zahl der Umläufe ſelbſt angiebt. So iſt das Anemometer des Hrn. Ons-en Bray eingerichtet, wovon man in der Hiſtoire & Memoires de l'Academie de Paris A. 1734. pag. 169. Ed. Bat. die Beſchreibung findet. Es iſt ſehr zuſammen geſetzt, und zeiget nicht allein die Aenderungen in der Geſchwindigkeit und Richtung des Windes an, ſondern bemerkt dies alles auch auf einem Papier in Abweſenheit des Beobachters. Mit demſelben iſt eine Uhr verbunden, und wenn alles, nachdem die Uhr aufgezogen worden, gehörig eingerichtet iſt, ſo ſiehet man nach 24

Stun-

Stunden, was für Winde, und in welchen Stunden ſie gewehet haben, und wie ſich ihre Geſchwindigkeit geändert hat. Die ganze Maſchine ſteht in einem Zimmer, und wird durch ein oben auf dem Dach befindliches Windrad, welches a. a. O. moulin a la Polonoiſe genannt wird, in Bewegung geſetzet. Vermuthlich iſt ein horizontales Rad mit einem ſolchen Gehäuſe gemeynt, wie es im 193 §. beſchrieben worden. Die Erfindung eines ſolchen Windmeſſer ſcheint aber nicht urſprünglich franzöſiſch zu ſeyn: denn **Leupold** a. a. O. 315 §. erwehnt ſchon eines ähnlichen Windmeſſers, welches Hr. **Dinglinger** in **Dresden** in ſeinem Hauſe hat anbringen laſſen, und Leupolds Werk iſt im Jahr 1724 gedruckt.

224 §.

Weit einfacher und doch in gewiſſer Abſicht brauchbarer iſt das Anemometer, welches Hr. Schober in der oft angeführten Abhandlung im 13 §. angegeben, und bey dem Verſuch, wovon im 218 §. die Rede war, gebraucht hat, die Geſchwindigkeit des Windes zu meſſen. Daſſelbe war eine Welle mit vier kleinen Windflügeln, aus Stahl gemacht, vier Zoll lang, ohngefehr 1½ Linien dick, und dieſe Welle lief mit der Spitze in Meßing, am Halſe aber, wo ſie eine Hohlkehle hatte, und nur 1 Linie dick war, in Horn. Die Ruthen waren von jungen Eichenholz, etwa 1½ Linien dick, und von der Axe bis mitten auf die Flügel gemeſſen, vier Zoll lang; folglich war der Kreis, den ihr Mittelpunct bey einer Umwendung durchlief, im Umfang 2½ Fuß. Die Flügel waren aus dünnen meßingenen Blech gemacht,

macht, und hatten auf der hintern Seite eine Hülſe, mittelſt welcher ſie auf die Ruthen aufgeſteckt und nach Gefallen gewendet werden konnten: ihre Breite war beynahe 2 Zoll 6 Linien, und ihre Höhe, nach der Länge der Ruthe gemeſſen, 1 Zoll 3 Linien. Dieſe Welle ward beym Gebrauch in die Richtung des Windes gebracht, und die Flügel wurden grade gegen den Wind geſtellt, der ſie alsdenn zum Umlauf brachte, und bey einer unveränderlichen Umlaufs-Geſchwindigkeit ſo lange erhielte, als ſeine mittlere Geſchwindigkeit dieſelbe blieb. Um nun die jedesmalige Umlaufs-Geſchwindigkeit der Flügel zu erfahren, war an der Welle eine Schraube ohne Ende, und an dem Lager, worin die Welle lief, eine kleine Klocke angebracht, darin der Hammer mittelſt zweener Stifte, ſo in dem Sternrad befeſtiget waren, gehoben ward. Das Sternrad hatte zwölf Zähne, und die Stifte ſaſſen an demſelben einander grade gegen über, deswegen geſchahe allemahl nach ſechs Umläufen der Flügel ein Schlag auf die Klocke. Wenn aber der Umlauf ſo ſchnell war, daß die Schläge nicht wohl gezählet werden konnten, ſo ward ein Stift heraus genommen, da dann nach zwölf Umläufen jedesmahl ein Schlag auf die Klocke erfolgen muſte. Zählte man nun, wie viel Schläge auf die Klocke in einer Minute, oder in einer längern bekannten Zeit geſchahen, ſo war es leicht, die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Flügel daraus herzuleiten, und es kam alsdenn darauf an, aus dieſer Umlaufs-Geſchwindigkeit der Flügel die Geſchwindigkeit des Windes zu finden, die er während der Zeit der Beobachtung gehabt hatte. Dabey wäre es denn freylich wohl am bequemſten, wenn

man

man die Einrichtung ſo machen könnte, daß die Geſchwindigkeit, womit entweder der Schwerpunct der Flügel, oder ſonſt ein andrer bekannter Punct, in ſeinem Kreiſe umläuft, mit der Geſchwindigkeit des Windes einerley ſeyn müſte. Man ſiehet wohl, daß dies von der Wendung der kleinen Flügel gegen ihre Umlaufsaxe abhängen wird, und Hr. Schober meint durch Verſuche, die er mit kleinen Flügeln auf ähnliche Art wie mit den Flächen, ſo wie es im 181 §. beſchrieben iſt, angeſtellt hat, gefunden zu haben, daß dieſe Flügel gegen die Umlaufsaxe unter einem Winkel von 52° geneigt ſeyn müſſen, wenn die Geſchwindigkeit, womit ihr Schwerpunct umläuft, mit der Geſchwindigkeit des Windes einerley ſeyn ſoll. Wie weit dieſe Erfahrung mit der Theorie übereinſtimme, verdient nun wohl noch eine nähere Prüfung, die ſich auf folgende Art anſtellen läſt.

225 §.

Die Flügel werden ſo lange vom Winde beſchleuniget werden, bis die Würkung des Windſtoſſes gegen ſie völlig aufhört, und ſobald dies erfolgt iſt, wird ihre Umlaufsgeſchwindigkeit dieſelbe bleiben, ſo lange die Geſchwindigkeit des Windes ſich nicht ändert. Demnach findet die Aufgabe des 203 §. hier ihre Anwendung, die auf eine Gleichung zwiſchen c und γ führte, woraus c gefunden werden kan, wenn γ gegeben iſt. Es ſey der Abſtand des Schwerpuncts der Flügel von der Bewegungsaxe $=f$, ſo iſt $f\gamma$ die Geſchwindigkeit des Schwerpuncts, und wenn man die Gleichung des 203 §. durch $f^2\gamma^2$ dividirt,

hiernächſt aber $\frac{c\,\text{tang}\,\vartheta}{f\gamma} = z$ ſetzt, ſo erhält man

$$\frac{C-F}{f^2} - \frac{2(B-E)}{f}z + (A-D)z^2 = 0.$$

Aus dem 204 §. erhält man ferner

$$\frac{C-F}{f^4} = \tfrac{1}{4}e\left(\frac{a^4+b^4}{f^4} - 2z^4\right),$$

$$\frac{B-E}{f^3} = \tfrac{1}{3}e\left(\frac{a^3+b^3}{f^3} - 2z^3\right),$$

und

$$\frac{A-D}{f^2} = \tfrac{1}{2}e\left(\frac{a^2+b^2}{f^2} - 2z^2\right).$$

Dieſe Werthe geben alsdenn die Gleichung

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{a^4+b^4}{f^4} - 2z^4\right) - \tfrac{2}{3}\left(\frac{a^3+b^3}{f^3} - 2z\right)z$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{f^2} - 2z^2\right)z^2 = 0.$$

Hiebey bemerke ich zuförderſt vorläufig, daß der Werth $z = 1$ dieſer Gleichung ein Genüge leiſtet, wenn b ſehr nahe $= a$ iſt. Denn es iſt $f = \tfrac{1}{2}(a+b)$ (bey rechteckigten Flügeln, wie die Schoberſchen waren) demnach wird $\frac{a^4+b^4}{f^4} = \frac{a^3+b^3}{f^3} = \frac{a^2+b^2}{f^2} = 2$, wenn $b = a$ wird, und dies wäre der im 215 §. betrachtete Fall, wenn die Flügel in Vergleichung mit der Länge der Ruthen ſehr kurz ſind. Es iſt auch evident, daß im 215 §. das Mo-

ment

ment $\mu = 0$ werde, wenn $c \tang \vartheta = \gamma x$, alſo $\frac{c \tang \vartheta}{\gamma x} = 1$ iſt. Die Vorausſetzung $c = \gamma x$ würde alſo $\tang \vartheta = 1$, und $\vartheta = 45°$ geben. Dieſe Folge muß ihre Richtigkeit haben, die oben vorgetragene Theorie vom Windſtoß mag noch ſo ſehr fehlerhaft ſeyn: denn der Wind kann alsdenn offenbar keine Würkung auf eine Ebene haben, wenn beyde nach der auf der Ebene ſenkrechten Richtung mit einerley Geſchwindigkeit fortgehen. Die Schoberſchen Flügel kommen nun den im 215 §. betrachteten ziemlich nahe, und deswegen ſcheint es, daß ihr Wendungswinkel nicht viel von 45° unterſchieden ſeyn müſte, wenn ſie ſo, wie ſie Hr. Schober gebraucht hat, dienen ſollen, die Geſchwindigkeit des Windes zu meſſen. Indeſſen war das Verhältniß ihrer Länge zur ganzen Länge der Ruthen, wie ohngefehr $1 : 4\frac{1}{2}$, oder $2 : 9$, und der Bruch $\frac{2}{9}$ iſt ſo gar klein noch nicht, daß jene Vorausſetzung ſchlechthin beſtehen könnte. Ich will deswegen verſuchen, was eine ſchärfere Rechnung geben würde.

Um abzukürzen ſetze man $\frac{a^4 + b^4}{f^4} = \lambda$, $\frac{a^3 + b^3}{f^3} = \mu$, $\frac{a^2 + b^2}{f^2} = \nu$, und ordne die gefundene Gleichung nach den Potenzen von z, ſo wird $z^4 - (\frac{8}{9} + \frac{1}{3}\nu)z^2 + \frac{4}{9}\mu z - \frac{1}{6}\lambda = 0$. Die Abmeſſungen der Flügel waren nun $a = 4{,}65$ Zoll, $b = 3{,}35$ Zoll, $f = \frac{1}{2}(a + b) = 4$ Zoll, alſo findet man $\lambda = 2{,}3182692$, $\mu = 2{,}1584375$, und $\nu = 2{,}0528125$, folglich wird

$$z^4 - 1,5731597 \, . \, z^2 + 0,9593055 \, . \, z - 0,3863782 = 0.$$

Der Werth $z = 1$ thut dieſer Gleichung noch ziemlich nahe ein Genüge, und man kan nach dem 496 §. dem Werth von z noch näher kommen. In ſolcher Abſicht nehme man $z = 1$ an, und ſetze den Werth, welchen dieſe Vorausſetzung giebt, $= F$ wie im 496 §. ſo wird $F = -0,0002324$. Weiter ſetze man $z^4 - \alpha \, . \, z^2 + \beta z - \gamma = y$, und verſtehe durch α, β, γ, die Coefficienten der gefundenen Gleichung; ſo iſt $(4z^3 - 2\alpha z + \beta) dz = dy$, und $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{4z^3 - 2\alpha z + \beta} = 0,551576$, wenn auch in dieſem Ausdruck $z = 1$ geſetzt wird. Demnach erhält man $z = 1,00012817$; und weil $z = \frac{c \operatorname{tang} \vartheta}{f\gamma}$ angenommen iſt, ſo wird erfordert, daß $\operatorname{tang} \vartheta = 1,00012817$ ſey, wenn $f\gamma = c$ ſeyn ſoll. Zu dieſer Tangente gehört ein Winkel, der den Winkel von 45° noch nicht um eine Minute übertrift, deswegen ſcheint es, daß die Neigung der Flügel von 52° viel zu groß ſey, als daß die Geſchwindigkeit des Schwerpuncts mit der Geſchwindigkeit des Windes hätte einerley ſeyn können.

Bey der Vorausſetzung $c = f\gamma$ iſt z mit $\operatorname{tang} \vartheta$ einerley, und wenn man $\vartheta = 52°$ nimmt, ſo iſt $\operatorname{tang} \vartheta = 1,28 = z$. Das giebt

$$z^4 + 0,9593055 \, . \, z = 4,3162651, \quad \text{und}$$

$$1,5731579 \, . \, z^2 + 0,3863782 = 2,9634428.$$

Beyde Werthe müſten vermöge der gefundenen Gleichung gleich groß ſeyn, wenn $\vartheta = 52°$ die rechte

Wen-

Wendung der Flügel wäre, wobey die Geſchwindigkeit des Schwerpuncts mit der Geſchwindigkeit des Windes übereinkommt: alſo darf man wohl dem Schoberſchen Verſuch, was dieſe Wendung betrift, nicht ſchlechthin trauen. Auſſer der ſchon gefundenen poſitiven Wurzel $z = 1,00012817$ hat die Gleichung noch eine mögliche negative, nemlich $z = -1,536592$ beynahe, die aber nicht gebraucht werden kan. Denn $z = \frac{c \operatorname{tang} \vartheta}{f \gamma}$ kan, wofern c poſitiv bleiben ſoll, nicht negativ werden, wofern nicht entweder $\operatorname{tang} \vartheta$, oder γ, und zwar jedes für ſich allein, negativ iſt. Aber zu $-\operatorname{tang} \vartheta$ gehört ein ſtumpfer Winkel, und wenn ϑ ſtumpf wird, ſo können die Flügel auf die Art nicht mehr umlaufen, wie die Rechnung vorausſetzt, ſondern ſie müſſen auf entgegen geſetzte Art umlaufen, und alsdenn kann z nicht negativ ſeyn. Auch umgekehrt, wenn die Flügel auf entgegengeſetzte Art umlaufen ſollen, ſo muß ϑ ſtumpf oder negativ ſeyn, und ſo wird auch $\operatorname{tang} \vartheta$ negativ, da dann wiederum z poſitiv ſeyn muß.

Die übrigen beyden Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung ſind unmöglich; denn vermöge einer Regel, deren Erfindung gewöhnlich dem Engelländer Harriot zugeſchrieben wird, nach welcher aus der Beſchaffenheit der Zeichen vor den Gliedern der Gleichung auf die Beſchaffenheit der Wurzeln, wenn ſie möglich ſind, geſchloſſen werden kann, und wovon die Algebra umſtändlichern Unterricht geben wird, müſten die noch übrigen Wurzeln beyde poſitiv ſeyn, wenn ſie möglich wären. Es iſt aber offenbar, daß kein andrer poſitiver Werth für z als

der ſchon gefundene der Gleichung ein Genüge leiſten könne, wie man auf folgende Art überſiehet. Der Werth $z=0$ giebt $y=-0{,}3863782$, und jeder eigentliche Bruch ſtatt z geſetzt giebt ebenfals einen negativen Werth für y: doch nehmen dieſe negativen Werthe deſto mehr ab, je gröſſere Brüche man ſtatt z ſetzt, auch iſt y noch negativ für $z=1$, und verſchwindet, wenn $z=1{,}000128\ldots$ geſetzt wird. Gröſſere Werthe für z geſetzt geben allemahl poſitive Werthe für y, und y wächſt beſtändig, wenn z wächſt. Deswegen kan es weiter keinen möglichen Werth geben, der ſtatt z geſetzt die Gleichung $y=0$ zuwege bringt.

226 §.

Ich ſchlieſſe aus dieſem allen, daß die Flügel an dem Schoberſchen Anemometer gegen die Axe unter einem Winkel von 45° hätten geneigt ſeyn müſſen, wenn die Geſchwindigkeit des Windes mit der Geſchwindigkeit ihres Schwerpuncts hätte einerley ſeyn ſollen. Es iſt wohl wahr, daß die Flügel nicht ſo ganz vollkommen frey geweſen ſind, wie die Rechnung vorausſetzt; denn die Ruthen hatten den Widerſtand der Luft zu überwinden, und es war auch etwas Kraft nöthig, den kleinen zur Klocke gehörigen Hammer zu heben. Allein der Widerſtand der Luft gegen ſo dünne Stäbe, deren Dicke nur $1\frac{1}{2}$ Lin. betrug, konnte wohl nicht erheblich ſeyn, und die wenige Kraft, welche den Hammer zu heben nöthig war, muſte um ſo mehr eine ungemeine Kleinigkeit betragen, weil ſie vermittelſt einer Schraube ohne Ende würkte. Ob mir alſo gleich das Schoberſche Anemometer unter allen andern, die ich bisher kenne,

am

am beſten gefällt, ſo würde ich doch die Flügel nicht unter dem Winkel von 52° wenden, ſondern den Winkel von 45° wählen. Uebrigens werde ich nun den Schoberſchen Verſuch, davon im 219 §. die Rede war, näher prüfen.

Das Anemometer ſowohl als die Windmühle, welche eine Pumpenkunſt trieb, wurden in die gehörige Lage gegen den Wind gebracht, ſo daß beyde Wellen mit der Richtung des Windes parallel waren, und Hr. Schober beobachtete an einer Secunden-Uhr, wieviel Schläge auf der Klocke des Anemometers binnen 30 Secunden geſchahen. Seine Gehülfen aber muſten bemerken, wievielmahle die Mühle binnen eben den 30 Secunden umgieng, bey deren Anfang und Ende er ihnen jedesmahl durch einen Stoß ein Zeichen gab. Folgende Tafel enthält das Reſultat ihrer Beobachtungen, worin die Columne A anzeigt, wieviel Schläge auf der Klocke des Windmeſſer in 30 Secunden geſchehen ſind, und die Columne B, wieviel mahl die Mühle in eben den 30 Secunden umgelaufen iſt.

A	B	A	B
32	28	30	28
21	19	28	24
29	25	28	24
38	36	20	18
40	38	24	26
24	24	24	20
32	34	26	20
30	28	28	26
36	34	18	14
28	26	20	18
24	24	20	20
40	36	18	18
23	22	22	22
32	32	25	22
26	27	30	30
28	26	28	31
20	20	21	22
24	22	26	28
28	26	26	26
26	28	27	26

Vermöge dieſer Tabelle iſt ein paar mahl der Fall vorgekommen, daß binnen 30 Secunden 18 bis 20 Klockenſchläge am Windmeſſer geſchehen, und dieſe zugleich mit 18 bis 20 Umläufen der Mühle *beglei*tet geweſen ſind. Auf dieſe Fälle bauet Hr. Schober ſeine Rechnung: ein Umlauf der Mühle iſt nun in $1\frac{1}{2}$ Secunden geſchehen, und der Windmeſſer iſt in 30 Secunden 12 × 20 d. i. 240 mahl, folglich in 1 Secunde 8 mahl umgelaufen. Die Ruthen bis auf die Mitte der Flügel gemeſſen waren 0,4 Fuß lang, und zu dieſem Halbmeſſer gehört ein Kreis, deſſen Umfang 2,5 Fuß iſt, der alſo 8 mahl genom-

men 20 Fuß giebt. Das war demnach in den erwehnten Fällen die Geſchwindigkeit des Schwerpuncts der Flügel am Windmeſſer, welche Hr. Schober mit der Geſchwindigkeit des Windes für einerley hält. Allein vermöge der Schlüſſe des vor. §. war

ſehr nahe $z = \frac{c \tan\vartheta}{f\gamma} = 1$, alſo $c = \frac{f\gamma}{\tan\vartheta}$,

und $f\gamma$ war $= 20$ Fuß, $\tan\vartheta = 1{,}28$; demnach

wäre $c = \frac{2000}{128} = 15{,}625$ Fuß geweſen. Indeſſen kommen auch andre Fälle in derſelben Tabelle vor, wo bey 20 Umläufen der Mühle 24 ja 26 Schläge auf die Klocke des Windmeſſers geſchehen ſind, und wenn dieſe Fälle zum Grunde gelegt werden, ſo ſcheint es, daß 20 Fuß ganz richtig für die Geſchwindigkeit des Windes angenommen ſind. Ueberhaupt entdeckt man bey genauerer Vergleichung der Zahlen in der Tabelle kleine Unregelmäßigkeiten, die es wahrſcheinlich machen, daß die Mühle nicht immer gleich viel zu thun gehabt habe: ihre Umlaufsgeſchwindigkeit hat zuweilen bey zunehmender Geſchwindigkeit des Windes abgenommen und umgekehrt, wie man bey Vergleichung der 15ten und 16ten, der 19ten und 20ſten, der 25ſten und 26ſten Beobachtung finden wird. Bey den beyden letzten war die Geſchwindigkeit des Windes einerley, und das eine mahl lief doch die Mühle 26 mahl, das andre mahl nur 20 mahl um. Ich getraue mir deswegen nicht mit vollkommener Sicherheit aus dieſen Verſuchen zu ſchlieſſen, und begnüge mich damit, nur ſoviel daraus zu folgern, daß die bisher vorgetragene Theorie von dem Windflügeln dadurch ziem-

ſich beſtättiget werde, und daß man alſo nicht Urſache habe, die gemeine Theorie vom Windſtoß für ſo ſehr fehlerhaft zu halten, als Hr. Schober aus ſeinen Verſuchen, die er im kleinen angeſtellt hat, zu ſchlieſſen berechtiget zu ſeyn glaubt.

227 §.

Zum Beſchluß dieſer Unterſuchung wäre noch wohl zu prüfen übrig, ob gebogene Flügel vor den ebenen Flügeln einen Vorzug haben, und worin derſelbe beſtehe? Die Schoberſche Mühle hatte nicht völlig eben die Abmeſſungen, wie die Belidorſche, deren Effect im 211 §. für eine Secunde $= 155{,}3$ Pf. gefunden iſt, ſonſt würde aus Vergleichung dieſes Effects mit dem Effect der Schoberſchen von 146,5 Pf. folgen, daß den ebenen Flügeln der Vorzug gebühre: doch war auch der Umlauf der Schoberſchen Mühle, wie oben bemerkt iſt, etwas zu ſchnell. Ich will deswegen zur Probe die Abmeſſungen der Belidorſchen Mühle behalten, und den möglichſt gröſten Effect ſuchen, welchen ſie bey gehöriger Wendung der Sproſſen zuwege bringen könnte. Es war $a = 10$, $b = 3$, e oder $y = 4$, und $c = 20$ Fuß. Weil nun $z = 3$ und $\text{tang}\,\eta = \frac{3\gamma b}{c}$ ſeyn muß, ſo ſey $\gamma = \pi = \frac{22}{7}$, wie im 211 §, und man erhält $\text{tang}\,\eta = \frac{9}{20} \cdot \frac{22}{7} = \frac{99}{70} = 1{,}414286$, alſo $\eta = 54^\circ\, 44'$. Ferner wird $\text{tang}\,\vartheta = \frac{10}{3} \cdot 1{,}414286 = 4{,}714286$, alſo $\vartheta = 78^\circ\, 1'$. Es iſt aber $M = \frac{4nG\gamma c^4 (z-1)^2}{z^4 \gamma}$ (ſec ϑ + coſ ϑ

— ſecη — coſη) (217 §.), und man findet

$$\frac{4nGyc^4(z-1)^2}{z^4y} = \frac{7.160000.7}{151.81.11} =$$

58,34653. Ferner wird

ſecϑ = 4,81632	ſecη = 1,73195
coſϑ = 0,20762	coſη = 0,57738
5,02394	2,30933
— 2,30933	
2,71461.	

Dieſer Reſt in 58,34653 multiplicirt, giebt M = 158,4. Wenn dieſe Flügel eben ſind, ſo iſt ihr Effect bey eben der Umlaufs-Geſchwindigkeit = 155,3, alſo gewinnet es das Anſehen, daß beyderley Art Flügel faſt einerley Dienſte thun können, wenn ſie gehörig geordnet ſind. Eine Vergleichung im allgemeinen läſt ſich ſo anſtellen.

Für die gebogenen Flügel war M =

$$\frac{nGyc^3a(z-1)^2}{z^3}(\text{coſ}\eta - \text{coſ}\vartheta)(\text{ſec}\eta - \text{coſ}\vartheta)\text{coſec}\vartheta$$

(217 §.), für ebene Flügel aber

$$M = \frac{nGyc^3a\sin\vartheta^3}{z^3} \cdot \frac{Pa^2z^2 - 2Qaz + R}{a^4y},$$

(208 §.), da dann die Integrale P, Q, R, von a und b abhängen, ſo wie auch in der erſten Formul η und ϑ davon abhängen. In der erſten Formul iſt allemahl $z = 3$, in der andern aber muß z ſo genommen werden, daß $Pa^2z^2 - 4Qaz + 3R = 0$ wird, und alsdenn iſt für ebene Flügel M =

$$\frac{nGayc^3\sin\vartheta^3}{z^3} \cdot \frac{2(Qaz - R)}{a^4y}.$$ Wenn ich nun zum Unterſcheid von den gebogenen Flügeln hier ψ

ſtatt

ſtatt ϑ ſchreibe, und annehme, daß a, b, γ, y, ζ für beyde Art Flügel einerley ſeyn ſoll; ſo beruhet der Vorzug der einen oder andern Art Flügel darauf, ob der Ausdruck $\frac{4}{27}(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta$ gröſſer oder kleiner ausfällt, als $\frac{2(Qaz - R)\sin\psi^3}{a^4 z^3 y}$. Wenn man die Integrale Q und R gehörig berechnet, ſo fällt y aus der Rechnung weg, (weil alle Sproſſen gleich lang angenommen werden,) und beyde Ausdrücke hängen nur von b und a nebſt c und γ ab. Bey ebenen Flügeln iſt allemahl ohngefehr $z = 2$, und wenn a in Vergleichung mit b ſehr groß iſt, noch etwas kleiner als 2. Alsdenn iſt beynahe $Q = \frac{1}{3}a^3 y$, und $R = \frac{1}{4}a^4 y$, alſo $2(Qaz - R) = \frac{5}{6}a^4 y$. Ueberdem wird ohngefehr $z^3 = 8$, alſo $\frac{2(Qaz - R)}{a^4 z^3 y} = \frac{5}{48}$. Schätzt man ψ ohngefehr auf 75°, ſo iſt $\sin\psi^3 = 0{,}9$, und es wird $\frac{5}{48}\sin\psi^3 = 0{,}09375$. Bey ſehr langen gebogenen Flügeln wird ohngefehr $\eta = 45°$ und ϑ höchſtens $= 85°$ genommen werden müſſen; alsdenn iſt

$\cos\eta = 0{,}7071068$	$\sec\eta = 1{,}4142136$
$\cos\vartheta = 0{,}0871557$	$\cos\vartheta = 0{,}0871557$
Reſt $= 0{,}6199511$	Reſt $= 1{,}3270579$

Ferner iſt $\operatorname{cosec}\vartheta = 1{,}0038198$, und alle drey Zahlen in einander multiplicirt, geben 0,8258515. Dies noch mit $\frac{4}{27}$ multiplicirt, giebt 0,122348. Die Vergleichung dieſer Zahl mit der vorigen ergiebt, daß jene ſich zu dieſer beynahe wie $1 : 1{,}25 = 1 : 1\frac{1}{4}$ verhalte, alſo wird man bey gebogenen Flügeln höchſtens $\frac{1}{4}$ des Effects der ebenen

Flügel

Flügel gewinnen, wenn ſonſt alles übrige gleich iſt.

228 §.

Gegen dieſe Rechnung mögte man den Zweifel erregen, daß ich den Winkel ϑ gar wohl gröſſer, als von 85° hätte in Anſchlag bringen können, da dann die Vergleichung des Effects für die gebogenen Flügel vortheilhafter würde ausgefallen seyn: allein ich antworte: weil $\gamma = \frac{c \tang \vartheta}{az}$, und z nicht gröſſer als 3 seyn muß, ſo würde ein Winkel ϑ, der 85 Grad überträfe, eine ſehr groſſe Umlaufs-Geſchwindigkeit geben, es müſte denn a ſehr groß seyn, und c nur ſehr mittelmäßig in Anſchlag gebracht werden. Man wird dies aus dem folgenden Exempel ſehen, welches ich zur Prüfung der bisher vorgetragenen Theorie noch beyfügen will. H. Lulofs hat beobachtet, daß bey der Geſchwindigkeit des Windes von 30 Fuß eine auf holländiſche Art eingerichtete Windmühle in einer Minute 1500 Cubicfuß Waſſer 4 Fuß hoch bringen könne, wenn jeder von den 4 Flügeln 43 Fuß lang und 5½ Fuß breit iſt. Dieſe Beobachtung hat er dem Hrn. Euler mitgetheilt, der ihrer in der ſchon mehrmahl angeführten Abhandlung Recherches plus exactes &c. Hiſtoire de l'Academie de Berlin, A. 1756. pag. 169. §. VIII. erwehnt. H. Lulofs hat weder die eigentliche Geſtalt der Flügel, noch ihre Umlaufszeit bey der Bobachtung angegeben; er ſagt nur, daß die Sproſſen nicht gleich ſtark gewandt geweſen, daß der mittlere Wendungswinkel etwa 73° betragen habe, und daß der äuſſerſte Wendungswinkel beynahe = 90° geweſen ſey.

ſey. Muthmaßlich hätten alſo die äuſſerſten Wendungswinkel 88° und 58° betragen: hiebey würde aber bey Anwendung der bisherigen Theorie die Vorausſetzung $z=3$ nicht beſtehen können, denn man würde $\gamma = \frac{30 \cdot 28{,}6362533}{3 \cdot 43} = 6{,}66$, alſo $\Theta = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{6{,}283}{6{,}66}$ noch etwas kleiner, als 1 Secunde finden. Ob ich nun gleich wohl weiß, daß die holländiſchen Windflügel ſehr ſchnell umlaufen, ſo ſcheint doch dieſer Schwung bey ſo groſſen Flügeln zu ſtark zu ſeyn, und das äuſſerſte, was man annehmen kan, iſt wohl $\Theta = 2$ Secunden, alſo $\gamma = \pi = \frac{22}{7}$. Das würde $\tang \vartheta = \frac{43 \cdot 22 \cdot 3}{7 \cdot 30} = 13{,}5$, folglich $\vartheta = 85\frac{3}{4}°$ geben, und der Schwung bleibt noch immer ſehr ſtark, ſo daß ich faſt zweifle, ob der Umlauf ſo ſchnell geweſen ſey. Ich will indeſſen dieſe Vorausſetzung bey Berechnung des Effects annehmen, ob ich gleich auch zweifle, daß die Sproſſen nach dem Geſetz des 216 §. gebogen geweſen ſind: denn die oben angeführten Holländiſchen Mühlenbücher ſchreiben eine andre Regel vor. Gewöhnlich iſt die niedrigſte Sproſſe 4 bis 5 Fuß von der Umlaufsaxe entfernt: ich will indeſſen nur 3 Fuß annehmen, ſo muß $\tang \eta = \frac{3}{43} \cdot 13{,}5 = \frac{40{,}5}{43}$, beynahe $=1$, und $\eta = 45°$ ſeyn, wenn das Geſetz des 216 §. beobachtet wird. Demnach findet man

$$\begin{array}{rl} \sec\vartheta = & 13,54676 \\ \cos\vartheta = & 0,07381 \\ \hline & 13,62057 \\ & -1,70710 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \sec\eta = & 1,00000 \\ \cos\eta = & 0,70710 \\ \hline & 1,70710 \end{array}$$

Reſt 11,91347 beynahe = 12.

Ferner wird im Rheinländiſchen Maaß $g = 15,625$, und wenn man den Effect in Cubicfuſſen Waſſer ſucht, ſo iſt $G = \frac{1}{800}$, alſo erhält man (217 §.)

$$\frac{4nGyc^4(z-1)^2}{z^4\gamma} = \frac{5,5 \cdot 810000 \cdot 4 \cdot 7}{15,625 \cdot 800 \cdot 81 \cdot 22}$$

$= \frac{77000}{625 \cdot 22} = 5,6$, und die Multiplication mit 12 giebt den Effect für eine Secunde $= 67,2$, alſo für eine Minute $= 4032$ Cub. Fuß, und die Mühle würde nach dieſer Rechnung 1008 Cub. Fuß heben. Dies wäre nur $\frac{2}{3}$ deſſen, was nach des H. Lulofs Beobachtung eine ohngefehr ſo eingerichtete Mühle ausrichten kan, und dieſe Beobachtung iſt der gemeinen Theorie vom Windſtoß nicht ſo günſtig, als die Schoberſche. Ich mögte indeſſen daraus doch eben nicht ſo ganz ſicher ſchlieſſen, daß der Effect des Windſtoſſes ſehr viel gröſſer ſey, als er der gemeinen Theorie gemäß ſeyn ſollte, weil es bey Beobachtungen dieſer Art auf viele kleine Umſtände ankommt, die man alle genau kennen muß, wenn man mit Sicherheit über den Effect urtheilen will, den eine Maſchine würklich geleiſtet hat. Ein Irrthum in Schäzung der Geſchwindigkeit des Windes kan das Reſultat der Rechnung ſehr ändern, und von der eigentlichen Dichtigkeit der Luft zur Zeit des Verſuchs

Verſuchs müſte man ſich von Rechts wegen ebenfalls beſſer zu verſichern ſuchen, weil auch dieſer Umſtand in das Reſultat der Rechnung einen nicht ganz unerheblichen Einfluß hat.

Der XII. Abſchnitt.

Von Windflügeln, deren Umlaufsaxe mit der Richtung des Windes nicht parallel liegt.

229 §.

Die Richtnug des Windes iſt gegen die Umlaufsaxe des Windflügels unter einem gegebenen Winkel geneigt, der Flügel iſt eine ebene Fläche, ſeine Geſtalt und Gröſſe nebſt ſeiner Umlaufsgeſchwindigkeit und der Geſchwindigkeit des Windes ſind gegeben: man ſucht das Moment des Windſtoſſes gegen den Flügel.

65 Fig. Aufl. Es ſey EHFI der Flügel CA die Windruthe, CD die Umlaufsaxe, und die Richtung des Windes ſey mit CX parallel. Durch einen unbeſtimmten Punct P der Windruthe ſey PQ mit CD, und PZ mit CX parallel, ſo iſt PZ die Richtung des Windes, und die Aufgabe iſt leicht aufgelöſt, ſobald man die Lage dieſer Richtung gegen die Ebene des Flügels kennet. Es ſey MN eine Ordinate des Flügels auf der Windruthe ſenkrecht, und M ein unbeſtimmter Punct dieſer Ordinate: übrigens aber ſey die Figur völlig ſo, wie im 195 und 196 §. gezeichnet,

net, ſo iſt SW eine Ebene durch M, welche die Axe CD ſenkrecht ſchneidet, und dies iſt zugleich die Ebene des Kreiſes, worin M umläuft. Wenn nun PQ und PZ rückwärts verlängert dieſe Ebene in V und z treffen, ſo iſt Vz die Durchſchnittslinie der Ebene SW mit der Ebene des Winkels QPZ, und dieſe Ebene ſteht auf SW ſenkrecht. Ueberdem ſey PR auf der Ebene des Flügels ſenkrecht, und treffe SW in dem Punct ϱ, ſo wird SW von der Ebene des Winkels $VP\varrho$ in $V\varrho$ geſchnitten; und weil PVz, $PV\varrho$ rechte Winkel ſind; ſo iſt $zV\varrho$ mit dem Neigungswinkel der Ebenen VPz und $VP\varrho$ gegen einander einerley. Der Neigungswinkel NPQ des Flügels gegen die Umlaufsaxe ſey wie im 195 und 196 §. $= \vartheta$, der Winkel QPZ des Windes mit der Umlaufsaxe aber $= \zeta$; überdem ſey $zV\varrho = \phi$; ſo hat man an der Spitze P ein körperliches Dreyeck, worin der Winkel an $PV = \phi$, nebſt den anliegenden Seitenflächen $VPz = QPZ = \zeta$ und $VP\varrho = 90° - VPM = 90° - \vartheta$, als gegeben anzuſehen ſind; demnach findet man dem 550 §. Geom. gemäß $\cos \varrho Pz = \cos VPz \cos VP\varrho + \cos \varrho Vz \sin VPz \sin VP\varrho$. Wird alsdenn der Winkel $= \psi$ geſetzt, unter welchem die Richtung des Windes Pz gegen die Ebene des Flügels geneigt iſt, ſo hat man $\varrho Pz = 90° - \psi$, und es wird $\sin\psi = \cos\zeta \sin\vartheta + \cos\phi \sin\zeta \cos\vartheta$. Wenn nun die im 196 §. gebrauchten Buchſtaben auch hier die dortige Bedeutung behalten, ſo iſt die Geſchwindigkeit des Windes nach der auf den Windflügel ſenkrechten Richtung $= c\sin\psi = c(\cos\zeta \sin\vartheta + \cos\phi \sin\zeta \cos\vartheta)$; die Geſchwindigkeit aller Puncte des Elements MmnN aber nach eben dieſer Richtung $= \gamma x \cos\vartheta$. Demnach wird der ſenkrechte Druck des Windes ge-

gen das Element $Mmn N$ des Flügels
$= nGydx(\mathrm{coſ}\,\zeta\,\mathrm{ſin}\,\vartheta + c\,\mathrm{coſ}\,\varphi\,\mathrm{ſin}\,\zeta\,\mathrm{coſ}\,\vartheta - \gamma x\,\mathrm{coſ}\,\vartheta)^2$ (191 §.) und die Multiplication mit $\mathrm{coſ}\,\vartheta$ giebt den Druck nach der Richtung der Bewegung PT. Dieſer Druck mit x multiplicirt giebt das ſtatiſche Moment, und die fernere Multiplication mit γ das mechaniſche Moment des Windſtoſſes nach der Richtung der Umlaufsbewegung.

In der gefundenen Formul bleiben die Winkel ζ und ϑ einerley, der Flügel mag während ſeines Umlaufs in eine Lage kommen, in welche er wolle: dagegen aber ändert ſich φ beym Umlauf des Flügels beſtändig, und man wird ſich auf folgende Art am deutlichſten vorſtellen, was es eigentlich mit dieſem veränderlichen Winkel für eine Bewandniß habe. Gewöhnlich legt man die Axe der Windflügel, wenn man ſie gegen die Richtung des Windes neigt, ſo, daß wenigſtens die verticale Ebene durch die Axe mit der Richtung des Windes parallel iſt: und wenn man dies vorausſetzt, ſo iſt die Ebene DCX vertical. Durch DC ſey noch eine Ebene ſenkrecht auf DCX geſetzt, und ab ſey ihre Durchſchnittslinie mit SW, ſo iſt ab horizontal. Ich will der Kürze wegen DCX die erſte, und Dab die zweyte Hauptebene nennen, ſo ſteht SW auf beyden Hauptebenen ſenkrecht, und man muß ſich alle drey als unbeweglich vorſtellen. Wenn nun SW von der Ebene DCX in SY geſchnitten wird, ſo liegt SY in der erſten Hauptebene, und dieſe Linie hat in der Ebene SW eine unveränderliche Lage ſo wie auch ab; dagegen aber läuft SV mit dem Flügel um: und wenn SV mit SY zuſammen fällt, ſo ſteht die Windruthe in der erſten Hauptebene; wenn aber SV mit Sa oder Sb zuſam-

men fällt, ſo liegt die Windruthe in der zweyten Hauptebene, und iſt in dieſem Stande zugleich horizontal. Man ſtelle ſich nun vor, daß SV im Anfang der Bewegung mit Sa zuſammen falle, und von Sa gegen SY zulaufe: ſo iſt im Anfang der Bewegung die Ebene $MP\varrho$ vertical, und VPz fällt mit $VP\varrho$ zuſammen, weil VPz allemahl vertical iſt. In jedem andern Stande iſt Vz mit SY parallel, alſo $SVz = VSY$, folglich $zV\varrho = aSV = \varphi$. Sobald SV über SY hinaus in SV′ fällt, welches erfolgt, wenn ſich die Windruthe um einen Quadranten gedrehet hat, ſo fällt Vz über VS hinaus in Vz'. Will man nun den Anfang der Bewegung von dem Stande der Windruthe anrechnen, wenn ſie in der erſten Hauptebene liegt, und mit der Richtung des Windes einen ſpitzen Winkel macht, ſo kan man $YSV' = SVz'$ durch φ verſtehen: alsdenn aber iſt derjenige Winkel $= 90^\circ + \varphi$ der vorhin φ hieß, und man muß in der gefundenen Formul $\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi$ ſtatt $\cos\varphi$ ſchreiben. Nun wird das ſtatiſche Moment des Windſtoſſes gegen das Element $MmnN$ des Flügels $=$

$$\eta G x y dx (c.\cos\zeta\sin\vartheta - e\sin\varphi\sin\zeta\cos\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2 \cos\vartheta,$$

und dies iſt Hr. Eulers Ausdruck in der Abhandlung de Conſtructione aptiſſima molarum alatarum §. 29. Comment. Nov. Petrop. Tom. IV. p. 67.

Wenn ſich nun gleich φ beym Umlauf des Flügels beſtändig ändert, ſo muß man doch bey Integration der gefundenen Formul φ als beſtändig betrachten, weil man die Summe aller Momente, oder das ganze Moment des Windſtoſſes gegen den Flügel für jede gegebene Lage deſſelben ſucht: und da kan man mit Vortheil $\sin\psi$ ſtatt $\cos\zeta\sin\vartheta - \sin\varphi$

$\sin\zeta\cos\vartheta$ ſchreiben. Man laſſe nun den Buchſtaben S und M die Bedeutung des 199 §. ſo erhält man

$$dS = nG(xydxc^2\sin\psi^2\cos\vartheta - 2x^2ydx.c\gamma\sin\psi\cos\vartheta^2 + x^3ydx\gamma^2\cos\vartheta^3);$$

und wenn P, Q, R, ebenfals die Bedeutung des 199 §. behalten, ſo wird $S =$

$$nG(Pc^2\sin\psi^2\cos\vartheta - 2Qc\gamma\sin\psi\cos\vartheta^2 + R\gamma^2\cos\vartheta^3),$$

und $M = \gamma . S$.

Wofern alle Elemente des Windflügels vom Winde nach der Richtung ihrer Bewegung fortgetrieben werden, und keinem entgegengeſetzten Druck ausgeſetzt ſeyn ſollen, ſo muß $c\sin\psi$ nicht kleiner als $\gamma x\cos\vartheta$ ſeyn (202 §.). Nun iſt $\sin\psi = \cos\zeta\sin\vartheta - \sin\varphi\sin\zeta\cos\vartheta$ am kleinſten, wenn $\varphi = 90°$ iſt, demnach muß $c(\cos\zeta\sin\vartheta - \sin\zeta\cos\vartheta)$ nicht kleiner ſeyn, als $\gamma x\cos\vartheta$, oder $\frac{c\sin(\vartheta-\zeta)}{\gamma x\cos\vartheta}$ nicht kleiner als 1. Damit alſo der Flügel in keiner Lage zum Theil rückwärts getrieben werden könne, muß $\vartheta > \zeta$ ſeyn, weil ſonſt $\sin(\vartheta-\zeta)$ negativ würde: das heiſt der Wendungswinkel des Flügels gegen die Axe muß gröſſer ſeyn, als der Neigungswinkel der Axe gegen die Richtung des Windes.

230 §.

Eine Maſchine wird durch vier gleiche und ähnliche ebene Windflügel getrieben, woran die Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes unter einem gegebenen Winkel $= \zeta$ geneigt iſt: man ſucht das Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen.

Aufl.

Aufl. Wenn man einen Flügel als den erſten betrachtet, wozu das Element $Mm n N$ gehört, ſo iſt das Moment des Stoſſes gegen dies Element $= dS = nGxydx(c.\cos\zeta\sin\vartheta - c\sin\varphi\sin\zeta\cos\vartheta - yx\cos\vartheta)^2\cos\vartheta$. Für die übrigen drey Flügel wird es nun in gleicher Entfernung x ein gleiches und ähnliches Element geben, und das Moment des Stoſſes gegen dies Element wird eben die Formul ausdrücken, nur mit dem Unterſcheid, daß man $\varphi + 90°$, $\varphi + 180°$, $\varphi + 270°$ nach der Ordnung für den zweyten, dritten und vierten Flügel ſtatt φ ſchreiben muß; da dann $\sin(\varphi + 90°) = \cos\varphi$, $\sin(\varphi + 180°) = -\sin\varphi$, und $\sin(\varphi + 270°) = -\cos\varphi$ wird. Um abzukürzen ſchreibe man X ſtatt $c.\cos\zeta\sin\vartheta - yx\cos\vartheta$, ſo erhält man für dS nach der Ordnung der vier Flügel folgende Ausdrücke:

I) $nGxydx(X^2 - 2Xc.\sin\varphi\sin\zeta\cos\vartheta + c^2\sin\varphi^2\sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta$

II) $nGxydx(X^2 - 2Xc.\cos\varphi\sin\zeta\cos\vartheta + c^2\cos\varphi^2\sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta$

III) $nGxydx(X^2 + 2Xc.\sin\varphi\sin\zeta\cos\vartheta + c^2\sin\varphi^2\sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta$

IV) $nGxydx(X^2 + 2Xc.\cos\varphi\sin\zeta\cos\vartheta + c^2\cos\varphi^2\sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta$.

Nun verſtehe man künftig durch dS die Summe dieſer vier Momente, ſo wird $dS =$

$$nGxydx(4(c.\cos\zeta\sin\vartheta - yx\cos\vartheta)^2 + 2c^2\sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta,$$

und das Integral hievon giebt das Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen.

Hiebey iſt merkwürdig, daß der veränderliche

Winkel φ aus der Rechnung wegfällt: es folgt daraus, daß das Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen beſtändig einerley bleibt, ſie mögen beym Umlauf in eine Lage kommen, in welche ſie wollen. Behalten übrigens die Buchſtaben P, Q, R, die im vor. §. angenommene Bedeutung, ſo findet man das geſuchte Moment

$$S = nG(4Pc^2 \cos\zeta^2 \sin\vartheta^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta\sin\vartheta\cos\vartheta + 4R\gamma^2\cos\vartheta^2 + 2Pc^2\sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta,$$

oder

$$S = nG(4Pc^2\cos\zeta^2\tan\vartheta^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta\tan\vartheta + 4R\gamma^2 + 2Pc^2\sin\zeta^2)\cos\vartheta^3,$$

und das mechaniſche Moment M iſt $= \gamma . S$.

Wenn ζ nur wenige Grade ausmacht, ſo iſt dies Moment beynahe eben ſo groß, als es ſeyn würde, wenn die Umlaufsaxe mit der Richtung des Windes parallel wäre, weil nun $\sin\zeta^2$ ſehr klein, und $\cos\zeta$ beynahe $= 1$ iſt.

231 §.

Bey einer gegebenen Neigung der Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes denjenigen Neigungswinkel der Flügel gegen die Umlaufsaxe zu finden, wobey das Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen für den erſten Anfang der Bewegung am gröſten iſt.

Aufl. So lange die Flügel nicht merklich von der Stelle gerückt ſind, iſt $S = nG2Pc^2(2\cos\zeta^2\sin\vartheta^2 + \sin\zeta^2\cos\vartheta^2)\cos\vartheta$ und damit dieſer Ausdruck am gröſten werde, muß $d.(2\cos\zeta^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta + \sin\zeta^2\cos\vartheta^3) = 0$ ſeyn. Dies giebt

$$4\cos\zeta^2\sin\vartheta\cos\vartheta^2 - 2\cos\zeta^2\sin\vartheta^3 - 3\sin\zeta^2\cos\vartheta^2\sin\vartheta = 0,$$

$= 0$, und daraus folgt
$2\cos\zeta^2 \sin\vartheta^2 = 4\cos\zeta^2 \cos\vartheta^2 - 3\sin\zeta^2 \cos\vartheta^2$; wird ferner mit $2\cos\zeta^2\cos\vartheta^2$ dividirt, ſo erhält man $\tang\vartheta^2 = 2 - \frac{3}{2}\tang\zeta^2$, alſo $\tang\vartheta = \sqrt{(2 - \frac{3}{2}\tang\zeta^2)}$.

Wenn $\zeta = 0$ iſt, ſo giebt dieſer Ausdruck $\tang\vartheta = \sqrt{2}$, wie erfordert wird: und wenn $\tang\zeta = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}154700$ iſt, alſo $\zeta = 49° 6'$, ſo muß $\vartheta = 0$ ſeyn; da dann das Moment $S = 2nGPc^2 \sin\zeta^2$ wird. Ueberhaupt muß ϑ deſto kleiner ſeyn, je gröſſer ζ iſt, und wenn $\zeta > 49° 6'$ wäre, ſo würde $\tang\vartheta$ unmöglich werden: das heiſt, es giebt nun gar keinen gröſten Werth für S, und das Moment kan nicht gröſſer werden, als es in dem Fall wird, wenn $\vartheta = 0$ iſt. Weil übrigens das Moment S von beiden Winkeln ζ und ϑ abhängt, ſo kan man noch fragen, wie groß ſowohl ζ als auch ϑ genommen werden müſſen, damit S am gröſten werde.

Um dies zu beantworten, ſucht man auch die Gleichung $dS = 0$ in der Vorausſetzung, daß allein ζ veränderlich ſey, da dann $2\sin\zeta\cos\zeta\cos\vartheta^2 - 4\cos\zeta\sin\zeta\sin\vartheta^2 = 0$, alſo $\sin\zeta\cos\zeta = 0$ gefunden wird. Folglich muß entweder $\sin\zeta = 0$, oder $\cos\zeta = 0$ ſeyn. Das letzte würde $\sin\zeta = 1$, und $\tang\zeta = \infty$ geben, da dann $\tang\vartheta$ unmöglich würde. Demnach wird erfordert, daß $\sin\zeta = 0$ ſey, da dann $\cos\zeta = 1$ und $\tang\zeta = 0$, folglich $\tang\vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird. Hieraus ergiebt ſich alſo, daß der Wind im erſten Anfang der Bewegung gegen die Flügel die meiſte Gewalt alsdenn ausübe, wenn die Umlaufsaxe mit der Richtung des Windes parallel iſt, und die Flügel gegen die Umlaufsaxe unter einem Winkel von $35\frac{1}{4}°$ geneigt ſind.

232 §.

Bey gegebener Neigung der Umlaufs-Axe ſowohl gegen die Richtung des Windes, als auch die Ebene der Flügel, die Umlaufs-Geſchwindigkeit zu finden, wobey das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen am gröſten wird.

Aufl. Wenn man $dM = d.\gamma S = 0$ ſetzt, ſo findet man die Gleichung $6R\gamma^2 - 8Qc\gamma \cos\zeta \operatorname{tang}\vartheta + 2Pc^2 \cos\zeta^2 \operatorname{tang}\vartheta^2 + Pc^2 \sin\zeta^2 = 0$, und daraus folgt

$$\gamma^2 - \frac{4Qc \cos\zeta \operatorname{tang}\vartheta}{3R} . \gamma = - \frac{Pc^2 \cos\zeta^2 \operatorname{tang}\vartheta^2 + \frac{1}{2} Pc^2 \sin\zeta^2}{3R}.$$

Demnach erhält man

$$\gamma = \frac{2Qc. \cos\zeta \operatorname{tang}\vartheta}{3R} \pm \sqrt{\left(\frac{4Q^2c^2. \cos\zeta^2 \operatorname{tang}\vartheta^2}{9R^2} - \frac{Pc^2 \cos\zeta^2 \operatorname{tang}\vartheta^2 + \frac{1}{2} Pc^2 \sin\zeta^2}{3R} \right)},$$

und dieſer Ausdruck läßt ſich auch ſo verändern

$$\gamma = \frac{c \operatorname{tang}\vartheta \cos\zeta}{3R} (2Q \pm \sqrt{4Q^2 - 3P.R - \tfrac{3}{2}P.R.\operatorname{tang}\zeta^2 \cot\vartheta^2}).$$

Aus dem 223 §. weiß man, daß $\frac{c \sin(\vartheta - \zeta)}{a\gamma \cos\vartheta}$ nicht kleiner als 1 ſeyn müſſe: demnach muß γ nicht gröſſer ſeyn, als $\frac{c \sin(\vartheta - \zeta)}{a \cos\vartheta}$, und daraus läßt ſich beurtheilen, welche von beyden Wurzeln gewählt werden müſſe.

233 §.

Bey gegebener Neigung der Umlaufs-Axe gegen die Richtung des Windes und gegebener Umlaufs-Geſchwindigkeit der Flügel ihren vortheilhafteſten Wendungswinkel zu finden.

Aufl. Man ſetze wiederum $d \,.\, \gamma S = 0$, und nehme allein ϑ als veränderlich an, ſo findet man

$$\left(4Pc^2 . \cos\zeta^2 . \frac{2 \mathrm{tg}.\vartheta}{\cos\vartheta^2} - 8Qc\gamma\cos\zeta . \frac{1}{\cos\vartheta^2}\right)\cos\vartheta^3$$
$$-3(4Pc^2 . \cos\zeta^2 \,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 4R\gamma^2$$
$$+ 2Pc^2 \sin\zeta^2)\cos\vartheta^2 \sin\vartheta = 0.$$

Man dividire mit $2\cos\vartheta$, und nehme die entgegen geſetzten Zeichen, ſo wird $(6Pc^2 . \cos\zeta^2 \,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 12Qc\gamma\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 6R\gamma^2 + 3Pc^2 \sin\zeta^2)\cos\vartheta\sin\vartheta$

$$-4Pc^2\cos\zeta^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 4Qc\gamma\cos\zeta = 0.$$

Ferner multiplicire man die beyden letzten Glieder mit $\sin\vartheta^2 + \cos\vartheta^2 = 1$, und dividire hiernächſt mit $\cos\vartheta^2$, ſo verwandelt ſich die Gleichung in folgende,

$$2Pc^2\cos\zeta^2 . \mathrm{tang}\,\vartheta^3 - 8Qc\gamma\cos\zeta . \mathrm{tang}\,\vartheta^2 + (6R\gamma^2 - 4Pc^2\cos\zeta^2 + 3Pc^2\sin\zeta^2)\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 4Qc\gamma\cos\zeta = 0.$$

Wenn man dieſe Gleichung mit $\gamma\gamma$ dividirt, ſo läſt ſie ſich auch ſo ausdrücken,

$$\left(\frac{2Pc^2\cos\zeta^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2}{\gamma\gamma} - \frac{8Qc\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{\gamma} + 6R + \frac{3Pc^2\sin\zeta^2}{\gamma\gamma}\right) \times \mathrm{tang}\,\vartheta = \frac{4Pc^2\cos\zeta^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{\gamma\gamma} - \frac{4Qc\cos\zeta}{\gamma}.$$

Nun ſetze man $\frac{c . \cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{a\gamma} = \mu$, und $\frac{c\sin\zeta}{a\gamma} = \nu$; ſo

 wird

wird $\frac{c^2 \cos\zeta^2 \tang\vartheta^2}{\gamma\gamma} = a^2\mu^2$, $\frac{c^2 \cos\zeta^2 \tang\vartheta}{\gamma\gamma}$ $= \frac{a^2\mu^2}{\tang\vartheta}$, $\frac{c \cos\zeta}{\gamma} = \frac{a\mu}{\tang\vartheta}$, und man erhält die Gleichung $(2Pa^2\mu^2 - 8Qa\mu + 6R + 3Pa^2\nu^2)$ $. \tang\vartheta = \frac{4Pa^2\mu^2}{\tang\vartheta} - \frac{4Qa\mu}{\tang\vartheta}$, woraus nun $\tang\vartheta = \sqrt{\frac{4(Pa^2\mu^2 - Qa\mu)}{(2\mu^2+3\nu^2)Pa^2 - 8Qa\mu + 6R}}$ gefunden wird. Es wird nemlich γ und ζ als gegeben angenommen, alſo ſind auch μ und ν gegeben.

Wenn $\zeta = 0$ iſt, ſo wird $\nu = 0$, und die Gleichung giebt alsdenn den Werth von $\tang\vartheta$, welcher im 207 §. gefunden ward, und μ wird nun das, was dort z war.

234 §.

Die Lage der Axe gegen die Richtung des Windes iſt gegeben: man ſucht, wie groß ſowohl die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Flügel, als auch ihr Neigungswinkel gegen die Umlaufs-Axe ſeyn müſſe, damit das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen am gröſten werde.

Aufl. Die vortheilhafteſte Umlaufs-Geſchwindigkeit wird durch die Gleichung

$6R\gamma^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta\tang\vartheta + 2Pc^2\cos\zeta^2\tang\vartheta^2$
$+ Pc^2\sin\zeta^2 = 0$ beſtimmt (232 §.). Dieſe dividire man durch γ^2, und ſetze alsdenn

$\frac{c . \cos\zeta \tang\vartheta}{a\gamma} = \mu$, $\frac{c \sin\zeta}{a\gamma} = \nu$, ſo erhält man

I.)

I.) $6R - 8Qa\mu + 2Pa^2\mu^2 + Pa^2\nu^2 = 0$.
Den vortheilhafteſten Winkel ϑ beſtimmt die Gleichung II.) $\tang\vartheta =$

$$\sqrt{\frac{4(Pa^2\mu^2 - Qa\mu)}{(2\mu^2 + 3\nu^2)Pa^2 - 8Qa\mu + 6R}} \text{ (233 §.)},$$

und wenn man die vorige Gleichung n. I. damit verbindet, ſo verwandelt ſich der Nenner in den Ausdruck $2Pa^2\nu^2$, ſo daß man $\tang\vartheta = \sqrt{\frac{2\mu(Pa\mu - Q)}{Pa\nu^2}}$ erhält, oder $\tang\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\sqrt{\frac{2(Pa\mu - Q)}{Pa\mu}}$. Nun hat man auch $\sin\zeta = \frac{a\gamma}{c}.\nu$, und $\cos\zeta = \frac{a\gamma}{c} \cdot \frac{\mu}{\tang\vartheta}$, demnach wird $\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta} = \tang\zeta = \frac{\nu}{\mu}\tang\vartheta$, und $\text{tg.}\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\tang\zeta$.
Beyde Werthe von $\tang\vartheta$ einander gleich geſetzt, geben $\tang\zeta = \sqrt{\frac{2(Pa\mu - Q)}{Pa\mu}}$, und daraus folgt $Pa\mu \tang\zeta^2 = 2Pa\mu - 2Q$, alſo wird $\mu = \frac{2Q}{Pa(2 - \tang\zeta^2)}$. Aus der Gleichung n. I. findet man ferner $\nu = \sqrt{\frac{8Qa\mu - 2Pa^2\mu^2 - 6R}{Pa^2}}$, und alsdenn hat man $\tang\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\tang\zeta$, ſo wie auch $\gamma = \frac{c\sin\zeta}{a\nu}$.

Dieſe

Dieſe Auflöſung findet nur in den Fällen ihre Anwendung, wenn $\mu - \nu$ gröſſer, oder wenigſtens nicht kleiner als 1 gefunden wird: auch könnte wohl y unmöglich werden, wenn $8Qa\mu < 2Pa^2\mu^2 + 6R$ wäre. Die Bedingung, daß $\mu > 1$ ſeyn muß, erfordert, daß $2Q > Pa(2 - \text{tang}\,\zeta^2)$ ſey, alſo $2 - \text{tg}\,\zeta^2 < \frac{2Q}{Pa}$, oder $\text{tang}\,\zeta > \surd\left(2 - \frac{2Q}{Pa}\right)$.

Wenn die Flügel Rechtecke ſind, und ihre Breite $= e$, die Länge der Windruthen $= a$, die Entfernung der nächſten Sproſſe von der Axe $= a$, alſo die Länge der Flügel $= a - b$ iſt, wie im 200 §.; ſo hat man $P = \frac{1}{2}e(a^2 - b^2)$, $Q = \frac{1}{3}e(a^3 - b^3)$, und $R = \frac{1}{4}e(a^4 - b^4)$. Es ſey, wie im 206 §, $a =$ 10 Fuß, $b = 3$ Fuß, alſo $a - b = 7$ Fuß, $e = 4$ Fuß, ſo findet man $P = 45{,}5 \cdot e$, $Q = 324\frac{1}{3} \cdot e$, $R = 2479{,}75 \cdot e$; alſo ferner $\surd\left(2 - \frac{2Q}{Pa}\right) =$ 0,757865. Zu dieſer Tangente gehört der Winkel von 37° 9′: wenn demnach ζ kleiner ſeyn ſoll, als dieſer Winkel, ſo kan man die gegebene Auflöſung nicht brauchen, und man muß alsdenn das folgende Verfahren anbringen.

Man nimmt am füglichſten γ willkührlich an; denn aus dem 209 §. weiß man ſchon, daß es rathſam ſey, den Flügeln einen etwas ſchnellen Umlauf zu geben. Hiedurch wird $\nu = \frac{c \sin \zeta}{a\gamma}$ beſtimmt, und weil $\text{tang}\,\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\,\text{tang}\,\zeta$ war, ſo kommt es nur noch darauf an, μ zu finden. Dazu dient die Gleichung

chung n. I. woraus man $2Pa^2\mu^2 - 8Qa\mu = -6R - Pa^2y^2$ erhält, oder $\mu^2 - \frac{4Q}{Pa}\cdot\mu = -\frac{6R+Pa^2y^2}{2Pa^2}$, und es wird

$$\mu = \frac{2Q}{Pa} \pm \sqrt{\left(\frac{4Q^2}{P^2a^2} - \frac{3R}{Pa^2} - \tfrac{1}{2}y^2\right)},$$

oder $\mu = \frac{2Q \pm \sqrt{(4Q^2 - 3P.R - \frac{1}{2}P^2a^2y^2)}}{Pa}$.

Die Gleichung num. II. kan man nun weiter nicht brauchen, und man hat auch ſchon tang$\vartheta = \frac{\mu}{y}$ tangζ.

Es ſey nun im vorigen Exempel $\zeta = 30°$, alſo ſin$\zeta = \frac{1}{2}$, ſin$\zeta^2 = \frac{1}{4}$, cos$\zeta^2 = \frac{3}{4}$, folglich tang$\zeta = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Ferner nehme man $\gamma = 2$ an, und $c = 20$ Fuß, ſo wird $y = \frac{c\,\text{ſin}\zeta}{a\gamma} = \frac{1}{2}$. Uebrigens findet man $4Q^2 = 420768\frac{4}{9}$, $3P.R = 338485{,}875$, $\frac{1}{2}P^2a^2y^2 = 25878{,}125$, und $\sqrt{(4Q^2 - 3P.R - \frac{1}{2}P^2a^2y^2)} = 237{,}5$, folglich $\mu = \frac{684\frac{2}{3} + 237{,}5}{455} = 1{,}945$, und $\mu - y = 1{,}445$. Das giebt nun ferner $\frac{\mu}{y} = \frac{1945}{500} = 3{,}89$, und tang$\vartheta = 3{,}89 . 0{,}5773503 = 2{,}2458926$, folglich $\vartheta = 66°$. Im 224 §. war nun das mechaniſche Moment des Windſtoſſes $M = nG\gamma\,(4Pc^2 \cos\zeta^2 \tan\vartheta^2 - 8Qc\gamma \cos\zeta \tan\vartheta + 4R\gamma\gamma + 2Pc^2 \sin\zeta^2)\cos\vartheta^3$,

und

und wenn man $c.\cos\zeta \tang\vartheta = a\gamma\mu$, $c\sin\zeta = a\gamma\nu$ ſetzt, ſo wird $M = nG\gamma^3 \cos\vartheta^3 (4Pa^2\mu^2 - 8Qa\mu + 4R + 2Pa^2\nu^2)$, oder $M =$

$$\frac{nGc^3 \cos\zeta^3 \sin\vartheta^3}{a^3\mu^3}(4Pa^2\mu^2 - 8Qa\mu + 4R + 2Pa^2\nu^2).$$

Wenn die Anordnung nach der bisherigen Rechnung gemacht iſt, ſo hat man $2Pa^2\mu^2 - 8Qa\mu + 6R + Pa^2\nu^2 = 0$, und das giebt

$$M = nG\gamma^3 \cos\vartheta^3 ((2\mu^2 + \nu^2)Pa^2 - 2R).$$

In Zahlen findet man ferner $2\mu^2 + \nu^2 = 7{,}816$; $(2\mu^2 + \nu^2)Pa^2 - 2R = (7{,}816 \,.\, 4550 - 4959{,}5) \,.\, 4 = 122413{,}2$; und $nG\gamma^3 \cos\vartheta^3 = \frac{7}{4.15{,}1.80} \,.\, 8 \,.\, 0{,}40675^3 = \frac{7.0{,}0673}{4.151}$, folglich $M = \frac{7.0{,}0673}{151} \,.\, 30603{,}3 = 95{,}5.$

235 §.

Wenn man bey einerley Winkel ζ die Umlaufsgeſchwindigkeit γ gröſſer annimmt, ſo wird ν kleiner, und μ gröſſer: weil aber $\frac{\tang\vartheta}{\mu} = \frac{\tang\zeta}{\nu}$ bleibt, ſo muß $\tang\vartheta$, folglich auch $\sin\vartheta$ wachſen. Die Zahl $\mu = \frac{2Q}{Pa} + \frac{\sqrt{(4Q^2 - 3P.R - \frac{1}{2}P^2a^2\nu^2)}}{Pa}$ wächſt nur wenig, wenn gleich ν ſtark abnimmt, und weil $\cos\vartheta$ abnimmt, und $\sin\vartheta$ wächſt, wenn $\tang\vartheta$ wächſt, ſo wird auch $\frac{\sin\vartheta}{\mu}$ wachſen, wenn ν abnimmt,

nimmt; folglich wird M wachſen, wenn γ wächſt. Demnach iſt auch bey geneigter Lage der Umlaufsaxe ein ſchneller Umlauf aus mehr als einer Urſache vortheilhaft. Man nehme im vorigen Exempel $\gamma = \pi = \frac{22}{7}$, ſo wird die Umlaufszeit 2 Secunden betragen, und man findet $\nu = \frac{c \sin \zeta}{a\pi} = \frac{1}{\pi} = \frac{7}{22}$, alſo $\frac{1}{2}Pa^2\nu^2 = 10479$, $\sqrt{(4Q^2 - 3P.R - \frac{1}{2}P^2a^2\nu^2)} = 268$, und $\mu = \frac{684\frac{2}{3} + 268}{455} = 2,1$. Das giebt $\frac{\mu}{\nu} = 2,1 . \frac{22}{7} = 0,3.22 = 6,6$, und $\tang \vartheta = 6,6.0,5773503 = 3,810512$, folglich $\vartheta = 75°18'$. Ferner wird $2\mu^2 + \nu^2 = 8,9213$; $(2\mu^2 + \nu^2)Pa^2 - 2R = (8,9213.4550 - 4959,5).4 = 142529,66$, und $nG\gamma^3 \cos\vartheta^3 = \frac{7}{4.151.8} : \frac{22^3}{7^3}.0,2538^3 = \frac{11^3}{4.151.7^2}.0,2538^3$, folglich $M = \frac{11^3.0,0165.142529,66}{4.151.7^2} = \frac{11^3.0,00825.71264,83}{151.7^2} = \frac{11^3.0,00825.1454,4}{151} = 105,8$. Die Vergleichung mit der vorigen Rechnung ergiebt, daß dies Moment würklich gröſſer ausfalle, als bey der Vorausſetzung $\gamma = 2$: indeſſen iſt es bey weiten nicht ſo groß, als es im 211 §. bey eben der Vorausſetzung $\gamma = \pi$ gefunden ward, wo $\zeta = 0$ war. Eine etwas genauere Betrachtung der Formul $M = nG\gamma^3 \cos\vartheta^3((2\mu^2 + \nu^2)Pa^2 - 2R)$ ergiebt

giebt auch leicht die Urſache. Wenn ζ abnimmt, ſo nimmt auch ν ab, und μ wächſt, ſo wie auch $\cos\zeta$ gröſſer wird. Wenn nun ϑ einerley bliebe, ſo würde $\frac{c\cos\zeta}{\mu} = \frac{a\gamma}{c\,\mathrm{tang}\,\vartheta}$ auch unverändert bleiben, wenn γ nicht geändert wird. Es muß aber auch $\frac{\mathrm{tang}\,\vartheta}{\mu} = \frac{\mathrm{tang}\,\zeta}{\nu}$ bleiben, und ν nimmt mit $\sin\zeta$ in einerley Verhältniß ab, folglich nimmt $\mathrm{tang}\,\zeta$ ſtärker ab, als ν, und $\frac{\mathrm{tang}\,\zeta}{\nu}$ nimmt ebenfals mit ζ ab. Wenn nun μ nicht in eben dem Verhältniß zunimmt, ſo muß auch $\mathrm{tang}\,\vartheta$ etwas abnehmen, folglich $\cos\vartheta$ wachſen, und die Zahl $2\mu^2 + \nu^2$ wächſt auch, obgleich ν abnimmt, denn ν iſt gewöhnlich ein Bruch und $\mu > 1$.

Dieſe Schlüſſe führen auf die Vermuthung, daß von der Neigung der Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes kein Vortheil zu hoffen, ſondern vielmehr die parallele Lage der Axe mit der Richtung des Windes allemahl die beſte ſey, wenn anders keine beſondre Nebenumſtände die geneigte Lage anrathen. Indeſſen verdient doch die Frage eine *etwas* nähere Unterſuchung: ob es nicht Fälle geben könnte, wo bey einer geneigten Lage der Axe das Moment des Windſtoſſes gröſſer als bey der parallelen Lage würde? und das läſt ſich auf folgende Art prüfen.

236 §.

Wenn $\zeta = 0$ iſt, ſo hat man $M =$
$nG\gamma(4Pc^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 8Qc\gamma\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 4R\gamma^2)\cos\vartheta^3$,

in

in andern Fällen aber iſt $M =$
$nG\gamma(4Pc^2\cos\zeta^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 4R\gamma^2 + 2Pc^2\sin\zeta^2)\cos\vartheta^3$ (230 §.)
Von dem erſten Ausdruck ziehe man den letzten ab, ſo wird der Reſt $= nG\gamma\cos\vartheta^3(4Pc^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2\sin\zeta^2 - 2Pc^2\sin\zeta^2 - (1-\cos\zeta)8Qc\gamma\,\mathrm{tang}\,\vartheta)$; und nun ſiehet man wohl, daß M nur in ſolchen Fällen bey einer geneigten Lage der Axe gröſſer als bey der parallelen Lage ausfallen könne, wenn für dieſen Reſt ein negativer Ausdruck gefunden wird. Es iſt aber dieſer Reſt allemahl negativ, wenn $2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 < 1$, alſo $\mathrm{tang}\,\vartheta < \frac{1}{2}$, oder $\vartheta < 35°\,16'$ iſt. Demnach iſt unter dieſer Bedingung jede geneigte Lage der Axe vortheilhafter, als die mit der Richtung des Windes parallele Lage. Wenn dagegen $2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 > 1$ iſt, ſo werden hiezu folgende Bedingungen erfordert: es muß $(1-\cos\zeta)8Qc\gamma\,\mathrm{tg.}\,\vartheta + 2Pc^2\sin\zeta^2 > 4Pc^2\,\mathrm{tg.}\,\vartheta^2\sin\zeta^2$ ſeyn, oder wenn man mit $1+\cos\zeta$ multipl. $8Qc\gamma\,\mathrm{tg.}\,\vartheta + 2Pc^2(1+\cos\zeta) > 4Pc^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2(1+\cos\zeta)$, folglich $1 + \cos\zeta < \frac{4Q\gamma\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{Pc(2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 1)}$ ſeyn. Demnach iſt der Winkel $\zeta = 0$ der vortheilhafteſte, wenn $1 + \cos\zeta$ allemahl $> \frac{4Q\gamma\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{Pc(2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 1)}$ bleibt, was auch $\cos\zeta$ für einen Werth hat. In dem Fall $\zeta = 0$ iſt $\cos\zeta = 1$, und in dem Fall $\zeta = 90°$ wird $\cos\zeta = 0$. Wenn alſo $\frac{4Q\gamma\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{Pc(2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 - 1)}$ poſitiv und < 1 iſt, oder wenigſtens nicht gröſſer als 1, ſo kan man verſichert ſeyn, daß das Moment des Windſtoſſes bey keiner geneigten Lage der Axe gröſſer ſeyn könne, als es in dem Fall iſt, wenn die Axe mit der Richtung

des Windes parallel liegt. Wenn dagegen $\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} > 1$ iſt, ſo kan es Werthe für ζ geben, die der Bedingung $1+\cos\zeta < \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)}$ ein Genüge thun: und wenn dies ſchon alsdenn geſchehen ſoll, wenn ζ noch ſehr klein, alſo $\cos\zeta$ ſehr nahe $=1$ iſt, ſo muß auch $\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} > 2$ ſeyn, oder wenigſtens *nicht* kleiner als 2. Wofern aber $\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} < 2$ iſt, ſo wird jeder Werth $\cos\zeta < \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} - 1$ ein gröſſer Moment geben, als $\cos\zeta = 1$ giebt; und wenn der Winkel α ſo groß genommen wird, daß $\cos\alpha = \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} - 1$ iſt, ſo wird das Moment bey dieſem Neigungswinkel eben ſo groß ſeyn, als es bey dem Winkel $\zeta=0$ iſt. Ob es nun gleich auf dieſe Art das Anſehen gewinnet, daß bey den angenommenen Bedingungen alle Winkel, *die* α übertreffen, vortheilhafter ſeyn würden, als der Winkel $\zeta=0$; ſo muß man ſich doch aus dem 229 §. erinnern, daß nothwendig $\zeta < \vartheta$ ſeyn müſſe, wenn dieſe Rechnungen ihre Anwendung finden ſollen. Wäre demnach ſchon $\alpha > \vartheta$, ſo würde doch $\zeta=0$ der vortheilhafteſte Werth bleiben.

Im Exempel des 235 §. war $\frac{4Q}{P} = \frac{1297\frac{1}{3}}{45,5}$ =

$= 28{,}5,\ \frac{\gamma}{c} = \frac{22}{7.20} = \frac{11}{70},\ \text{tang}\,\vartheta = 3{,}810512;$
alſo $\text{tang}\,\vartheta^2 = 14{,}512001$, und es wird
$\frac{4Q\gamma\,\text{tang}\,\vartheta}{Pc(2\,\text{tang}\,\vartheta^2 - 1)} = 28{,}5 \cdot \frac{11}{70} \cdot \frac{3{,}81}{28}$ ohngefehr $= \frac{44}{70}$. Weil dieſe Zahl kleiner als 1 iſt, ſo läſt ſich in dem beſondern Fall, wovon hier die Rede iſt, keine Lage der Axe gegen die Richtung des Windes angeben, die vortheilhafter wäre, als die parallele Lage.

Wenn dagegen $\vartheta = 54\frac{3}{4}^\circ$, alſo $\text{tg.}\,\vartheta = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ wäre, ſo hätte man $\frac{\text{tang}\,\vartheta}{2\,\text{tang}\,\vartheta^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}4714$; und dies in $\frac{4Q}{P} \cdot \frac{\gamma}{c} = 4{,}07 \cdot 1{,}1 = 4{,}477$ multiplicirt giebt 2,1104. In dieſem beſondern Fall hat man allemahl
$1 + \cos\zeta < \frac{4Q\gamma\,\text{tang}\,\vartheta}{Pc(2\,\text{tang}\,\vartheta^2 - 1)}$, alſo iſt bey dieſen Vorausſetzungen jede geneigte Lage der Axe vortheilhafter, als die parallele Lage, doch mit der nöthigen Einſchränkung, daß $\zeta < \vartheta$ bleiben muß. Der Winkel $\vartheta = 60^\circ$ giebt $\vartheta = \sqrt{3}$, und $\frac{\text{tang}\,\vartheta}{2\,\text{tang}\,\vartheta^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0{,}34641$, und die Multiplication mit $\frac{4Q}{P} \cdot \frac{\gamma}{c} = 4{,}477$ giebt nun 1,5508. Dies wäre ein Fall von der Art, wo das Moment des Windſtoſſes bey einigen Neigungswinkeln kleiner,

bey andern gröſſer, als bey der parallelen Lage der Axe ausfällt. So lange $\cos\zeta > 0,5508$ bleibt, ſo lange alſo ζ nicht über $56^\circ\ 35'$ wächſt, ſo lange bleibt das Moment des Windſtoſſes kleiner, als für den Fall $\zeta = 0$: und wenn ζ dieſen Winkel zu übertreffen anfängt, ſo wird das Moment des Windſtoſſes gröſſer. Indeſſen würden doch nun diejenigen Winkel, welche den von $56^\circ\ 35'$ übertreffen, keinesweges vortheilhafter, als der Winkel $\zeta = 0$ ſeyn, denn ſchon für den Winkel $\zeta = 56^\circ\ 35'$ hat man $\mu =$

$$\frac{c.\cos\zeta \operatorname{tang}\vartheta}{a\gamma} = \frac{20.0,5508.7.\sqrt{3}}{10.22} =$$

$$\frac{7.0,5508.\sqrt{3}}{11} = \frac{6,677}{11}$$, alſo $\mu < 1$, und der Winkel $\zeta = 0$ bleibt der vortheilhafteſte. Dieſen Umſtand beyſeit geſetzt wird übrigens das Moment mit ζ ferner wachſen, wenn ζ über $56^\circ\ 35'$ wächſt, bis für $\zeta = 90^\circ$ dies Moment $= nG\gamma(4R\gamma^2 + 2Pc^2)\cos\vartheta^3$ wird: demnach muß es in Fällen von dieſer Art einen Werth ζ geben, dem ein kleinſter Werth M zugehört.

237 §.

Die Umlaufsgeſchwindigkeit der Flügel und ihr Wendungswinkel gegen die Umlaufsaxe ſind gegeben: man ſoll diejenige Neigung der Axe gegen die Richtung des Windes finden, wobey das Moment des Windſtoſſes am gröſten oder auch am kleinſten wird.

Aufl. Man ſuche das Differential des Moments $M = nG\gamma(4Pc^2\cos\zeta^2 \operatorname{tang}\vartheta^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta \operatorname{tg}\vartheta + 4R\gamma^2 + 2Pc^2\sin\zeta^2)\cos\vartheta^3$ in der Vorausſetzung,

$= 0$, und daraus folgt
$2\cos\zeta^2 \sin\vartheta^2 = 4\cos\zeta^2 \cos\vartheta^2 - 3\sin\zeta^2 \cos\vartheta^2$; wird ferner mit $2\cos\zeta^2 \cos\vartheta^2$ dividirt, ſo erhält man $\tang\vartheta^2 = 2 - \frac{3}{2}\tang\zeta^2$, alſo $\tang\vartheta = \sqrt{(2 - \frac{3}{2}\tang\zeta^2)}$.

Wenn $\zeta = 0$ iſt, ſo giebt dieſer Ausdruck $\tang\vartheta = \sqrt{2}$, wie erfordert wird: und wenn $\tang\zeta = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,154700$ iſt, alſo $\zeta = 49° 6'$, ſo muß $\vartheta = 0$ ſeyn; da dann das Moment $S = 2nGPc^2 \sin\zeta^2$ wird. Ueberhaupt muß ϑ deſto kleiner ſeyn, je gröſſer ζ iſt, und wenn $\zeta > 49° 6'$ wäre, ſo würde $\tang\vartheta$ unmöglich werden: das heiſt, es giebt nun gar keinen gröſten Werth für S, und das Moment kan nicht gröſſer werden, als es in dem Fall wird, wenn $\vartheta = 0$ iſt. Weil übrigens das Moment S von beiden Winkeln ζ und ϑ abhängt, ſo kan man noch fragen, wie groß ſowohl ζ als auch ϑ genommen werden müſſen, damit S am gröſten werde.

Um dies zu beantworten, ſucht man auch die Gleichung $dS = 0$ in der Vorausſetzung, daß allein ζ veränderlich ſey, da dann $2\sin\zeta \cos\zeta \cos\vartheta^2 - 4\cos\zeta \sin\zeta \sin\vartheta^2 = 0$, alſo $\sin\zeta \cos\zeta = 0$ gefunden wird. Folglich muß entweder $\sin\zeta = 0$, oder $\cos\zeta = 0$ ſeyn. Das letzte würde $\sin\zeta = 1$, und $\tang\zeta = \infty$ geben, da dann $\tang\vartheta$ unmöglich würde. Demnach wird erfordert, daß $\sin\zeta = 0$ ſey, da dann $\cos\zeta = 1$ und $\tang\zeta = 0$, folglich $\tang\vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird. Hieraus ergiebt ſich alſo, daß der Wind im erſten Anfang der Bewegung gegen die Flügel die meiſte Gewalt alsdenn ausübe, wenn die Umlaufsaxe mit der Richtung des Windes parallel iſt, und die Flügel gegen die Umlaufsaxe unter einem Winkel von $35\frac{1}{4}°$ geneigt ſind.

232 §.

Bey gegebener Neigung der Umlaufs-Axe ſowohl gegen die Richtung des Windes, als auch die Ebene der Flügel, die Umlaufs-Geſchwindigkeit zu finden, wobey das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen am gröſten wird.

Aufl. Wenn man $dM = d.\gamma S = 0$ ſetzt, ſo findet man die Gleichung $6R\gamma^2 - 8Qc\gamma \cos\zeta \tan\vartheta + 2Pc^2 \cos\zeta^2 \tan\vartheta^2 + Pc^2 \sin\zeta^2 = 0$, und daraus folgt

$$\gamma^2 - \frac{4Qc \cos\zeta \tan\vartheta}{3R} . \gamma = - \frac{Pc^2 \cos\zeta^2 \tan\vartheta^2 + \frac{1}{2} Pc^2 \sin\zeta^2}{3R}.$$

Demnach erhält man

$$\gamma = \frac{2Qc . \cos\zeta \tan\vartheta}{3R} \pm \sqrt{\left(\frac{4Q^2c^2 . \cos\zeta^2 \tan\vartheta^2}{9R^2} - \frac{Pc^2 \cos\zeta^2 \tan\vartheta^2 + \frac{1}{2} Pc^2 \sin\zeta^2}{3R} \right)},$$

und dieſer Ausdruck läſt ſich auch ſo verändern

$$\gamma = \frac{c \tan\vartheta \cos\zeta}{3R} \left(2Q \pm \sqrt{4Q^2 - 3P . R - \tfrac{3}{2} P . R . \tan\zeta^2 \cot\vartheta^2} \right).$$

Aus dem 223 §. weiß man, daß $\frac{c \sin(\vartheta - \zeta)}{a\gamma \cos\vartheta}$ nicht kleiner als 1 ſeyn müſſe: demnach muß γ nicht gröſſer ſeyn, als $\frac{c \sin(\vartheta - \zeta)}{a \cos\vartheta}$, und daraus läſt ſich beurtheilen, welche von beyden Wurzeln gewählt werden müſſe.

$= \frac{1}{2\tan\vartheta - \cot\vartheta}$ ſehr klein ausfalle, und gänzlich verſchwinden würde, wenn man $\vartheta = 90°$ nehmen könnte. Es mag demnach $\frac{4Q\gamma}{Pc}$ einen Werth haben, welchen man will, ſo kan ϑ doch allemahl ſo genommen werden, daß $\frac{4Q\gamma \tan\vartheta}{Pc(2\tan\vartheta^2 - 1)} < 1$ und > 0 bleibt, und wenn alsdenn auch γ gehörig angenommen iſt, ſo hat M unter allen möglichen den gröſten Werth. Daraus ergiebt ſich alſo die Regel, daß eine geneigte Lage der Axe gegen die Richtung des Windes wenigſtens alsdenn, wenn die Flügel ebene Flächen ſind, nie ſo vortheilhaft ſey, als die parallele Lage, und daß man jene nicht wählen müſſe, wofern es nicht beſondre Nebenurſachen anrathen.

239 §.

Die Neigung der Axe gegen die Richtung des Windes iſt gegeben, und die vier Windflügel ſind zwar noch ebene Flächen, ihre ganze Länge aber wird wie im 215 §. ſowohl in Vergleichung mit der ganzen Länge der Windruthe, als auch mit ihrer eigenen Breite ſehr klein angenommen: man ſucht, wie groß die Umlaufs-Geſchwindigkeit und der Wendungswinkel ſeyn müſſe, damit das Moment des Windſtoſſes gegen alle vier zuſammen am gröſten werde.

Aufl. Wenn h^2 den Inhalt der Fläche eines jeden Flügels bedeutet, und man ſchreibt im 230 §.

 h^2

wird $\frac{c^2 \cos\zeta^2 \,\mathrm{tang}\,\vartheta^2}{\gamma\gamma} = a^2\mu^2$, $\frac{c^2 \cos\zeta^2 \,\mathrm{tang}\,\vartheta}{\gamma\gamma} = \frac{a^2\mu^2}{\mathrm{tang}\,\vartheta}$, $\frac{c\cos\zeta}{\gamma} = \frac{a\mu}{\mathrm{tang}\,\vartheta}$, und man erhält die Gleichung $(2Pa^2\mu^2 - 8Qa\mu + 6R + 3Pa^2\nu^2)$ $.\,\mathrm{tang}\,\vartheta = \frac{4Pa^2\mu^2}{\mathrm{tang}\,\vartheta} - \frac{4Qa\mu}{\mathrm{tang}\,\vartheta}$, woraus nun $\mathrm{tang}\,\vartheta = \sqrt{\frac{4(Pa^2\mu^2 - Qa\mu)}{(2\mu^2 + 3\nu^2)Pa^2 - 8Qa\mu + 6R}}$ gefunden wird. Es wird nemlich γ und ζ als gegeben angenommen, alſo ſind auch μ und ν gegeben.

Wenn $\zeta = 0$ iſt, ſo wird $\nu = 0$, und die Gleichung giebt alsdenn den Werth von $\mathrm{tang}\,\vartheta$, welcher im 207 §. gefunden ward, und μ wird nun das, was dort z war.

234 §.

Die Lage der Axe gegen die Richtung des Windes iſt gegeben: man ſucht, wie groß ſowohl die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Flügel, als auch ihr Neigungswinkel gegen die Umlaufs-Axe ſeyn müſſe, damit das mechaniſche Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen am gröſten werde.

Aufl. Die vortheilhafteſte Umlaufs-Geſchwindigkeit wird durch die Gleichung

$$6R\gamma^2 - 8Qc\gamma\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta + 2Pc^2\cos\zeta^2\,\mathrm{tang}\,\vartheta^2 + Pc^2\sin\zeta^2 = 0$$

beſtimmt (232 §.). Dieſe dividire man durch γ^2, und ſetze alsdenn

$\frac{c.\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\vartheta}{a\gamma} = \mu$, $\frac{c\sin\zeta}{a\gamma} = \nu$, ſo erhält man

I.) $6R - 8Qa\mu + 2Pa^2\mu^2 + Pa^2\nu^2 = 0.$

Den vortheilhafteſten Winkel ϑ beſtimmt die Gleichung II.) $\tang\vartheta =$

$$\sqrt{\frac{4(Pa^2\mu^2 - Qa\mu)}{(2\mu^2 + 3\nu^2)Pa^2 - 8Qa\mu + 6R}}\ (233\ \S.),$$

und wenn man die vorige Gleichung n. I. damit verbindet, ſo verwandelt ſich der Nenner in den Ausdruck $2Pa^2\nu^2$, ſo daß man $\tang\vartheta =$

$\sqrt{\frac{2\mu(Pa\mu - Q)}{Pa\nu^2}}$ erhält, oder $\tang\vartheta =$

$\frac{\mu}{\nu}\sqrt{\frac{2(Pa\mu - Q)}{Pa\mu}}$. Nun hat man auch $\sin\zeta =$

$\frac{a\gamma}{c}.\nu$, und $\cos\zeta = \frac{a\gamma}{c} \cdot \frac{\mu}{\tang\vartheta}$, demnach wird

$\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta} = \tang\zeta = \frac{\nu}{\mu}\tang\vartheta$, und $\mathrm{tg.}\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\tang\zeta$.

Beyde Werthe von $\tang\vartheta$ einander gleich geſetzt, geben $\tang\zeta = \sqrt{\frac{2(Pa\mu - Q)}{Pa\mu}}$, und daraus folgt

$Pa\mu \tang\zeta^2 = 2Pa\mu - 2Q$, alſo wird $\mu =$

$\frac{2Q}{Pa(2 - \tang\zeta^2)}$. Aus der Gleichung n. I. findet

man ferner $\nu = \sqrt{\frac{8Qa\mu - 2Pa^2\mu^2 - 6R}{Pa^2}}$, und

alsdenn hat man $\tang\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\tang\zeta$, ſo wie auch

$\gamma = \frac{c\sin\zeta}{a\nu}$.

Dieſe

$$\mu = \frac{4-\frac{3}{2}\,\text{tg.}\zeta^2}{2-\text{tang}\,\zeta^2} \pm \sqrt{\left(\frac{(4-\frac{3}{2}\,\text{tang}\,\zeta^2)^2}{(2-\text{tang}\,\zeta^2)^2} - \frac{6}{2-\text{tg.}\zeta^2}\right)}$$

gefunden wird. Bringt man noch beyde Brüche unter dem Wurzelzeichen auf einerley Benennung, ſo findet man

$$\mu = \frac{4-\frac{3}{2}\,\text{tang}\,\zeta^2 \pm (2-\frac{3}{2}\,\text{tang}\,\zeta^2)}{2-\text{tang}\,\zeta^2},$$ alſo

entweder $\mu = \frac{6-3\,\text{tang}\,\zeta^2}{2-\text{tang}\,\zeta^2} = 3$, oder $\mu = \frac{2}{2-\text{tang}\,\zeta^2}$. Der erſte Werth $\mu = 3$ giebt $\nu = \text{tang}\,\zeta\sqrt{\mu(3-\mu)} = 0$, alſo $\text{tang}\,\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\,\text{tang}\,\zeta$ unendlich groß, und $\vartheta = 90°$. Der zweyte Werth $\mu = \frac{2}{2-\text{tang}\,\zeta^2}$ giebt keinen gröſten, ſondern einen kleinſten Werth des mechaniſchen Moments m, wie für den Fall $\zeta = 0$ für ſich klar iſt. Aus dieſen Schlüſſen flieſt demnach, wie im 215 §, daß man beyden Bedingungen, welche erfordert werden, damit m am gröſten werde, nicht zugleich ein Genüge leiſten könne. Deswegen wäre es auch hier wohl am bequemſten, γ willkührlich und ſo groß anzunehmen, als die Umſtände verſtatten: dies beſtimmt $\nu = \frac{c\,\sin\zeta}{\gamma x}$, alſo auch $\mu = 2 + \sqrt{(1-\frac{3}{2}\nu^2)}$, und $\text{tang}\,\vartheta = \frac{\mu}{\nu}\,\text{tang}\,\zeta$.

240 §.

Wenn an einer und eben derſelben Windruthe mehrere dergleichen kleine Windflügel in verſchiedenen Entfernungen von der Umlaufs-Axe befindlich ſind, ſo iſt γ für alle einerley. Will man alsdenn μ und ν für alle gleich vortheilhaft beſtimmen, ſo wird ſich ν umgekehrt wie x verhalten müſſen; und weil $\mu = 2 + \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\nu^2)}$ wächſt, wenn ν abnimt, ſo wächſt $\frac{\mu}{\nu}$ aus einem doppelten Grunde, wenn x wächſt, weil μ wächſt und ν abnimmt. Wollte man demnach ſolche Windflügel, deren Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes geneigt iſt, in der Abſicht krümmen, damit die Wendung aller Sproſſen gegen die Umlaufsaxe durchgängig gleich vortheilhaft ſey; ſo müſte die Tangente der Wendungswinkel in einem etwas gröſſern Verhältniß wachſen, als die Entfernung der Sproſſen von der Umlaufsaxe wächſt, wie auch die Formul $\tang\vartheta = \frac{\mu\gamma x}{c.\cos\zeta}$ ergiebt, wo μ ebenfalls wächſt, wenn x zunimmt. Indeſſen ſind die Aenderungen, welche μ leiden müſte, ſo gar beträchtlich nicht, weil μ allemahl zwiſchen den Grenzen 2 und 3 enthalten ſeyn muß. Deswegen läſt ſich das Geſetz des 216 §, daß die Tangenten der Wendungswinkel den Entfernungen von der Umlaufs-Axe proportional ſeyn müſſen, hier ebenfalls, wiewohl nicht völlig mit eben dem Vortheil, anwenden. Für μ kan man alsdenn denjenigen Werth annehmen, welcher dem mittlern Werth von x zugehört. Wenn z. E. wie im 227 §, $b = 3$ Fuß der kleinſte, und $a = 10$ Fuß

der

der gröſte Werth von x wäre, ſo könnte man $x = \frac{1}{2}(a+b) = 6\frac{1}{2}$ Fuß annehmen, und alsdenn $v = \frac{c \sin\zeta}{\gamma x}$ ſuchen, welches $\mu = 2 + \sqrt{(1 - \frac{1}{2}v^2)}$ beſtimmen würde. Es ſey $\zeta = 30°$, alſo $\sin\zeta = \frac{1}{2}$, ferner ſey $c = 20$ Fuß, $\gamma = \pi = \frac{22}{7}$, ſo wird $v = \frac{7}{22} \cdot \frac{20}{13} = \frac{70}{143} = 0,5$ beynahe, alſo $\frac{1}{2}v^2 = 0,125$, und $\mu = 2,875$. Man ſiehet wohl, daß auf ſolche Art, beſonders bey etwas langen Flügeln, gewöhnlich μ ziemlich nahe $= 3$ gefunden wird. Deswegen kan man auch gar wohl die Vorausſetzung $\mu = 3$ annehmen, weil dies die Rechnung verkürzt, und dieſe Unterſuchung ohnedem keiner ſo gar groſſen Schärfe fähig iſt.

241 §.

Die Umlaufsaxe iſt gegen die Richtung des Windes unter einem gegebenen Winkel geneigt, die Flügel ſind nach dem angenommenen Geſetz gebogen, und alle Sproſſen gleich lang: man ſucht das Moment des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel zuſammen.

Aufl. Im 239 §. war $m = 4nGh^2\gamma x((c.\cos\zeta \tan\vartheta - \gamma x)^2 + \frac{1}{2}c^2 \sin\zeta^2)\cos\vartheta^3$, und nunmehro kan man durch h^2 ein Element des gebogenen Flügels verſtehen, das von der Axe um den Abſtand x entfernt iſt; ſo hat man $h^2 = ydx$, und $m = dM$, wenn M das geſuchte Moment bezeichnet. Demnach wird $dM =$

$$4nG\gamma^3 x^3 . ydx \left(\left(\frac{c.\cos\zeta \tan\vartheta}{\gamma x} - 1\right)^2 +\right.$$

nimmt, folglich wird M wachſen, wenn γ wächſt. Demnach iſt auch bey geneigter Lage der Umlaufsaxe ein ſchneller Umlauf aus mehr als einer Urſache vortheilhaft. Man nehme im vorigen Exempel $\gamma = \pi = \frac{22}{7}$, ſo wird die Umlaufszeit 2 Secunden betragen, und man findet $\nu = \frac{c \sin\zeta}{a\pi} = \frac{1}{\pi} = \frac{7}{22}$, alſo $\frac{1}{2}Pa^2\nu^2 = 10479$, $\sqrt{(4Q^2 - 3P.R - \frac{1}{2}P^2a^2\nu^2)} = 268$, und $\mu = \frac{684\frac{2}{3} + 268}{455} = 2{,}1$. Das giebt $\frac{\mu}{\nu} = 2{,}1 . \frac{22}{7} = 0{,}3.22 = 6{,}6$, und $\tang\vartheta = 6{,}6.0{,}5773503 = 3{,}810512$, folglich $\vartheta = 75°18'$. Ferner wird $2\mu^2 + \nu^2 = 8{,}9213$; $(2\mu^2 + \nu^2)Pa^2 - 2R = (8{,}9213.4550 - 4959{,}5).4 = 142529{,}66$, und $nG\gamma^3\cos\vartheta^3 = \frac{7}{4.151.8} : \frac{22^3}{7^3}.0{,}2538^3 = \frac{11^3}{4.151.7^2}.0{,}2538^3$, folglich $M = \frac{11^3.0{,}0165.142529{,}66}{4.151.7^2} = \frac{11^3.0{,}00825.71264{,}83}{151.7^2} = \frac{11^3.0{,}00825.1454{,}4}{151} = 105{,}8$. Die Vergleichung mit der vorigen Rechnung ergiebt, daß dies Moment würklich gröſſer ausfalle, als bey der Vorausſetzung $\gamma = 2$: indeſſen iſt es bey weiten nicht ſo groß, als es im 211 §. bey eben der Vorausſetzung $\gamma = \pi$ gefunden ward, wo $\zeta = 0$ war. Eine etwas genauere Betrachtung der Formul $M = nG\gamma^3\cos\vartheta^3((2\mu^2 + \nu^2)Pa^2 - 2R)$ er-

giebt

giebt auch leicht die Urſache. Wenn ζ abnimmt, ſo nimmt auch ν ab, und μ wächſt, ſo wie auch $\cos\zeta$ gröſſer wird. Wenn nun ϑ einerley bliebe, ſo würde $\frac{c\cos\zeta}{\mu}=\frac{a\gamma}{c\,\text{tang}\,\vartheta}$ auch unverändert bleiben, wenn γ nicht geändert wird. Es muß aber auch $\frac{\text{tang}\,\vartheta}{\mu}=\frac{\text{tang}\,\zeta}{\nu}$ bleiben, und ν nimmt mit $\sin\zeta$ in einerley Verhältniß ab, folglich nimmt $\text{tang}\,\zeta$ ſtärker ab, als ν, und $\frac{\text{tang}\,\zeta}{\nu}$ nimmt ebenfals mit ζ ab. Wenn nun μ nicht in eben dem Verhältniß zunimmt, ſo muß auch $\text{tang}\,\vartheta$ etwas abnehmen, folglich $\cos\vartheta$ wachſen, und die Zahl $2\mu^2+\nu^2$ wächſt auch, obgleich ν abnimmt, denn ν iſt gewöhnlich ein Bruch und $\mu > 1$.

Dieſe Schlüſſe führen auf die Vermuthung, daß von der Neigung der Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes kein Vortheil zu hoffen, ſondern vielmehr die parallele Lage der Axe mit der Richtung des Windes allemahl die beſte ſey, wenn anders keine beſondre Nebenumſtände die geneigte Lage anrathen. Indeſſen verdient doch die Frage eine etwas nähere Unterſuchung: ob es nicht Fälle geben könnte, wo bey einer geneigten Lage der Axe das Moment des Windſtoſſes gröſſer als bey der parallelen Lage würde? und das läſt ſich auf folgende Art prüfen.

236 §.

Wenn $\zeta=0$ iſt, ſo hat man $M =\!=\!=$
$nG\gamma(4Pc^2\,\text{tang}\,\vartheta^2 - 8Qc\gamma\,\text{tang}\,\vartheta + 4R\gamma^2)\cos\vartheta^3$,

in

Weiter iſt

$$\sec\vartheta = 5{,}5395786 \qquad \sec\eta = 1{,}9147899$$
$$\cos\vartheta = 0{,}1805191 \qquad \cos\eta = 0{,}5222505$$
$$\overline{5{,}7200977} \qquad \overline{2{,}4370404}$$
$$-2{,}4370404$$
$$\overline{3{,}2830573}$$

Dies mit $\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2} = \frac{4}{9}$ multiplicirt giebt 1,4591366, und die vorige Zahl 0,0569552 dazu addirt giebt die Summe 1,5160918 beynahe = 1,5161. Ueberdem wird $c.\cos\zeta = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$, alſo $c^4\cos\zeta^4 = 90000$, und $\mu^2 = 9$. Das giebt

$$\frac{4nGyc^4\cos\zeta^4}{\mu^2\gamma} = \frac{7.4.7.10000}{151.8.22} = \frac{490000}{151.44}$$

= 73,7507, und dieſe Zahl mit 1,5161 multiplicirt giebt M = 111,8. Im 235 §. ward bey ebenen Flügeln von eben der Gröſſe, eben der Umlaufsgeſchwindigkeit und eben der Lage der Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes, das Moment des Windſtoſſes = 105,8 gefunden, und die Vergleichung ergiebt, daß bey geneigter Lage der Axe die gebogenen Flügel ebenfals etwas, obgleich nicht ſo gar viel vortheilhafter ſind, als ebene Flügel. Im 227 §. aber ward bey gebogenen Flügeln von eben der Gröſſe, und eben der Umlaufsgeſchwindigkeit, das Moment des Windſtoſſes = 158,4 gefunden, wenn die Umlaufsaxe in der Richtung des Windes liegt, welches das vorhin gefundene um ein anſehnliches übertrift. Dies veranlaſſet demnach auch hier die Frage: ob und unter welchen Umſtänden die geneigte Lage der Axe beſſer ſeyn könne als die parallele Lage?

des Windes parallel liegt. Wenn dagegen $\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} > 1$ iſt, ſo kan es Werthe für ζ geben, die der Bedingung $1+\cos\zeta < \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)}$ ein Genüge thun: und wenn dies ſchon alsdenn geſchehen ſoll, wenn ζ noch ſehr klein, alſo $\cos\zeta$ ſehr nahe $=1$ iſt, ſo muß auch $\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} > 2$ ſeyn, oder wenigſtens nicht kleiner als 2. Wofern aber $\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} < 2$ iſt, ſo wird jeder Werth $\cos\zeta < \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} - 1$ ein gröſſer Moment geben, als $\cos\zeta = 1$ giebt; und wenn der Winkel α ſo groß genommen wird, daß $\cos\alpha = \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2-1)} - 1$ iſt, ſo wird das Moment bey dieſem Neigungswinkel eben ſo groß ſeyn, als es bey dem Winkel $\zeta = 0$ iſt. Ob es nun gleich auf dieſe Art das Anſehen gewinnet, daß bey den angenommenen Bedingungen alle Winkel, die α übertreffen, vortheilhafter ſeyn würden, als der Winkel $\zeta = 0$; ſo muß man ſich doch aus dem 229 §. erinnern, daß nothwendig $\zeta < \vartheta$ ſeyn müſſe, wenn dieſe Rechnungen ihre Anwendung finden ſollen. Wäre demnach ſchon $\alpha > \vartheta$, ſo würde doch $\zeta = 0$ der vortheilhafteſte Werth bleiben.

Im Exempel des 235 §. war $\frac{4Q}{P} = \frac{1297\frac{1}{3}}{45,5}$ =

$= 28,5, \frac{\gamma}{c} = \frac{22}{7.20} = \frac{11}{70}$, $\tang\vartheta = 3,810512$; alſo $\tang\vartheta^2 = 14,512001$, und es wird

$$\frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2 - 1)} = 28,5 \cdot \frac{11}{70} \cdot \frac{3,81}{28}$$

ohngefehr $= \frac{44}{70}$. Weil dieſe Zahl kleiner als 1 iſt, ſo läſt ſich in dem beſondern Fall, wovon hier die Rede iſt, keine Lage der Axe gegen die Richtung des Windes angeben, die vortheilhafter wäre, als die parallele Lage.

Wenn dagegen $\vartheta = 54\frac{3}{4}^\circ$, alſo $\text{tg.}\vartheta = \sqrt{2} = 1,4142\ldots$ wäre, ſo hätte man $\frac{\tang\vartheta}{2\tang\vartheta^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{3} =$ $0,4714$; und dies in $\frac{4Q}{P} \cdot \frac{\gamma}{c} = 4,07 \cdot 1,1 =$ $4,477$ multiplicirt giebt $2,1104$. In dieſem beſondern Fall hat man allemahl

$$1 + \cos\zeta < \frac{4Q\gamma \tang\vartheta}{Pc(2\tang\vartheta^2 - 1)},$$

alſo iſt bey dieſen Vorausſetzungen jede geneigte Lage der Axe vortheilhafter, als die parallele Lage, doch mit der nöthigen Einſchränkung, daß $\zeta < \vartheta$ bleiben muß. Der Winkel $\vartheta = 60^\circ$ giebt $\vartheta = \sqrt{3}$, und $\frac{\tang\vartheta}{2\tang\vartheta^2 - 1} =$ $\frac{\sqrt{3}}{5} = 0,34641$, und die Multiplication mit $\frac{4Q}{P} \cdot \frac{\gamma}{c} = 4,477$ giebt nun $1,5508$. Dies wäre ein Fall von der Art, wo das Moment des Windſtoſſes bey einigen Neigungswinkeln kleiner,

mahl ϑ ſo groß annehmen, daß $\frac{4\gamma x \text{tang}\vartheta}{c(2\text{tang}\vartheta^2 - 1)} < 1$ wird. Demnach iſt bey Flügeln von der jetzt betrachteten Art der Winkel $\zeta = 0$ gewiß der vortheilhafteſte.

246 §.

Dieſe Schlüſſe laſſen ſich nun auch auf gebogene Flügel anwenden. Bey ihnen gilt das von jedem Element, was von ſo kleinen Flügeln gilt, als ſie eben ſind betrachtet worden. Wenn das Moment des Windſtoſſes gegen alle Elemente der gebogenen Flügel am gröſten iſt, ſo iſt es ohne Zweifel gegen die ganzen Flügel am gröſten. Demnach kan man verſichert ſeyn, wenn $\frac{4\gamma b \text{tang}\eta}{c(2\text{tang}\eta^2 - 1)} < 1$ iſt, daß keine geneigte Lage der Axe ſo vortheilhaft ſey, als die mit der Richtung des Windes parallele Lage. In der That iſt dies nur das äuſſerſte, und der erwehnte Ausdruck kan, ohne dieſe Regel aufzuheben, gar wohl etwas gröſſer als 1 ſeyn: denn geſetzt es wäre $\frac{4\gamma b \text{tang}\eta}{c(2\text{tang}\eta^2 - 1)} = \frac{5}{4}$, ſo weis man, daß bey geneigter Lage der Axe kein gröſſeres Moment, als bey der parallelen Lage gefunden werden kan, wofern nicht $\cos\zeta < \frac{4\gamma b \text{tang}\eta}{c(2\text{tang}\eta^2 - 1)} - 1$ (244 §.) alſo hier $\cos\zeta < \frac{1}{4}$, folglich $\zeta > 75\frac{1}{2}^\circ$ wird. So groß darf ζ gewiß nicht werden, weil $\eta > \zeta$ bleiben muß. Demnach wird nur erfordert, daß $\frac{4\gamma b}{c \text{tang}\eta(2 - \cot\eta^2)} < \frac{5}{4}$ ſey, oder $\frac{1}{2 - \cot\eta^2} <$

$\frac{15}{16} \cdot \frac{c \tang \eta}{\gamma b}$. Für $\zeta = 0$ aber war der vortheilhafteſte Werth $\frac{c \tang \eta}{\gamma b} = z = 3$ (215 §.); alſo wird erfordert, daß $\frac{1}{2 - \cot \eta^2} < \frac{15}{16}$, oder $2 - \cot \eta^2 > \frac{16}{15}$, oder nur $2 - \cot \eta^2 > 1$, folglich $\cot \eta < 1$ und $\eta > 45°$ ſey, wenn man verſichert ſeyn will, daß das Moment des Windſtoſſes gegen die gebogenen Flügel alsdenn unter allen am gröſten ſey, wenn die Umlaufsaxe in der Richtung des Windes liegt, und die übrige Anordnung dem 218 §. gemäß iſt. Weil nun $\tang \eta = \frac{3\gamma b}{c}$ ſeyn muß, ſo kan man dieſer Bedingung ſicher ein Genüge thun: denn geſetzt, man wollte auch c auf 25 Fuß rechnen, ſo kan γ wenigſtens $= 3$, und $b = 3$ Fuß, (oder bey ſehr langen Flügeln $\gamma = 2$, und $b = 5$ Fuß) angenommen werden, ſo hat man ſchon $\tang \eta = \frac{27}{25}$. Aus Vergleichung dieſer Schlüſſe mit dem 238 §. folgt demnach die allgemeine Regel: daß weder bey ebenen noch gebogenen Flügeln die geneigte Lage der Axe vortheilhaft ſey, und daß man ſie nicht wählen müſſe, wofern es nicht beſondre Nebenurſachen anrathen.

Zuſatz

zum 396 §. der Mechanik auf der 474 Seite des Vierten Theils.

Die Lauf- oder Tret-Räder, und beſonders die verticalen Räder dieſer Art, werden mit ſo gutem Erfolg bey mancherley Maſchinen gebraucht, daß ich die angezogene etwas kurz gerathene Stelle durch einige nähere Erläuterungen zu ergänzen nöthig finde. Ich werde nur die Fälle betrachten, wenn das Rad durch Menſchen umgetrieben wird, weil dies am gebräuchlichſten iſt, und hiernächſt die Anwendung auf ſolche Fälle, wo man Thiere gebrauchen will, leicht gemacht werden kan.

I.) Wenn eine oder mehr Perſonen im innern Umfang eines Laufrades neben einander ſtehen, und vermöge ihres Gewichts das Rad zu drehen ſtreben, ſo macht man ſich von der Art, wie ſie in das Rad würken, am deutlichſten folgenden Begrif. Man ſtelle ſich einen verticalen Halbmeſſer des Rades vor, und einen andern Halbmeſſer, der die Stelle des Rades trift, wo die Arbeiter ſtehen. Das Gewicht aller Arbeiter zuſammen, welches nach verticaler Richtung abwärts drückt, ſey $= P$, und der Winkel, welchen die erwehnten beyden Halbmeſſer einſchlieſſen, ſey $= \eta$, ſo zerlegt ſich das Gewicht P nach den Richtungen der Tangente des Rades und ſeines Halbmeſſers durch den Berührungspunct, da wo die Arbeiter ſtehen, in die Kräfte $P \sin \eta$ und

$P\cos\eta$. Jene Kraft iſt es allein, welche das Rad zu drehen ſtrebt, und ihr ſtatiſches Moment iſt = $Pr\sin\eta$.

II.) Dieſer Druck $P\sin\eta$ gegen die Stuffen am innern Umfang des Rades nach der Richtung ihrer Bewegung ändert ſich beym Umlauf des Rades nicht, weil ein Gewicht in einen bewegten Körper ſo, wie in einen ruhenden würkt, und weil die Arbeiter, wenn alles ſchon im Beharrungsſtande iſt, ihre Entfernung von der Verticalfläche durch die Axe des Rades nicht weiter ändern, alſo η einerley bleibt. Uebrigens iſt dieſer Druck deſto gröſſer, je gröſſer η iſt, und er würde am gröſten ſeyn, wenn $\eta = 90°$ wäre: aber man ſiehet leicht, daß die Arbeiter an derjenigen Stelle, die um einen ganzen Quadranten von der niedrigſten Stelle des Rades entfernt iſt, nicht ſtehen, und die Arbeit durch Treten verrichten können. Indem die Stuffen unter ihren Füſſen ausweichen, und ſie von einer auf die nächſtfolgende treten, wird ihnen das Fortgehen eigentlich eben ſo beſchwerlich, als wenn ſie einen Berg hinan ſtiegen, deſſen Fläche gegen den Horizont unter dem Winkel η geneigt wäre.

III.) Nun ſind folgende Sätze aus der Erfahrung bekannt. Auf einer horizontalen Ebene kan man, ohne eben ſehr bald zu ermüden, ſchneller fortgehen, als wenn man einen Berg hinan ſteigen muß; und wofern das Steigen nicht äuſſerſt beſchwerlich werden ſoll, ſo iſt man genöthiget, deſto langſamer eine ſchiefe Ebene hinan zu ſteigen, je gröſſer ihr Winkel mit dem Horizont iſt, und eine vertical ſtehende Wand kan man gar nicht hinan ſteigen. Man nehme an, daß ſich zwey Perſonen um einerley verticale

Höhe a in gleicher Zeit erheben, aber ſolche ſchiefe Ebenen hinan ſteigen ſollen, die mit dem Horizont verſchiedene Winkel η und ϑ machen; die Länge der einen Ebene ſey $=l$, der andern $=L$, ſo iſt $l\sin\eta = L\sin\vartheta = a$, und $l:L=\sin\vartheta:\sin\eta$. Beide Perſonen haben demnach in gleicher Zeit verſchiedene Wege zurück zu legen, und es iſt $L > l$, wenn $\eta > \vartheta$ iſt: derjenige, welcher den kürzern Weg vor ſich hat, wird wegen der gröſſern Schräge deſſelben mehr Beſchwerde haben, ſo wie der andre, der einen längern Weg vor ſich hat, ſchneller gehen, und ſich um deswillen mehr als jener angreifen muß. Die Beſchwerlichkeit wächſt demnach ſowohl, wenn der Neigungswinkel der Ebene etwas groß wird, als auch wenn er abnimmt, und daraus ſchließt man, daß es einen Neigungswinkel geben müſſe, wobey die Beſchwerlichkeit, in der geſetzten Zeit die Höhe a zu erreichen, am geringſten iſt.

IV.) Wenn man wüſte, wie dieſe Beſchwerlichkeit von dem Winkel η abhängt, ſo lieſſe ſich nach den bekannten Regeln finden, wie groß η ſeyn müſte, damit ſie am kleinſten ſey. Man ſiehet wohl, daß dieſe Beſchwerlichkeit mit $l = \frac{a}{\sin\eta}$ wachſe, ſo wie ſie auch mit $\sec\eta = \frac{1}{\cos\eta}$ wächſt: vielleicht iſt es nicht viel gefehlt, wenn man annimmt, ſie wachſe in eben dem Verhältniß, wie $l = a:\sin\eta$, ob es gleich, wenn l ſehr groß wird, wohl eine andere Bewandniß damit haben dürfte. Weil eben dieſe Beſchwerlichkeit ſehr ſtark mit η wächſt, ſo muß man annehmen, daß ſie in einem gröſſern Verhält-

niß als $\sec\eta$ wachſe. Nimmt man an, ſie wachſe mit $\sec\eta^3$ in einerley Verhältniß, ſo wird ſie dem Ausdruck $\operatorname{cosec}\eta \sec\eta^3 = \frac{1}{\sin\eta\cos\eta^3}$ proportional ſeyn, folglich am kleinſten, wenn $\sin\eta\cos\eta^3$ am gröſten iſt. Man ſetze demnach $d.\sin\eta\cos\eta^3 = 0$, ſo findet man $\cos\eta^4 - 3\sin\eta^2\cos\eta^2 = 0$, und das giebt $\cos\eta^2 = 3\sin\eta^2$, folglich $\cot\eta^2 = 3$, $\operatorname{cosec}\eta^2 = 4$, und $\sin\eta^2 = \frac{1}{4}$, alſo $\sin\eta = \frac{1}{2}$, und $\eta = 30°$. Dies iſt der Winkel, welchen Hr. Dan. Bernoulli in der Hydrod. Sect. IX. §. 4. pag. 166. mit andern practiſchen Schriftſtellern für den vortheilhafteſten hält.

V.) Wendet man dieſe Schlüſſe auf das Laufrad an, ſo fließt daraus folgende Regel: Die Stelle, wo die Arbeiter im innern Umfange des Rades ſtehen, muß von der niedrigſten Stelle des Rades um einen Bogen von 30° entfernt ſeyn, und alsdenn iſt das ſtatiſche Moment des Gewichts der Arbeiter, womit ſie das Rad zu drehen ſtreben, $= \frac{1}{2}rP$ (n. I. II.). Setzt man die Umlaufs-Geſchwindigkeit des Rades im Beharrungsſtande $= \gamma$, ſo iſt das mechaniſche Moment $= \frac{1}{2}r\gamma P$, und den Arbeitern wird das Umtreiben des Rades eben ſo beſchwerlich, als wenn ſie mit der Geſchwindigkeit $r\gamma$ einen Berg hinan ſtiegen, deſſen Fläche gegen den Horizont unter dem Winkel η geneigt iſt. Wofern alſo die Arbeiter mit einer Geſchwindigkeit von 2 bis 3 Fuß im Rade fortgehen können; ſo läſt ſich vermittelſt des Laufrades doppelt ſo viel ausrichten, als wenn man eine Kurbel, einen Haſpel, oder eine Winde brauchte, weil in ſolchen Fällen die Arbeiter nur mit einer

Kraft in die Maſchine würken können, die ohngefehr dem vierten Theil ihres Gewichts gleich iſt, da ſtatt deſſen beym Laufrade ihr halbes Gewicht in die Maſchine würkt.

VI.) Schreibt man α ſtatt $r\gamma$, ſo iſt das mechaniſche Moment der Kraft der Arbeiter beym verticalen Laufrade am innern Umfang deſſelben $= \frac{1}{2}P\alpha$, und es muß die Umlaufszeit des Rades $\Theta = \frac{2\pi r}{\alpha}$ ſeyn. Will man nun eine Laſt Q in der Zeit t um den Weg s fortbewegen, ſo hat man $\frac{1}{2}P\alpha = Q\beta$, wenn $s:t = \beta$ iſt, und man findet $Q = \frac{\frac{1}{2}P\alpha}{\beta}$, oder $\beta = \frac{\frac{1}{2}P\alpha}{Q}$, nachdem das eine oder andre als gegeben betrachtet wird.

VII.) Damit das ganze Gewicht der Arbeiter in die Maſchine würken könne, bringt man auch wohl auſſerhalb des Rades ein Gerüſte an: alsdenn können die Arbeiter auf den äuſſern Umfang des Rades treten, und dies am vortheilhafteſten in der Entfernung des Halbmeſſers von der verticalen Ebene durch die Umlaufsaxe, ſo daß der Bogen zwiſchen der Stelle der Arbeiter, und der niedrigſten Stelle des Rades, 90° faſſet. M. ſ. Leupold Theatr. Machin. Hydraul. T. II. §. 18. p. 9. Man muß alsdenn oberhalb der Stelle, wo die Arbeiter ſtehen ſollen, eine horizontale gehörig befeſtigte Stange anbringen, woran ſich die Arbeiter halten können, denn die Arbeit wird ihnen nun faſt ſo beſchwerlich, als wenn ſie eine verticale Treppe hinan ſteigen ſollten:

Deswe-

deswegen zweifle ich auch, ob die Geſchwindigkeit der Arbeiter ſo hoch in Anſchlag gebracht werden könne, als in dem Fall, wenn die Arbeiter im Rade laufen. Sonſt wäre dies freylich die allervortheilhafteſte Art, eine Maſchine durch Menſchen zu bewegen; und bey einerley Anzahl Arbeiter, und einerley Moment des Widerſtandes, würde man nur ein halb ſo hohes Rad nöthig haben, als in dem Fall, wenn die Arbeiter im Rade laufen. Im V. Theil der Abhandl. der Königl. Schwediſchen Academie der Wiſſenſchaften iſt ein ſolches Tret-Rad beſchrieben, welches der Schwediſche Mechanicus Polhem beym Stockholmiſchen Schleuſen-Bau angelegt hat. Es iſt nur 6 Fuß 4 Zoll hoch, da ſtatt deſſen andre Laufräder nicht leicht unter 12 Fuß hoch gemacht werden. Völlig ſo viel Laſt kan man einer Maſchine dieſer Art nicht zu überwinden geben, daß ſie mit dem ganzen Gewicht der Arbeiter im Gleichgewicht wäre, weil dieſe ſonſt die Maſchine nicht würden in Bewegung bringen können. Wenn ſie im innern Umfang des Rades laufen, ſo kan die Laſt (die Friction mit inbegriffen,) mit dem halben Gewicht der Arbeiter im Gleichgewicht ſeyn, und ſie werden um deswillen die Maſchine doch in Bewegung bringen, weil ſie ſich anfangs gar wohl etwas weiter, als um einen Bogen von 30° von der unterſten Stelle des Rades entfernen können.

VIII.) Schiefliegende Tret-Räder werden am gewöhnlichſten nur für Thiere, und insbeſondre für Ochſen gebraucht. Das Thier kan nun weder auf dem innern noch äuſſern Umfang des Rades treten: es gehet ſtatt deſſen auf der aufwärts gekehrten Seitenfläche des Rades, die deswegen mit Brettern zu-

gedeckt, übrigens aber auch mit Leiſten oder Stuffen verſehen iſt. Stellt man ſich durch die Umlaufsaxe eine verticale Ebene vor, ſo muß das Thier da ſeine Stelle haben, wo es am weiteſten, alſo um den ganzen Halbmeſſer des Rades von dieſer Verticalfläche entfernt iſt. Und woferu die Schlüſſe n. IV. auch für Thiere gelten, ſo muß das Rad unter einem Winkel von 30° gegen den Horizont geneigt ſeyn: da dann ebenfalls das halbe Gewicht des Thiers in die Maſchine würkt, welches in den Abſtand der Stelle des Thiers von der Verticalfläche durch die Umlaufs-Axe multiplicirt, das ſtatiſche Moment giebt, womit das Thier das Rad zu drehen ſtrebt; und die fernere Multiplication in die Umlaufs-Geſchwindigkeit γ giebt das mechaniſche Moment. Das Rad ſey gegen den Horizont unter dem Winkel ζ geneigt, der Halbmeſſer des Rades bis dahin gemeſſen, wo das Thier ſtehet, $= r$, der Bogen zwiſchen der niedrigſten Stelle des Rades und der Stelle des Thiers $= r.\eta$, wie n. I, und das Gewicht des Thiers $= P$, ſo iſt das mechaniſche Moment $= r\gamma P \sin\zeta \sin\eta$. Leupold im Theatro Mach. Gener. §. 277. p. 95. hält dafür, daß der Winkel $\zeta = 30°$ für Thiere ſchon zu groß ſey, und es ſoll nach ſeiner Regel für Thiere $\sin\zeta = \frac{1}{3}$, alſo ζ nur $19\frac{1}{2}°$ groß ſeyn. Wenn demnach $\eta = 90°$ iſt, und man braucht die Buchſtaben α, β, Q, in eben der Bedeutung, wie n. VI, ſo hat man $\frac{1}{3}P\alpha = Q\beta$. Das Gewicht P eines Ochſen ſchätzt man auf 800 Pf., er kan aber nur mit einer Geſchwindigkeit von 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuß arbeiten, und ſo hoch ohngefehr muß man α in Anſchlag bringen.

Zuſatz
zum 112 und 113 §. der Statik auf der 99 S. des Dritten Theils.

Hieſelbſt iſt bey Flaſchenzügen nur der Fall betrachtet worden, wenn das Seil DABE (54 und 55 Fig.) am untern Haken D der obern Flaſche befeſtiget iſt. Man kan ſtatt deſſen die untere Flaſche am obern Ende mit einem Haken verſehen, und das Seil daran befeſtigen: alsdann geht es in der 54 Fig. zuerſt um die obere Rolle M, und ferner um die untere Rolle C bey A wieder hinauf, und wenn die Kraft abwärts ziehen ſoll, ſo iſt oben eine Rolle mehr, als unten nöthig. In der 55 Fig. geht das Seil, wenn es an der untern Flaſche befeſtiget iſt, nach der Ordnung um die Rollen M, C, N, L, bey G wieder aufwärts, und es iſt ebenfalls oben eine Rolle mehr, als unten nöthig, wenn die Kraft abwärts ziehen ſoll. Nimmt man nun, wie im 112 §, an, die Flaſche CT ſey unbeweglich befeſtiget, und eine Kraft $= V$ ziehe an dem Seil abwärts, welches um die höchſte obere Rolle geführt iſt, die man ſich oberhalb N noch vorſtellen muß; ſo leidet der Polzen L aufwärts den Druck $\frac{GH}{GL}.V$, und der Polzen C den Druck $\frac{AB}{AC}.V$, die Flaſche ſelbſt aber auſſerdem aufwärts den Druck $= V$

=V von dem am Haken oberhalb C befeſtigten Seil. Demnach darf die untere Flaſche nicht befeſtiget ſeyn, wenn unten bey T eine Laſt = $\left(\frac{GH}{GL}+\frac{AB}{AC}+1\right)V$ hängt. Man bekommt ſo viele Brüche, wie $\frac{GH}{GL}$, $\frac{AB}{AC}$, als untere Rollen da ſind; wenn alſo jeder dieſer Brüche =2 angenommen werden kan, und n die Zahl der untern Rollen, P aber die Laſt bedeutet; ſo wird $P=(2n+1)V$. Wofern nun V ein Gewicht an dem von oben herab hängenden Seil iſt, und daſſelbe ſinkt um eine Tiefe $=w$, ſo ſteigt die untere Flaſche um einen Weg $=\frac{1}{2n+1}\cdot w$, und es verhält ſich auch bey dieſer Zuſammen-Ordnung der Flaſchen der Weg der Kraft zum Wege der Laſt, wie die Laſt zur erhaltenden Kraft.

* * * * * * * * * * * * * * * *

Zuſatz
zum 352 §. der Mechanik auf der 411 Seite des Vierten Theils.

Es iſt ein Verſehen, wenn hieſelbſt der Satz angenommen wird: „Wären die Rollen des Flaſchenzuges alle gleich groß, ſo würden ſie insgeſamt „mit gleicher Winkelgeſchwindigkeit umlaufen.“ In der 55 Fig. ſey v die Geſchwindigkeit des Umfangs der

Weiter iſt

$$\begin{array}{rr} \sec\vartheta = 5{,}5395786 & \sec\eta = 1{,}9147899 \\ \cos\vartheta = 0{,}1805191 & \cos\eta = 0{,}5222505 \\ \hline 5{,}7200977 & 2{,}4370404 \\ -2{,}4370404 & \\ \hline 3{,}2830573 & \end{array}$$

Dies mit $\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2} = \frac{4}{9}$ multiplicirt giebt 1,4591366, und die vorige Zahl 0,0569552 dazu addirt giebt die Summe 1,5160918 beynahe = 1,5161. Ueberdem wird $c.\cos\zeta = 20\sqrt{\frac{3}{4}}$, alſo $c^4\cos\zeta^4 = 90000$, und $\mu^2 = 9$. Das giebt

$$\frac{4nGyc^4\cos\zeta^4}{\mu^2\gamma} = \frac{7.4.7.10000}{151.8.22} = \frac{490000}{151.44}$$

= 73,7507, und dieſe Zahl mit 1,5161 multiplicirt giebt M = 111,8. Im 235 §. ward bey ebenen Flügeln von eben der Gröſſe, eben der Umlaufsgeſchwindigkeit und eben der Lage der Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes, das Moment des Windſtoſſes = 105,8 gefunden, und die Vergleichung ergiebt, daß bey geneigter Lage der Axe die gebogenen Flügel ebenfals etwas, obgleich nicht ſo gar viel vortheilhafter ſind, als ebene Flügel. Im 227 §. aber ward bey gebogenen Flügeln von eben der Gröſſe, und eben der Umlaufsgeſchwindigkeit, das Moment des Windſtoſſes = 158,4 gefunden, wenn die Umlaufsaxe in der Richtung des Windes liegt, welches das vorhin gefundene um ein anſehnliches übertrift. Dies veranlaſſet demnach auch hier die Frage: ob und unter welchen Umſtänden die geneigte Lage der Axe beſſer ſeyn könne als die parallele Lage?

244 §.

Halbmeſſer $=\varepsilon$, und Moment der Trägheit $= \mathrm{L}l^2$ wäre, ſo wäre die Beſchleunigung der Laſt $=$

$$\frac{(6ap - aq)a}{36a^2P + \frac{36a^2}{\varepsilon^2}Ll^2 + \frac{16a^2}{\beta^2}N'\nu^2 + \frac{4a^2}{\alpha^2}M'\mu^2 + Qa^2 + \frac{25a^2}{e^2}Kk^2 + \frac{9a^2}{b^2}Nn^2 + Mm^2}.$$

In dem Fall aber, wenn jede zwey zuſammengehörige Rollen gleich groß ſind, wird dieſer Ausdruck $=$

$$\frac{(6ap - aq)a}{36a^2P + \frac{61a^2}{e^2}Kk^2 + \frac{25a^2}{b^2}Nn^2 + 5Mm^2 + Qa^2}.$$

So muß die Formul, welche auf der 411 S. in der letzten Zeile ſteht, verbeſſert werden, wobey ich bemerke, daß daſelbſt drey Paar Rollen, und jede zwey zuſammengehörige gleich groß angenommen ſind. Weil ferner $m^2 = \frac{1}{2}a^2$, $n^2 = \frac{1}{2}b^2$, $k^2 = \frac{1}{2}e^2$ iſt, ſo wird die Beſchleunigung der Laſt in eben dieſem Fall

$$= \frac{6p - q}{36P + 30{,}5 \cdot K + 12{,}5 \cdot N + 2{,}5 \cdot M + Q}.$$

Zuſatz

Zuſatz
zum 321 §. der Hydraulik auf der 510 Seite des Fünften Theils.

Die am Ende dieſes §. befindliche die Friction der Pumpenkolben betreffende Regel iſt daſelbſt nicht völlig beſtimmt ausgedrückt, und ſie muß ſo abgefaßt werden: Bey einerley Einrichtung des Kolbens, einerley Zeit des Kolbenzuges, und einerley Waſſermenge, iſt die Friction beynahe dem Durchmeſſer des Stiefels umgekehrt proportional. Wenn δ dieſer Durchmeſſer, und b die Höhe, t die Zeit eines Kolbenzuges iſt; ſo iſt die innere Fläche des Stiefels, woran ſich der Kolben in der Zeit t reibt, $= \pi\delta b$, und man nimmt an, daß die Friction bey einerley Zeit t dieſer Fläche beynahe proportional ſey. Wird nun in der Zeit t die Waſſermenge M gehoben, ſo iſt $M = \frac{1}{4}\pi\delta\delta b$, alſo $\pi\delta b = 4M : \delta$, und es verhält ſich die Friction umgekehrt wie δ, wenn t und M einerley ſind. Man ſehe die Hiſtoire de l'Academie de Berlin A. 1752 p. 226. Die Regel iſt, wie alle andre, welche die abſolute Gröſſe der Friction betreffen, ſo ganz ſicher nicht, indeſſen iſt doch ſoviel gewiß, daß wegen dieſer Friction deſto mehr Kraft erfordert wird, je ſchneller die Bewegung des Kolbens ſeyn ſoll; und ſo würde dies doch ein neuer Grund ſeyn, bey Pumpenkünſten einen niedrigen und langſamen Kolbenzug zu empfehlen.

* * * * * * * * *

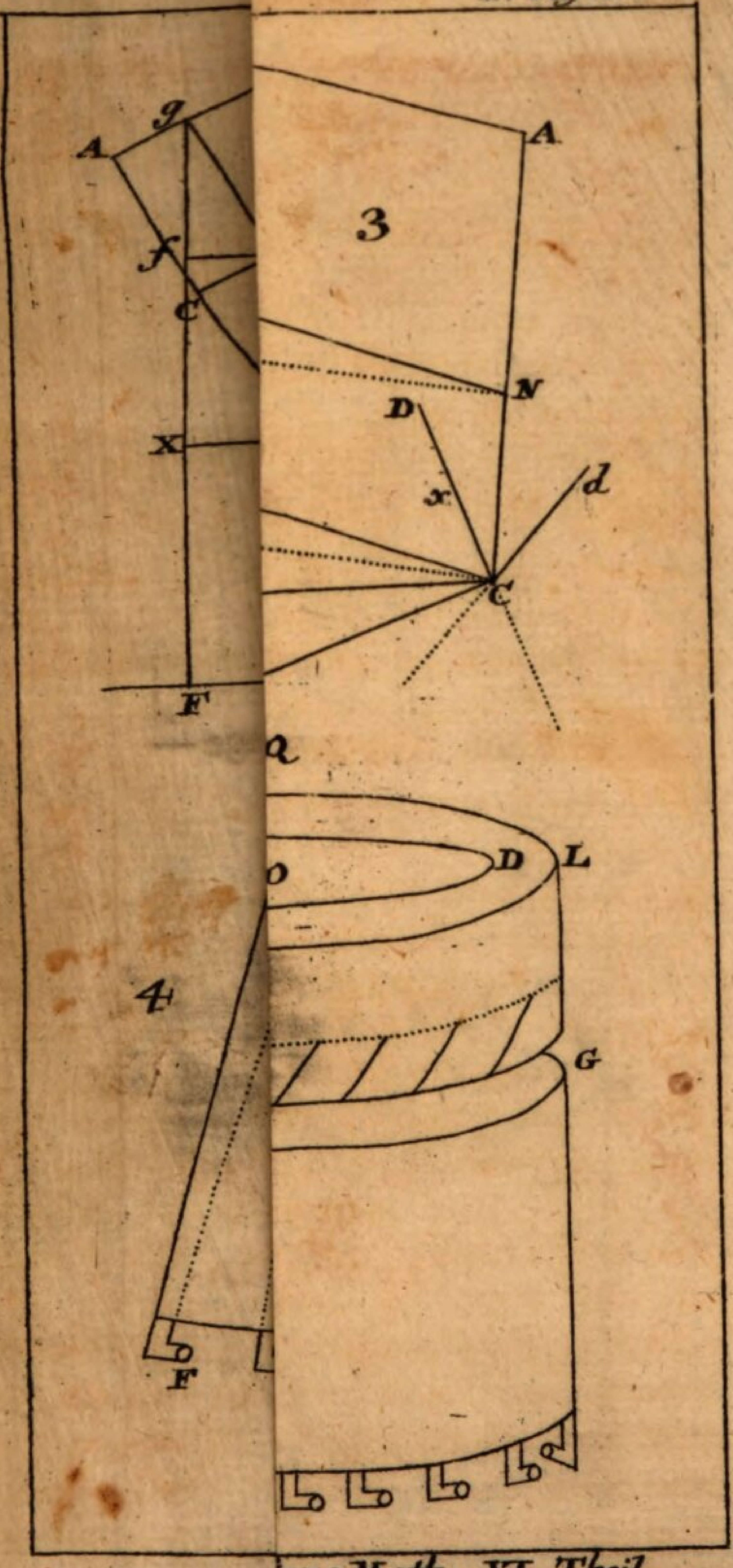
Der im 433 §. des V Theils erwehnte Verſuch mit einem weiten, und vermittelſt einer durchlöcherten Platte geſchloſſenen Gußrohr iſt nach der Zeit mehrmahls wiederhohlt worden, und man hat es noch beſſer befunden, wenn ſtatt der durchlöcherten Platte ein cylindriſches Mundſtück von 4 bis 6 Zoll Länge aufgeſetzt wird.

Auf der 769 S. des V Theils in der 18 Zeile löſche man folgende Stelle ganz weg:

und $\omega b = \frac{gcctt}{4aal}$;

die 3te Zeile von unten ebendaſelbſt faſſe man ſo:

die würkliche Waſſermenge $\frac{(F-\varphi)\alpha T}{p} = M$.


3
A
g
f
C
X
F
N
D
x
d
C
4
a
D
L
o
G
F

Zuſatz

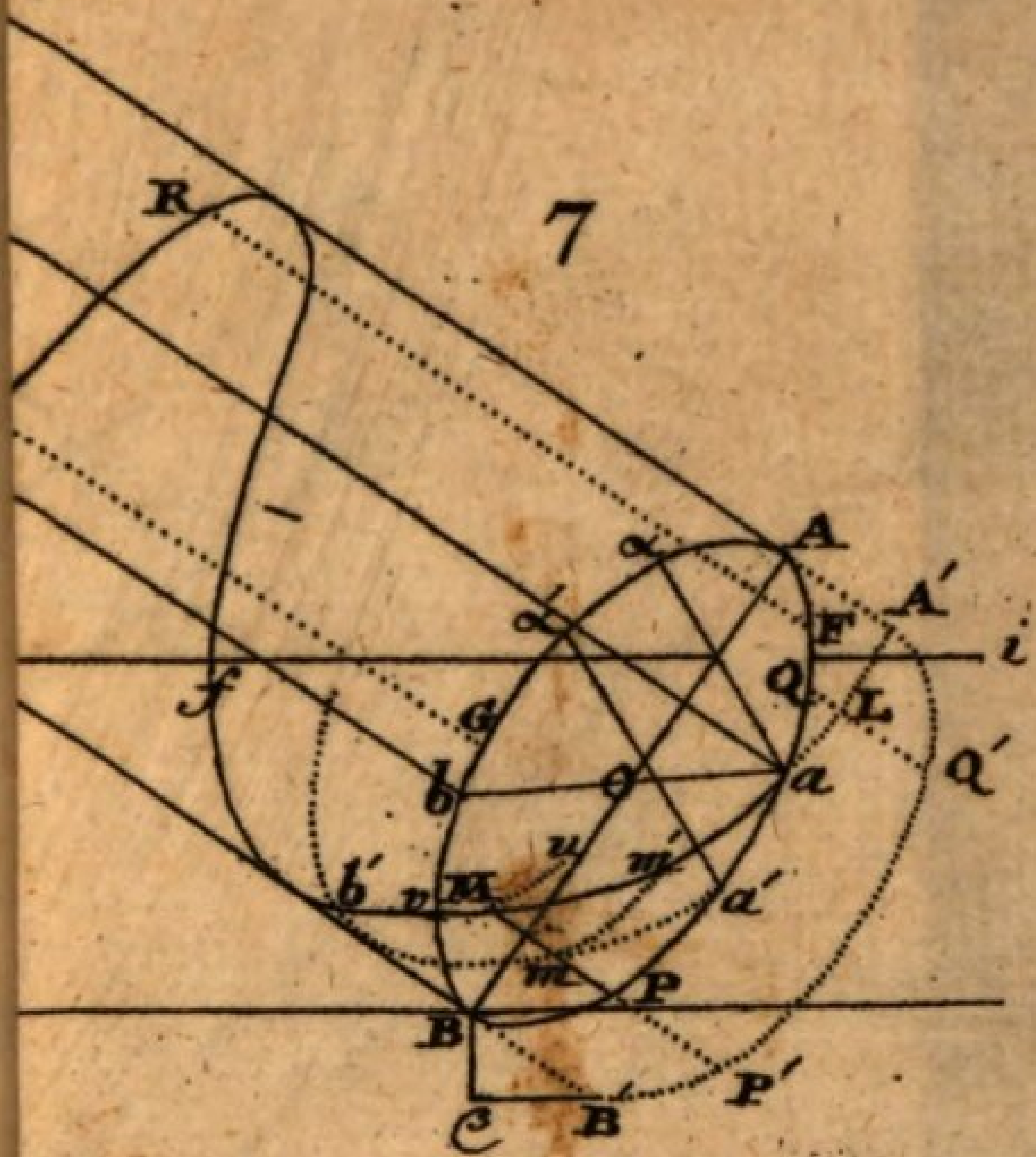
zum 396 §. der Mechanik auf der 474 Seite des Vierten Theils.

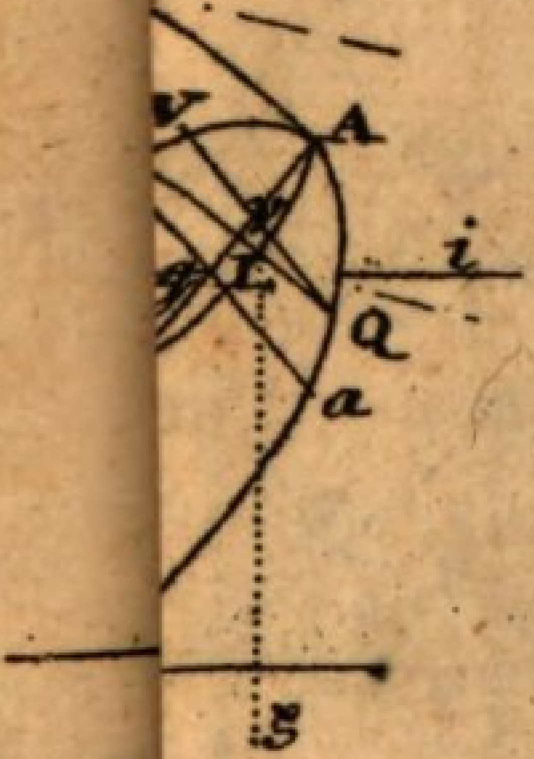
Die Lauf- oder Tret-Räder, und beſonders die verticalen Räder dieſer Art, werden mit ſo gutem Erfolg bey mancherley Maſchinen gebraucht, daß ich die angezogene etwas kurz gerathene Stelle durch einige nähere Erläuterungen zu ergänzen nöthig finde. Ich werde nur die Fälle betrachten, wenn das Rad durch Menſchen umgetrieben wird, weil dies am gebräuchlichſten iſt, und hiernächſt die Anwendung auf ſolche Fälle, wo man Thiere gebrauchen will, leicht gemacht werden kan.

I.) Wenn eine oder mehr Perſonen im innern Umfang eines Laufrades neben einander ſtehen, und vermöge ihres Gewichts das Rad zu drehen ſtreben, ſo macht man ſich von der Art, wie ſie in das Rad würken, am deutlichſten folgenden Begrif. Man ſtelle ſich einen verticalen Halbmeſſer des Rades vor, und einen andern Halbmeſſer, der die Stelle des Rades trift, wo die Arbeiter ſtehen. Das Gewicht aller Arbeiter zuſammen, welches nach verticaler Richtung abwärts drückt, ſey $= P$, und der Winkel, welchen die erwehnten beyden Halbmeſſer einſchlieſſen, ſey $= \eta$, ſo zerlegt ſich das Gewicht P nach den Richtungen der Tangente des Rades und ſeines Halbmeſſers durch den Berührungspunct, da wo die Arbeiter ſtehen, in die Kräfte $P \sin \eta$ und

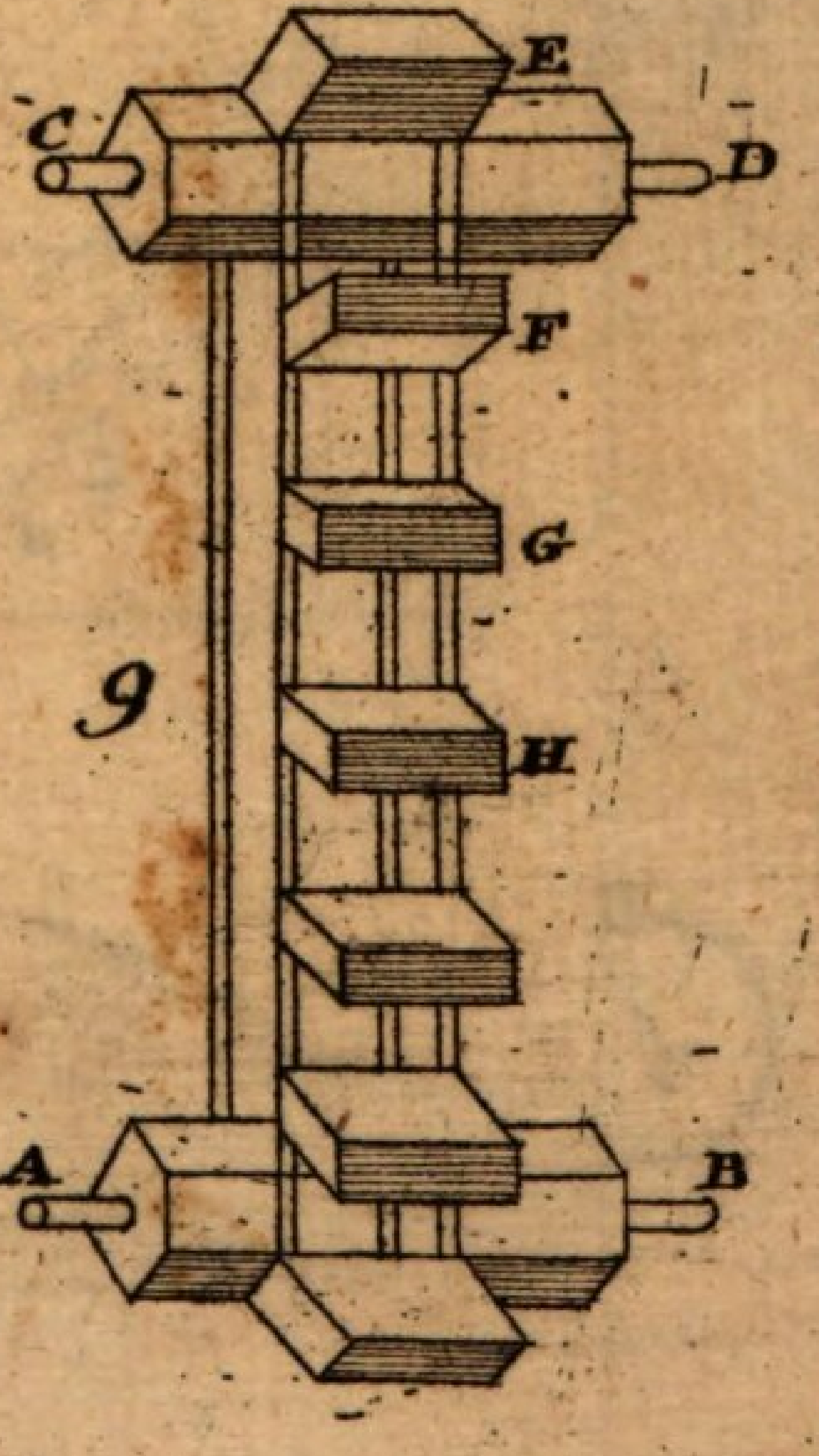
$P \cos \eta$.

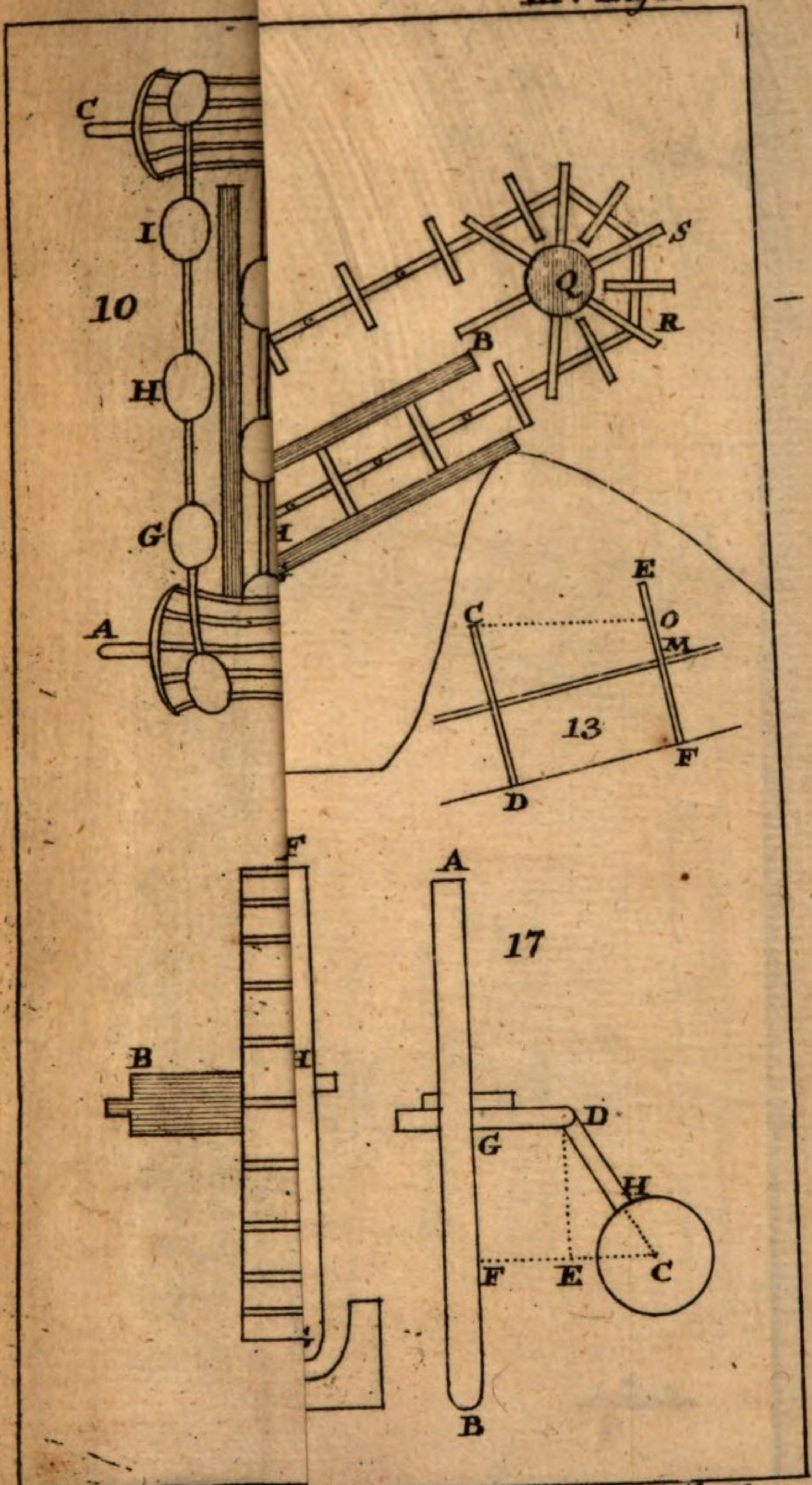
7





9



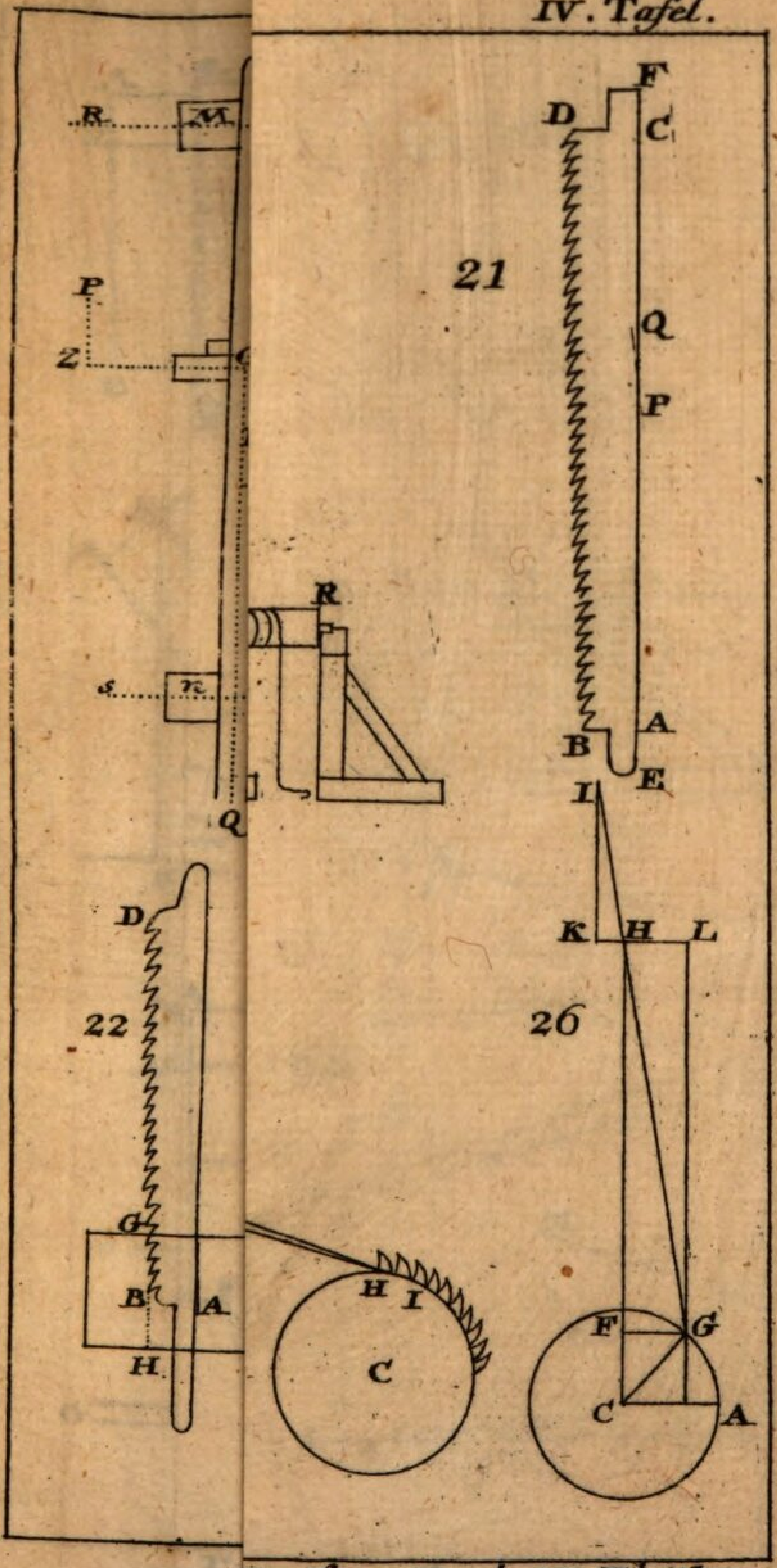

10
C
I
H
G
A
Q
S
R
B
13
E
C
O
M
F
D
17
F
A
B
H
G
D
H
F
E
C
B

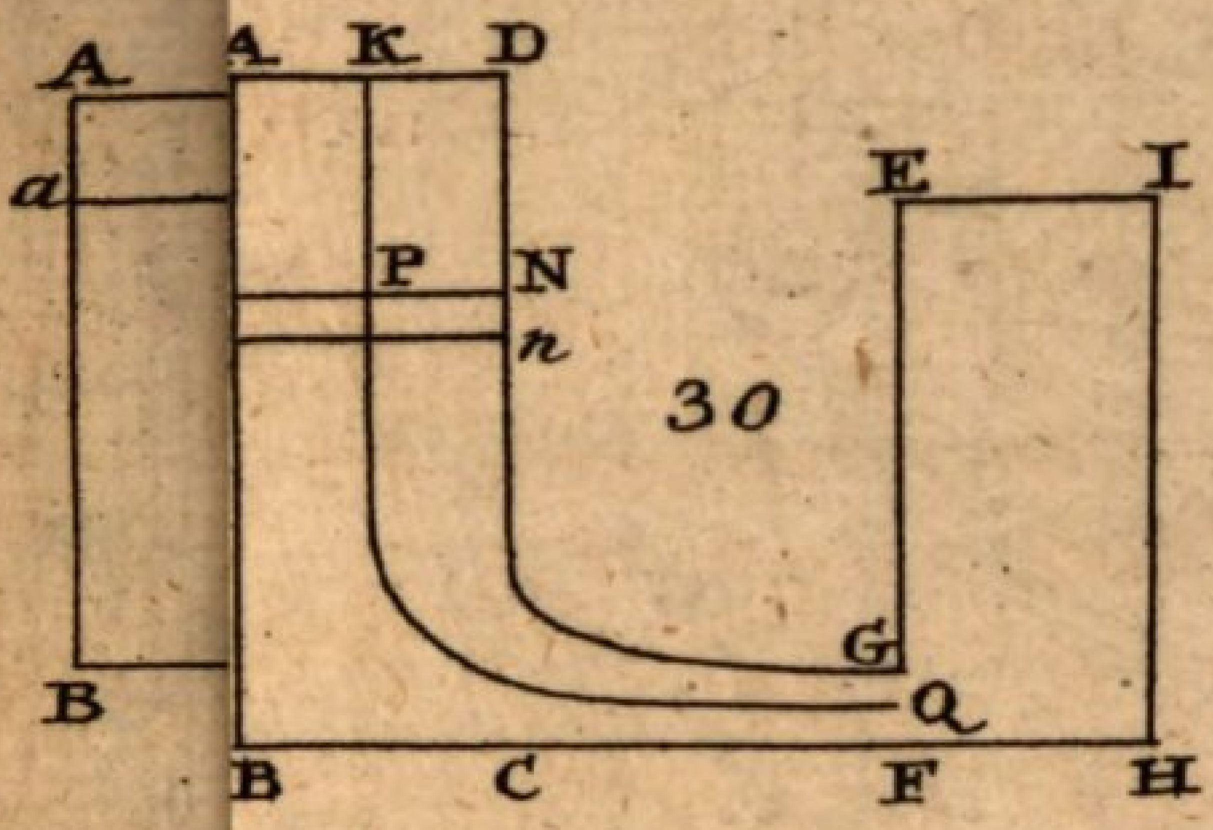
Kraft in die Maſchine würken können, die ohngefehr dem vierten Theil ihres Gewichts gleich iſt, da ſtatt deſſen beym Laufrade ihr halbes Gewicht in die Maſchine würkt.

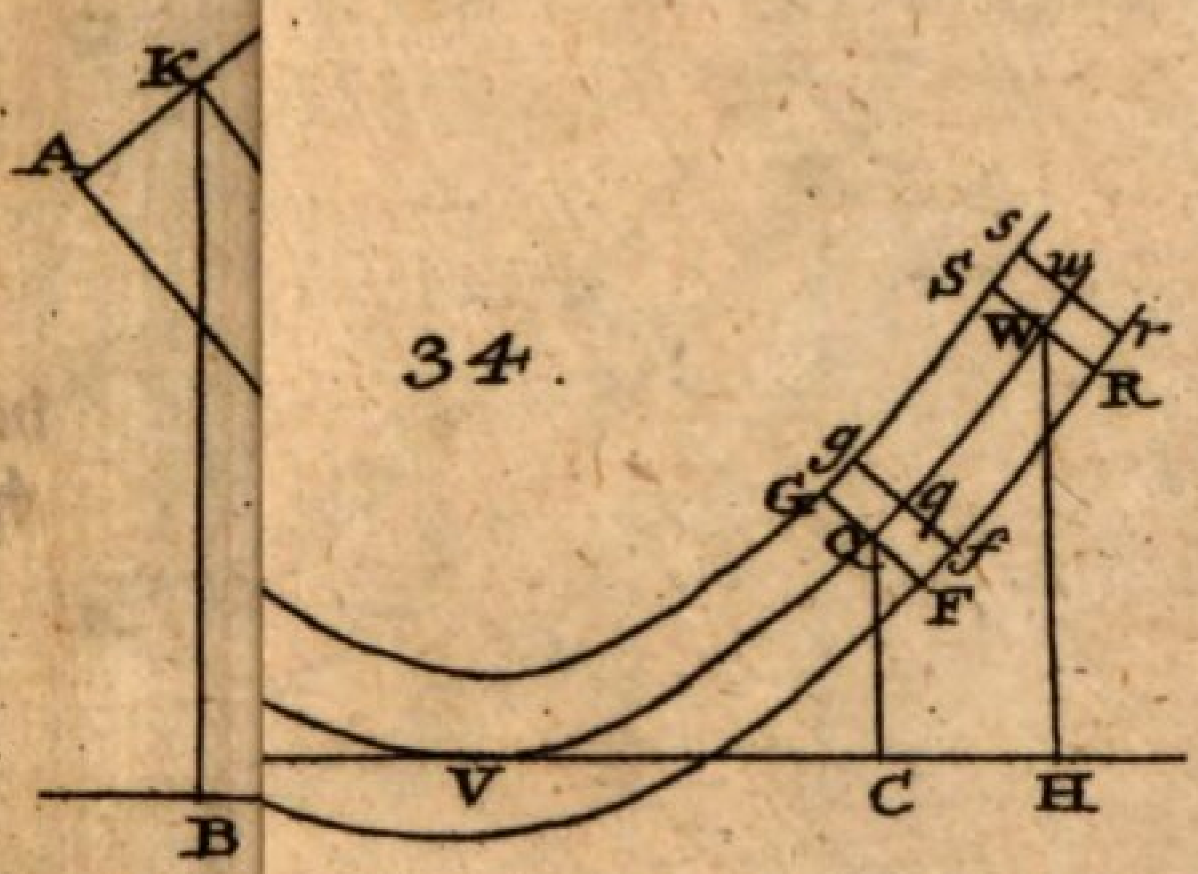
VI.) Schreibt man α ſtatt $r\gamma$, ſo iſt das mechaniſche Moment der Kraft der Arbeiter beym verticalen Laufrade am innern Umfang deſſelben $= \frac{1}{2}P\alpha$, und es muß die Umlaufszeit des Rades $\Theta = \frac{2\pi r}{\alpha}$ ſeyn. Will man nun eine Laſt Q in der Zeit t um den Weg s fortbewegen, ſo hat man $\frac{1}{2}P\alpha = Q\beta$, wenn $s:t = \beta$ iſt, und man findet $Q = \frac{\frac{1}{2}P\alpha}{\beta}$, oder $\beta = \frac{\frac{1}{2}P\alpha}{Q}$, nachdem das eine oder andre als gegeben betrachtet wird.

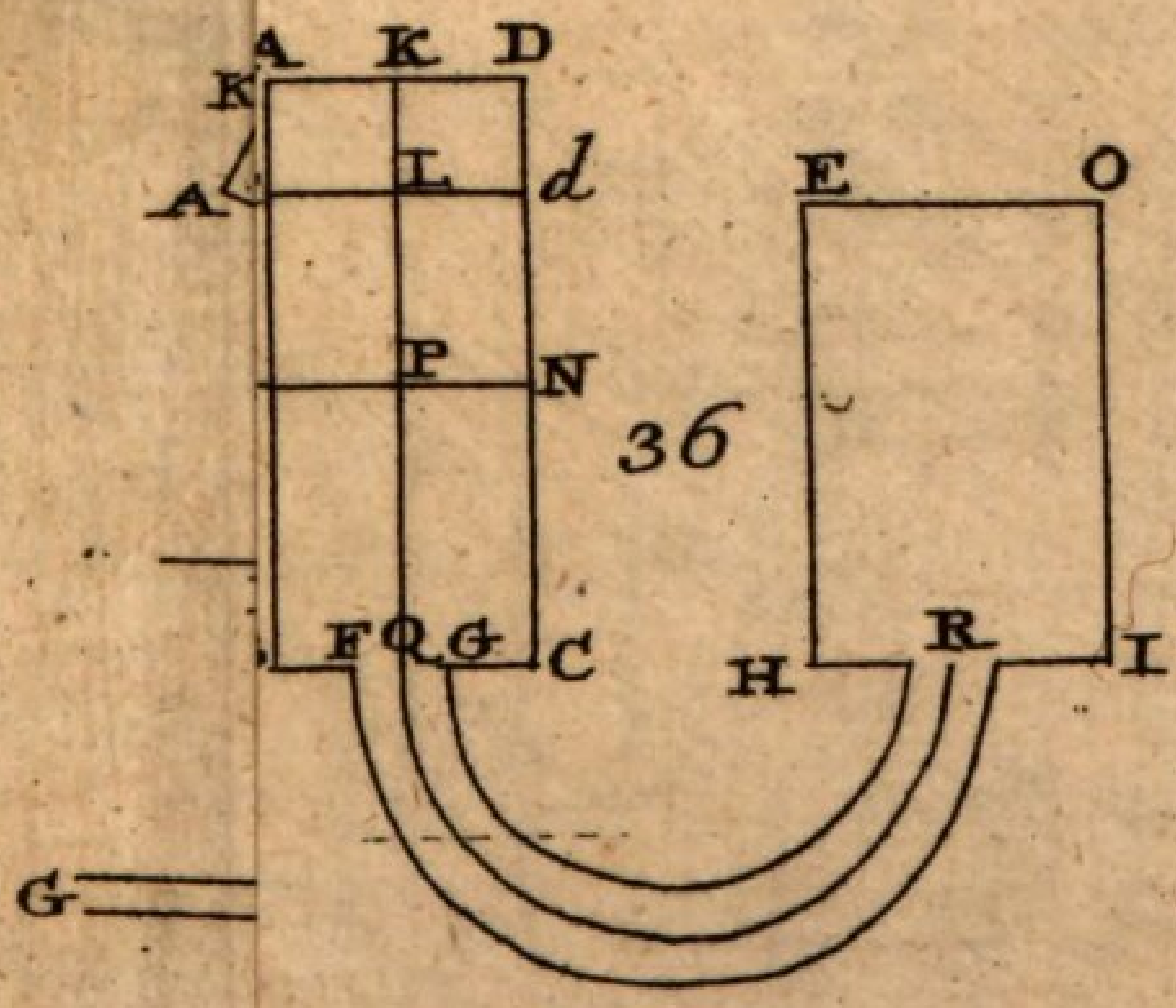
VII.) Damit das ganze Gewicht der Arbeiter in die Maſchine würken könne, bringt man auch wohl auſſerhalb des Rades ein Gerüſte an: alsdenn können die Arbeiter auf den äuſſern Umfang des Rades treten, und dies am vortheilhafteſten in der Entfernung des Halbmeſſers von der verticalen Ebene durch die Umlaufsaxe, ſo daß der Bogen zwiſchen der Stelle der Arbeiter, und der niedrigſten Stelle des Rades, 90° faſſet. M. ſ. Leupold Theatr. Machin. Hydraul. T. II. §. 18. p. 9. Man muß alsdenn oberhalb der Stelle, wo die Arbeiter ſtehen ſollen, eine horizontale gehörig befeſtigte Stange anbringen, woran ſich die Arbeiter halten können, denn die Arbeit wird ihnen nun faſt ſo beſchwerlich, als wenn ſie eine verticale Treppe hinan ſteigen ſollten:

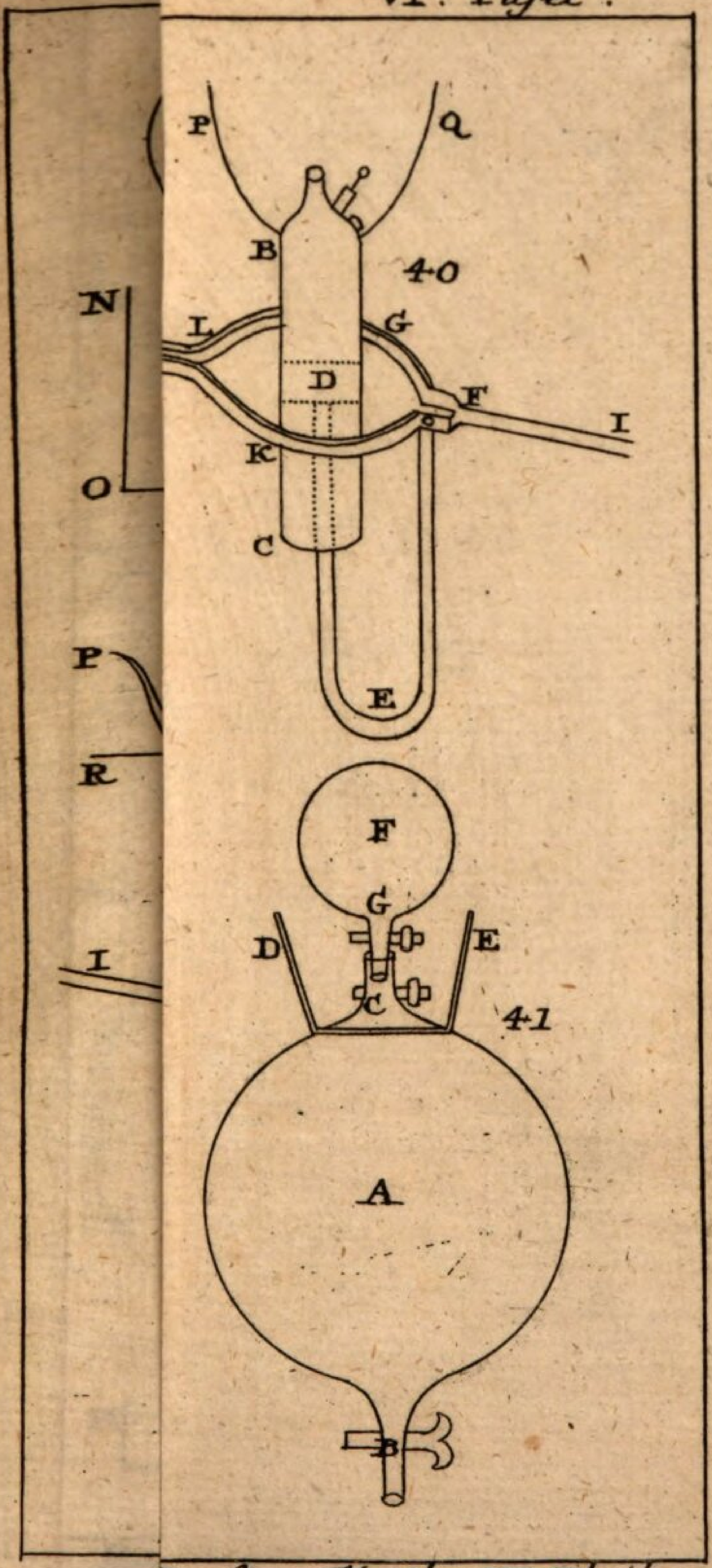
deswe-


R
M
P
Z
s
n
Q
R
21
D
F
C
Q
P
A
B
E
I
K
H
L
26
F
G
C
A
D
22
G
B
A
H
H
I
C

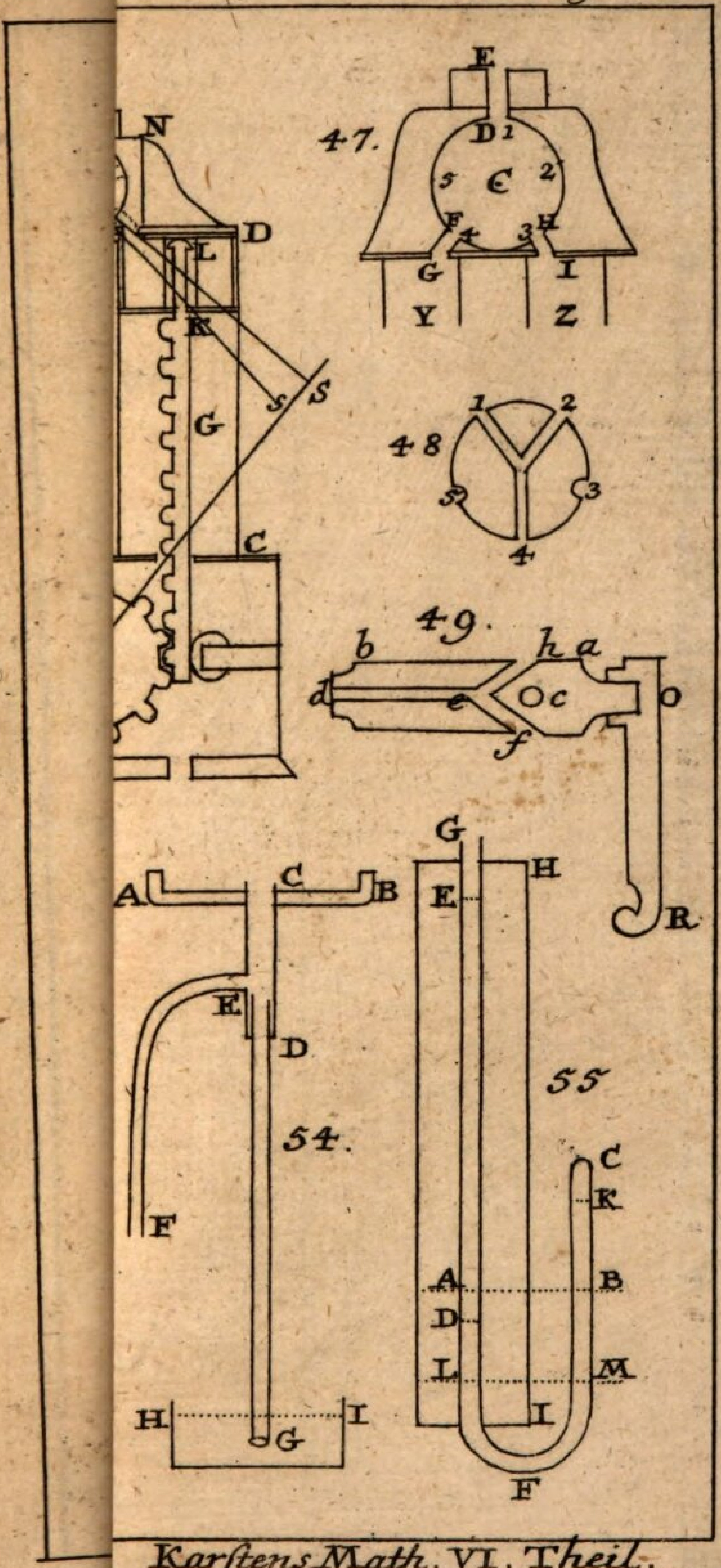

A
A K D
a
E I
P N
n
30
G
Q
B
B C F H


K
A
34.
s w
S
W r
R
g
G q
Q f
F
B V C H


A K D
K
A L d
E O
P N
36
F Q G C
H R I
G


P
Q
B
40
N
L
G
D
F
I
K
O
C
E
P
R
F
G
D
E
I
C
41
A
B

VII. Tafel.



Karſtens Math. VI. Theil.

* * * * * * * * *

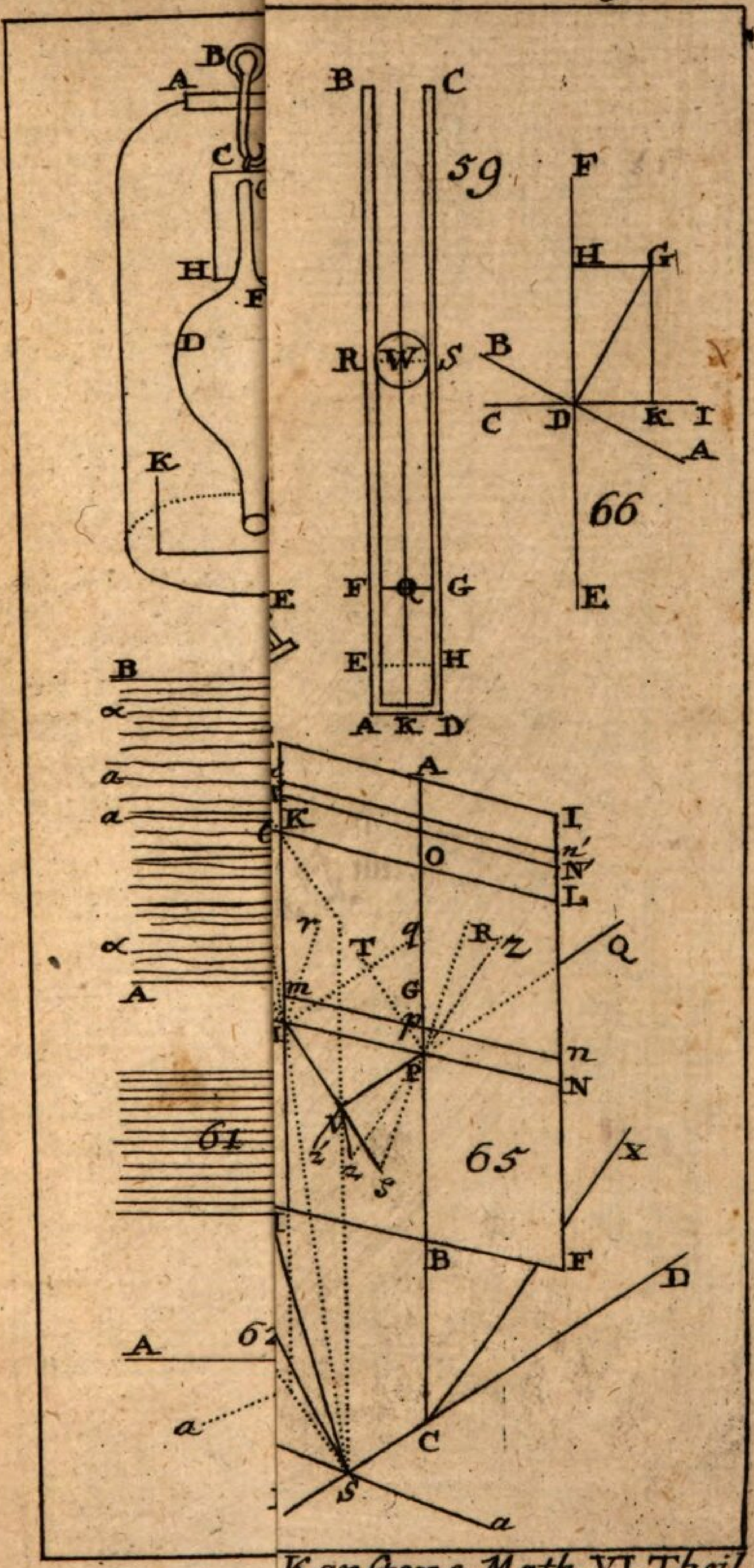
Der im 433 §. des V Theils erwehnte Verſuch mit einem weiten, und vermittelſt einer durchlöcherten Platte geſchloſſenen Gußrohr iſt nach der Zeit mehrmahls wiederhohlt worden, und man hat es noch beſſer befunden, wenn ſtatt der durchlöcherten Platte ein cylindriſches Mundſtück von 4 bis 6 Zoll Länge aufgeſetzt wird.

Auf der 769 S. des V Theils in der 18 Zeile löſche man folgende Stelle ganz weg:

$$\text{und } \omega b = \frac{gcctt}{4aal};$$

die 3te Zeile von unten ebendaſelbſt faſſe man ſo:

$$\text{die wütkliche Waſſermenge } \frac{(F-\Phi)\alpha T}{p} = M.$$


59
61
62
65
66

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Lehrbegrif der gesamten Mathematik

Bd.: 6

Greifswald 1771

Math.u. 85-6
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625589-3
VD18 8034044X-001